ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 8 Выпуск 2 (2007)

УДК 519.21

# ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ШТУРМА: ГРАФЫ РОЗИ И ФОРСИНГ[1]

А. В. Шутов (г. Владимир)

**Аннотация**

В работе вычислены графы Рози и функция форсинга для произвольной последовательности Штурма.

*Посвящается Дмитрию Алексеевичу Митькину*

## 1 Введение: основные определения, постановка задачи и план статьи.

Пусть $A$ - конечное множество символов, называемое алфавитом. Условно можно обозначить $A = \{0, 1, \ldots, d-1\}$. Рассматриваются бесконечные в одну сторону последовательности $u = (u_n)_{n=1}^{\infty} \in A^{\mathbb{N}}$ над $A$. Будем говорить, что конечное слово $W = (w_n)_{n=1}^{r}$ встречается в последовательности $u$, если $u_m = w_1, \ldots, u_{m+r-1} = w_r$ для некоторого $m$. Число $r$ будем называть длиной конечного слова $W$ и обозначать $|W|$. Множество слов длины $n$, встречающихся в последовательности $u$ будем обозначать $L_n(u)$. Число таких слов обозначим $p_n(U)$. Функция $p_n(u)$ называется функцией сложности последовательности $u$.

Для произвольной бесконечной последовательности $u$ над алфавитом $A$ можно определить [5] последовательность графов Рози $(R_n(u))_{n=1}^{\infty}$. Множество вершин графа Рози порядка $n$ есть множество конечных слов из $L_n(u)$. Вершины, соответствующие словам $U$ и $V$ соединены в графе Рози ориентированным ребром, ведущим из $U$ в $V$ тогда и только тогда, когда существуют символы $x, y \in A$ и слово $W$ такие, что $U = xW$, $V = Wy$ и слово $xWy$ встречается в $u$. Это означает, что слово $V$ может следовать сразу за $U$ в последовательности $u$. Легко видеть, что граф Рози $R_n(u)$ содержит $p_n(u)$ вершин и $p_{n+1}(u)$ ориентированных ребер. Многие комбинаторные задачи о последовательности $u$ сводятся к нахождению графов Рози.

Одним из наиболее важных примеров таких задач является задача о форсинге последовательности. Пусть $W = (w_1, \ldots, w_r)$ – некоторое слово, встречающееся в последовательности $u$. Пусть существует слово $W' = (w'_1, \ldots, w'_{r'})$ такое,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 05-01-00435.

что из $u_m = w_1, \dots, u_{m+r-1} = w_r$ вытекает, что $u_{m+r} = w'_1, \dots, u_{m+r+r'-1} = w'_{r'}$, то есть слово $W'$ всегда следует за $W$ в последовательности $u$. Такое явление будем обозначать $W \to W'$. Форсингом слова $W$ будем называть величину

$$\mathsf{force}(W) = \max\{|W'| : W \to W'\}.$$

Понятие форсинга слова легко может быть описано при помощи графов Рози. Пусть $V_n^{(r)}$ – множество вершин графа Рози $R_n(u)$, из которых выходит больше одного ребра. Тогда, очевидно, что $\mathsf{force}(W) = 0$ для любого слова $W \in V_n^{(r)}$. Если же $W \notin V_n^{(r)}$, то $\mathsf{force}(W)$ равен расстоянию от $W$ до $V_n^{(r)}$ в метрике графа Рози.

Далее, пусть

$$\mathsf{mforce}_n(u) = \max_{W \in L_n(u)} \mathsf{force}(W),$$

$$\overline{\mathsf{force}}_n(u) = \sum_{W \in L_n(u)} \nu(W)\mathsf{force}(W),$$

– максимальный и средний форсинг последовательности $u$. Здесь $\nu(W)$ – частота появления слова $W$ в последовательности $u$.

Один из наиболее популярных способов построения интересных бесконечных последовательностей над конечным алфавитом предложил M.Queffelec [3]. Пусть $X$ – метрическое пространство, разбитое на объединение непересекающихся множеств $X = X_0 \sqcup X_1 \sqcup \dots \sqcup X_{d-1}$. Пусть $x \in X$ и $A : X \to X$ – непрерывное отображение. Тогда последовательность $u = (u_n^A)_{n=1}^{\infty}$, где

$$u_n^A = i, \text{ если } A^n x \in X_i$$

называется геометрическим представлением (или кодировкой) динамической системы $(X, A)$.

Наиболее изученным является случай, когда $X$ – единичная окружность, то есть $X = I^0 = [0; 1)$ с отождествленными точками 0 и 1, а $A = R_\alpha : x \to x + \alpha \bmod 1$ – иррациональный поворот окружности. Если при этом $d = 2$, $X_0 = [0; 1 - \alpha)$ и $X_1 = [1 - \alpha, 1)$, то в результате изложенной конструкции получаются хорошо известные в комбинаторике и теории чисел последовательности Штурма [4].

Цель настоящей работы – для произвольной последовательности Штурма описать графы Рози всех порядков и вычислить функции максимального и среднего форсинга.

**План статьи.** В §2 мы изучаем геометрию последовательностей Штурма и связываем их со специальными разбиениями единичной окружности. Соответствующие разбиения изучаются в §3. В §4 строются графы перекладываний полученных разбиений под действием иррационального поворота $R_\alpha$ и доказывается их изоморфность графам Рози. После этого вычисляются функции форсинга. В §5 полученные результаты обобщаются на класс так называемых квазиштурмовых последовательностей.

## 2 Геометрия последовательностей Штурма

Пусть $I^0 = [0;1)$ – единичный полуинтервал, $\alpha$ – иррационально и $R_\alpha : x \to x + \alpha \mod 1$ – поворот окружности. Зафиксируем разбиение $I^0 = I_0 \oplus I_1$, где $I_0 = [0;1-\alpha)$ и $I_1 = [1-\alpha;1)$. (Для любой пары полуинтервалов $X$, $Y$ через $X \oplus Y$ обозначается полуинтервал, состоящий из полуинтервала $X$ и приложенного к нему справа полуинтервала, имеющего ту же длину, что и полуинтервал $Y$). Для произвольного $x \in I^0$ определим последовательность Штурма $u = (u_n)_{n=1}^{\infty}$ соотношением

$$u_n = \begin{cases} 0, & \langle x + n\alpha \rangle \in I_0 \\ 1, & \langle x + n\alpha \rangle \in I_1 \end{cases}, \qquad (1)$$

Здесь $\langle \cdot \rangle$ означает дробную часть числа.

Лемма 2.1. [2] *Слово* $W = (w_i)_{i=1}^{n}$ *принадлежит* $L_n(u)$ *тогда и только тогда, когда существует* $k \geq 0$ *такое, что*

$$\langle x + k\alpha \rangle \in I(W) = I(w_1, \ldots, w_n) = \bigcap_{j=0}^{n-1} R_\alpha^{-j}(I_{w_{j+1}}). \qquad (2)$$

Доказательство очевидно.

Следствие 2.2. *Слово* $W = (w_i)_{i=1}^{n}$ *содержится в* $L_n(u)$ *тогда и только тогда, когда множество* $I(W) = I(w_1, \ldots, w_n)$ *непусто. При этом* $\nu(W)$ *равна мере множества* $I(W)$.

Доказательство вытекает из леммы 2.1 и равномерной распределенности последовательности $(x + n\alpha)_{n=1}^{\infty}$ по модулю 1.

Предложение 2.3. *Пусть* $u$ *– последовательность Штурма, связанная с иррациональным* $\alpha$. *Пусть* $T_n$ *– разбиение* $I^0$ *точками* $\langle -i\alpha \rangle$, $0 \leq i \leq n$. *Тогда существует взаимно-однозначное соответствие между полуинтервалами разбиения* $T_n$, *открытыми справа, и множествами* $I(W)$, $W \in L_n(u)$.

Доказательство. Непосредственное вычисление с использованием леммы 2.1 показывает, что концы полуинтервалов $I(W)$ имеют вид $\langle -i\alpha \rangle$, $0 \leq i \leq n$. Поэтому каждое из множеств $I(W)$ является объединением конечного числа полуинтервалов разбиения $T_n$.

Очевидно, что разбиение $T_n$ состоит из $n+1$ полуинтервала. Далее, хорошо известно (см., например, [4]), что для произвольной последовательности Штурма $u$

$$|L_n(u)| = p_n(u) = n + 1. \qquad (3)$$

Таким образом, число множеств $I(W)$, $W \in L_n(u)$ и число полуинтервалов разбиения $T_n$ совпадает. Следовательно, каждое множество $I(W)$, $W \in L_n(u)$ является полуинтервалом разбиения $T_n$ и наоборот.

Лемма 2.4. *Слова* $W_1$ *и* $W_2$ *из* $L_n(u)$ *соединены в графе Рози* $R_n(u)$ *ориентированным ребром, ведущим из* $W_1$ *в* $W_2$ *тогда и только тогда, когда*

$$R_\alpha(I(W_1)) \cap I(W_2) \neq \emptyset. \tag{4}$$

Доказательство вытекает из определения множеств $I(W)$.

Рассмотрим более подробно соответствие между словами последовательности Штурма и интервалами разбиения $T_n$. Следующее предложение позволяет восстановить слово $W$ по интервалу $I(W)$ и разбиению $T_n$.

Предложение 2.5. *Пусть* $I$ *– интервал разбиения* $T_n$, $W = W(I) = (w_i)_{i=1}^n$ *– соответствующее ему слово. Тогда*

$$w_i = \begin{cases} 0, & I \subseteq [\langle -(i-1)\alpha\rangle; \langle -i\alpha\rangle) \\ 1, & I \subseteq [\langle -i\alpha\rangle; \langle -(i-1)\alpha\rangle) \end{cases}. \tag{5}$$

Замечание. *Здесь* $[\langle -(i-1)\alpha\rangle; \langle -i\alpha\rangle)$ *и* $[\langle -i\alpha\rangle; \langle -(i-1)\alpha\rangle)$ *представляют собой связные множества на единичной окружности, ограниченные точками* $\langle -(i-1)\alpha\rangle$, $\langle -i\alpha\rangle$. *Если же их рассматривать как подмножества единичного полуинтервала, то связным является только одно из этих множеств, а второе представляет собой объединение двух полуинтервалов.*

Доказательство вытекает из того, что $R_\alpha^{i-1}(I(W)) \subseteq I_0$, если $I(W) \subseteq [\langle -(i-1)\alpha\rangle; \langle -i\alpha\rangle)$ и $R_\alpha^{i-1}(I(W)) \subseteq I_1$ в противном случае.

Теорема 2.6. *Пусть* $W_1, W_2 \in L_n(u)$ *и* $\lhd$ *– лексикографический порядок на множестве слов длины* $n$. *Тогда* $W_1 \lhd W_2$ *тогда и только тогда, когда интервал* $I(W_1)$ *расположен левее интервала* $I(W_2)$ *в разбиении* $T_n$.

Доказательство будем проводить индукцией по длине слова $n$. Для $n = 1$ утверждение очевидно. Рассмотрим переход $n \to n+1$.

Пусть разбиение $T_n$ имеет вид $I^0 = J_1 \oplus \ldots \oplus J_{n+1}$. В разбиении $T_{n+1}$ появляется только одна новая точка $\langle -(n+1)\alpha\rangle$. Поэтому, разбиение $T_{n+1}$ имеет вид $I^0 = J_1 \oplus \ldots \oplus J_{t-1} \oplus J_{t_1} \oplus J_{t,2} \oplus J_{t+1} \oplus \ldots \oplus J_{n+1}$, где $J_t$ – интервал разбиения $T_n$, содержащий точку $\langle -(n+1)\alpha\rangle$. Пусть $W_n(J)$ – слово длины $n$ из $L_n(u)$, соответствующее интервалу $J$. Ясно, что при $i \neq t$ слово $W_{n+1}(J_i)$ получается из слова $W_n(J_i)$ приписыванием справа одного символа 0 или 1. Поэтому, при $i, j \neq t$ из предположения индукции сразу вытекает, что $W_{n+1}(J_i) \lhd W_{n+1}(J_j)$ тогда и только тогда, когда $i < j$. Аналогично, слова $W_{n+1}(J_{t,1})$ и $W_{n+1}(J_{t,2})$ получаются из слова $W_{n+1}(J_t)$ приписыванием справа одного символа. Поэтому $W_{n+1}(J_i) \lhd W_{n+1}(J_{t,1})$ и $W_{n+1}(J_i) \lhd W_{n+1}(J_{t,2})$ для $i < t$. Если же $i > t$, то $W_{n+1}(J_{t,1}) \lhd W_{n+1}(J_i)$ и $W_{n+1}(J_{t,2}) \lhd W_{n+1}(J_i)$. Остается доказать, что $W_{n+1}(J_{t,1}) \lhd W_{n+1}(J_{t,2})$. Слова $W_{n+1}(J_{t,1})$ и $W_{n+1}(J_{t,2})$ отличаются только последним символом. Поэтому для доказательства достаточно воспользоваться предложением 2.5.

# 3 Разбиения $T_n$

Разбиения $T_n$ представляют собой известный объект теории чисел. Знаменитая теорема о трех длинах (гипотеза Штейнгауза) утверждает, что эти разбиения содержат интервалы не более, чем трех различных длин. Различные доказательства этого результата и вычисление соответствующих длин можно найти в [2],[6], [9] и многих других работах.

Для явного описания разбиений $T_n$ нам потребуется техника модифицированных разбиений Фибоначчи [7], [10].

Пусть $\alpha$ - иррациональное число, имеющее разложение в цепную дробь вида $\alpha = [0; q_1, q_2, \dots]$. Последовательность Штерна-Броко для числа $\alpha$ есть последовательность

$$\omega(\alpha) = 0^{q_1-1}1^{q_2}0^{q_3}1^{q_4}\dots, \tag{6}$$

где запись $x^n$ означает символ $x$, повторенный $n$ раз. Пусть $\omega_m(\alpha)$ - $m$-ый член последовательности (6). При этом

$$\omega_m(1-\alpha) = 1 - \omega_m(\alpha). \tag{7}$$

Пусть $E_0(\alpha)$=$G_0(\alpha)$=1. Определим последовательности $(E_m(\alpha))_{m=1}^{\infty}$, $(G_m(\alpha))_{m=1}^{\infty}$ при помощи рекуррентных соотношений

$$\begin{array}{l} E_{m+1}(\alpha) = E_m(\alpha) \\ G_{m+1}(\alpha) = G_m(\alpha) + E_m(\alpha) \end{array}, \tag{8}$$

если $\omega_m(\alpha) = 0$, и

$$\begin{array}{l} E_{m+1}(\alpha) = G_m(\alpha) + E_m(\alpha) \\ G_{m+1}(\alpha) = G_m(\alpha) \end{array}, \tag{9}$$

если $\omega_m(\alpha) = 1$.

Модифицированное разбиение Фибоначчи $\widetilde{CTil}_m(\alpha)$ порядка $m$ есть разбиение единичного полуинтервала $[0;1)$ точками $\langle k\alpha\rangle$ с $0 \le k < E_m(\alpha) + G_m(\alpha)$.

Теорема 3.1. *Разбиение* $\widetilde{CTil}_m(\alpha)$ *состоит из интервалов двух типов:* $E_k^m$ *и* $G_k^m$, *имеющих координаты*

$$\begin{array}{l} E_k^m = (\langle i\alpha\rangle; \langle (i + G_m(\alpha))\alpha\rangle), \\ G_k^m = (\langle (k + E_m(\alpha))\alpha\rangle; \langle i\alpha\rangle). \end{array} \tag{10}$$

При этом $E_m(\alpha)$ и $G_m(\alpha)$ - количества интервалов вида $E_k^m$ и $G_k^m$ соответственно. Все интервалы $E_k^m$ имеют одинаковую длину. Обозначим ее $em$. Аналогично, $g_m(\alpha)$ есть длина интервалов вида $G_k^m$.

Переход $m \to m+1$ описывается следующей теоремой.

Теорема 3.2. *Интервалы разбиения* $\widetilde{CTil_m}(\alpha)$ *связаны соотношениями*

$$\begin{array}{l} G_k^m = G_k^{m+1}, \\ E_k^m = E_k^{m+1} \oplus G_{k+G_m(\alpha)}^{m+1}, \end{array} \tag{11}$$

*если* $\omega_m(\alpha) = 0$, *и*

$$\begin{aligned} G_k^m &= E_{k+G_m(\alpha)}^{m+1} \oplus G_k^{m+1}, \\ E_k^m &= E_k^{m+1}, \end{aligned} \tag{12}$$

*если* $\omega_m(\alpha) = 1$.

Также нам потребуется следующий результат.

Теорема 3.3. *Последовательность* $\omega(\alpha)$ *обладает следующим свойством*

$$\omega_m(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если } g_m(\alpha) < em \\ 1, & \text{если } g_m(\alpha) > em \end{cases}. \tag{13}$$

Мы будем использовать обозначения $L_m(\alpha)$ и $S_m(\alpha)$ для количества длинных и коротких интервалов разбиения $\widetilde{CTil}_m(\alpha)$ соответственно, $l_m(\alpha)$ и $s_m(\alpha)$ - для их длин, $I_m(\alpha)$ - для величины $L_m(\alpha)+S_m(\alpha)$. Всюду, где это не будет вызывать двусмысленностей, индекс $\alpha$ будет опускаться.

Доказательства теорем 3.1-3.3 можно найти в [10].

Опишем теперь структуру разбиений $T_n$.

Теорема 3.4. *Разбиение* $T_n$ *может быть получено следующим образом:*

*1) Пусть* $n = I_m(\alpha)$ *для некоторого* $m$. *Тогда разбиение* $T_n$ *совпадает с разбиением* $\widetilde{CTil}_m(1-\alpha)$.

*2) Пусть* $I_m(\alpha) \le n < I_{m+1}(\alpha) - 1$ *и* $t = n - I_m(\alpha)$. *Тогда*

*a) если* $\omega_m(\alpha) = 0$, *то разбиение* $T_n$ *состоит из интервалов* $G_i^m$, $t+1 \le i \le G_m(1-\alpha) - 1$ *разбиения* $\widetilde{CTil}_m(1-\alpha)$ *и интервалов* $G_i^{m+1}$, $0 \le i \le t$, $E_i^{m+1}$, $0 \le i \le E_m(1-\alpha) + t$ *разбиения* $\widetilde{CTil}_m(1-\alpha)$*;*

*b) если* $\omega_m(\alpha) = 1$, *то разбиение* $T_n$ *состоит из интервалов* $E_i^m$, $t+1 \le i \le E_m(1-\alpha) - 1$ *разбиения* $\widetilde{CTil}_m(1-\alpha)$ *и интервалов* $E_i^{m+1}$, $0 \le i \le t$, $G_i^{m+1}$, $0 \le i \le G_m(1-\alpha) + t$ *разбиения* $\widetilde{CTil}_m(1-\alpha)$.

Доказательство происходит непосредственной проверкой с использованием теоремы 3.1.

# 4 Графы перекладываний, графы Рози и форсинг

Пусть $X$ – метрическое пространство, $T : X = X_0 \sqcup \ldots \sqcup X_{d-1}$ - разбиение $X$ на непересекающиеся подмножества, $A : X \to X$ – отображение $X$ в себя. Рассмотрим ориентированный граф $Gr(A, T)$ с множеством вершин $V = (v_i)_{i=0}^{d-1}$, отвечающим множествам $X_i$. Вершины $v_i$ и $v_j$ соединены ориентированным ребром, идущим из $v_i$ в $v_j$ тогда и только тогда, когда $A(X_i) \cap X_j \neq \emptyset$. Граф $Gr(A, T)$ будем называть графом перекладываний разбиения $T$ под действием отображения $A$.

Лемма 4.1. *Имеет место изоморфизм*

$$R_n(u) \simeq Gr(R_\alpha, T_n). \tag{14}$$

Доказательство вытекает из определения графа перекладываний, леммы 2.4 и предложения 2.3.

Соответственно для описания графов Рози $R_n(u)$ достаточно описать графы перекладываний $Gr(R_\alpha, T_n)$.

Теорема 4.2. *Пусть* $n = I_m(\alpha) - 1$ *для некоторого* $m$. *Тогда*

*1) Если* $\omega_m(\alpha) = 0$, *то граф* $Gr(R_\alpha, T_n)$ *имеет вид*

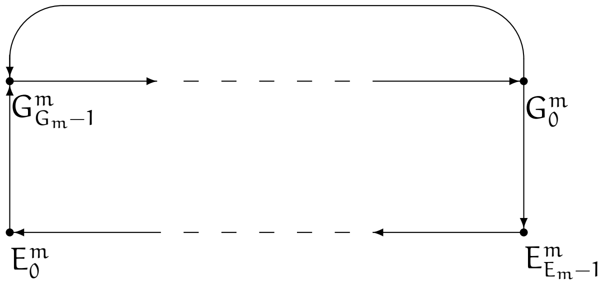


*Рис. 1.*

*2) Если же* $\omega_m(\alpha) = 1$, *то граф* $Gr(R_\alpha, T_n)$ *имеет вид*

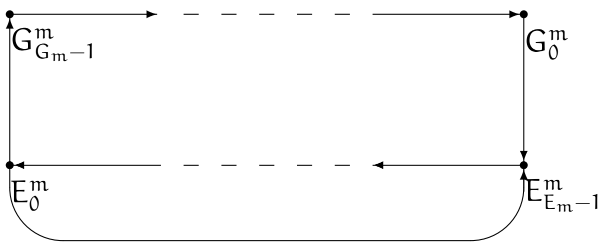


*Рис. 2.*

Теорема 4.3. *Пусть* $I_m(\alpha) \le n < I_{m+1}(\alpha) - 1$ *и* $t = n - I_m(\alpha)$. *Тогда*

*1) Если* $\omega_m(\alpha) = 0$, *то граф* $Gr(R_\alpha, T_n)$ *имеет вид*

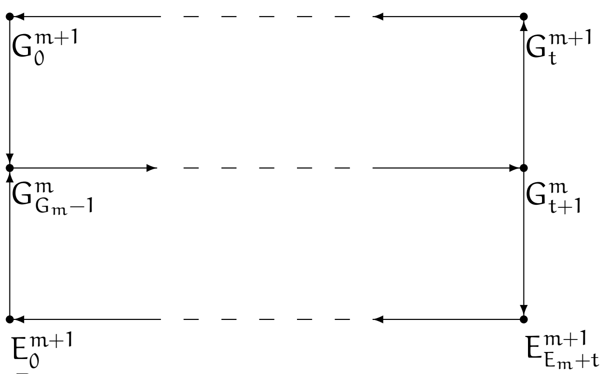


*Рис. 3.*

*или, эквивалентно, вид*

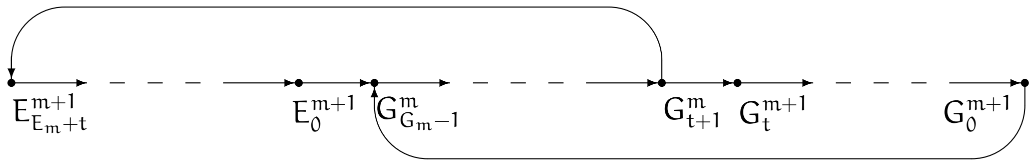


*Рис. 4.*

*2) Если же* $\omega_m(\alpha) = 1$*, то граф* $\mathsf{Gr}(R_\alpha, T_n)$ *имеет вид*

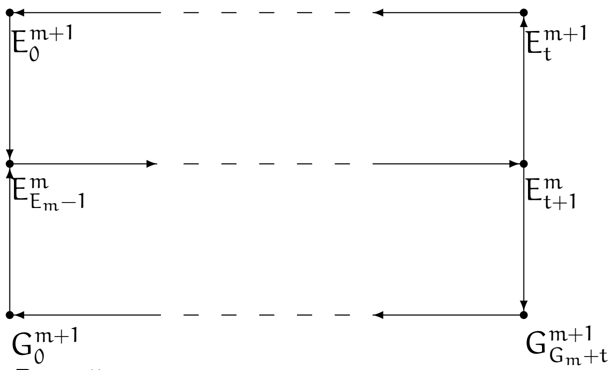


*Рис. 5.*

*или, эквивалентно, вид*

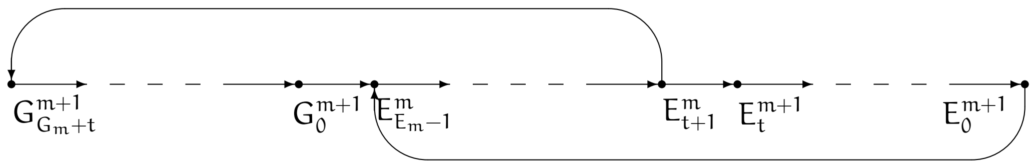


*Рис. 6.*

Доказательство теорем 4.2 и 4.3. Пусть $\omega_m(\alpha) = 0$. Тогда, в силу (7), $\omega_m(1-\alpha) = 1 - \omega_m(\alpha)$. Поэтому из теоремы 3.3 следует, что короткие интервалы разбиения $\widetilde{\mathsf{CTil}}_m(1-\alpha)$ имеют вид $E^m_i$, а длинные – вид $G^m_i$. Далее, из теоремы 3.1 непосредственным вычислением получаем, что

$$\begin{aligned} R_\alpha(E^m_i) &= E^m_{i-1}, \\ R_\alpha(G^m_i) &= G^m_{i-1} \end{aligned} \tag{15}$$

для всех $i > 0$. Отметим также формальное равенство

$$E^m_0 \oplus G^m_0 = G^m_{G_m} \oplus E^m_{E_m}. \tag{16}$$

Из (16) следует, что

$$R_\alpha(G^m_0) \oplus R_\alpha(E^m_0) = E^m_{E_m-1} \oplus G^m_{G_m-1}. \tag{17}$$

Учитывая, что $|E_i^m| < |G_i^m|$, из (17) находим, что

$$\begin{gathered} R_\alpha(E_0^m) \subseteq G_{G_m-1}^m, \\ R_\alpha(G_0^m) \cap G_{G_m-1}^m \neq \emptyset, \\ R_\alpha(G_0^m) \cap E_{E_m-1}^m \neq \emptyset. \end{gathered} \tag{18}$$

В случае, когда $n = I_m(\alpha)-1$ для некоторого $m$, формул (16) и (18) достаточно для определения вида графа $\mathrm{Gr}(R_\alpha, T_n)$.

Пусть теперь $I_m(\alpha) \le n < I_{m+1}(\alpha) - 1$ и $t = n - I_m(\alpha)$. Тогда остается вычислить $R_\alpha(G_0^{m+1})$, $R_\alpha(E_0^{m+1})$ и $R_\alpha(G_{t+1}^m)$. Из теоремы 3.2 следует, что $E_0^m = E_0^{m+1}$. Поэтому, учитывая (18), находим, что $R_\alpha(E_0^{m+1}) = R_\alpha(E_0^m) \subseteq G_{G_m-1}^m$. Из (16) следует, что $R_\alpha(G_{t+1}^m) = G_t^m$, а по теореме 3.2 $G_t^m = E_{E_m+t}^{m+1} \oplus G_t^{m+1}$. Поэтому $R_\alpha(G_{t+1}^m) \cap E_{E_m+t}^{m+1} \neq \emptyset$, и $R_\alpha(G_{t+1}^m) \cap G_t^{m+1} \neq \emptyset$. Для вычисления $R_\alpha(G_0^{m+1})$ заметим, что $E_0^m \oplus G_0^m = E_0^{m+1} \oplus E_{E_m}^{m+1} \oplus G_0^{m+1}$. Поэтому формулу (17) можно переписать в виде

$$R_\alpha(E_{E_m}^{m+1}) \oplus R_\alpha(G_0^{m+1}) \oplus R_\alpha(E_0^{m+1}) = E_{E_m-1}^m \oplus G_{G_m-1}^m.$$

Учитывая, что $E_{E_m-1}^m = E_{E_m-1}^{m+1}$, получаем, что $R_\alpha(G_0^{m+1}) \subseteq G_{G_m-1}^m$. На этом вычисление графа перекладываний для случая $\omega_m(\alpha) = 0$ закончено.

Случай $\omega_m(\alpha) = 1$ рассматривается полностью аналогично.

Теорема 4.4. *Пусть $n = I_m(\alpha) - 1$ для некоторого $m$. Тогда*
*1) Если $\omega_m(\alpha) = 0$, то*

$$\begin{gathered} \mathrm{force}(W(G_i^m)) = i, \\ \mathrm{force}(W(E_i^m)) = i + G_m(1-\alpha) = i + E_m(\alpha), \end{gathered} \tag{19}$$

*2) Если же $\omega_m(\alpha) = 1$, то*

$$\begin{gathered} \mathrm{force}(W(E_i^m)) = i, \\ \mathrm{force}(W(G_i^m)) = i + E_m(1-\alpha) = i + G_m(\alpha). \end{gathered} \tag{20}$$

Теорема 4.5. *Пусть $I_m(\alpha) \le n < I_{m+1}(\alpha) - 1$ и $t = n - I_m(\alpha)$. Тогда*
*1) Если $\omega_m(\alpha) = 0$, то*

$$\begin{gathered} \mathrm{force}(W(E_i^{m+1})) = i + G_m(1-\alpha) - t - 1, \\ \mathrm{force}(W(G_i^{m+1})) = i + G_m(1-\alpha) - t - 1, \\ \mathrm{force}(W(G_i^m)) = i - t - 1, \end{gathered} \tag{21}$$

*2) Если же $\omega_m(\alpha) = 1$, то*

$$\begin{gathered} \mathrm{force}(W(G_i^{m+1})) = i + E_m(1-\alpha) - t - 1, \\ \mathrm{force}(W(E_i^{m+1})) = i + E_m(1-\alpha) - t - 1, \\ \mathrm{force}(W(E_i^m)) = i - t - 1. \end{gathered} \tag{22}$$

Доказательство теорем 4.4 и 4.5 получается непосредственным вычислением при помощи графов Рози (рис. 1-6) по формуле (см. §1)

$$\mathsf{force}(W) = d(W, V_n^{(r)}). \tag{23}$$

Теорема 4.6. *Пусть* $I_m(\alpha) - 1 \le n < I_{m+1}(\alpha) - 1$. *Тогда справедливы равенства*

$$\mathsf{mforce}_n(u) = I_m(\alpha) - 1, \tag{24}$$

$$\overline{\mathsf{force}}_n(u) = \frac{s_m(\alpha)S_m(\alpha)I_m(\alpha) + L_m(\alpha) - 1}{2}. \tag{25}$$

Доказательство получается непосредственным вычислением по формулам (19)-(22).

Величины $L_m(\alpha)$, $S_m(\alpha)$, $I_m(\alpha)$ и $s_m(\alpha)$ могут быть выражены через параметры разложения $\alpha$ в цепную дробь [8]. Учитывая эти выражения, окончательный результат можно также записать в следующем виде.

Теорема 4.7. *Пусть разложение* $\alpha$ *в цепную дробь имеет вид* $\alpha = [0; q_1, q_2, \ldots)$, $(Q_i)_{i=1}^{\infty}$ *– последовательность знаменателей подходящих дробей к* $\alpha$ *и* $\|\cdot\|$ *– расстояние до ближайшего целого. Пусть* $i$ *и* $t$ *определены из представления*

$$n + 1 = (t+1)Q_i + Q_{i-1} + r, 0 \le t \le q_{i+1} - 1, 0 \le r \le q_i \tag{26}$$

(*такое разложение существует и единственно*). *Тогда справедливы формулы*

$$\mathsf{mforce}_n(u) = (t+1)Q_i + Q_{i-1} - 1, \tag{27}$$

$$\overline{\mathsf{force}}_n(u) = \frac{\|Q_i\alpha\|((t^2+t)Q_i^2 + (2t+1)Q_iQ_{i-1} + Q_{i-1}^2) + Q_i - 1}{2}. \tag{28}$$

# 5 Квазиштурмовы последовательности

Пусть $\alpha$ – иррационально и $h \in \mathbb{N}$. Определим последовательность $u^{(h)} = (u_n^{(h)})_{n=1}^{\infty}$ по правилу

$$u_n^{(h)} = \begin{cases} 0, & \langle x + n\alpha \rangle \in [0; \langle h\alpha \rangle) \\ 1, & \langle x + n\alpha \rangle \in [\langle h\alpha \rangle; 1) \end{cases} \tag{29}$$

для некоторого фиксированного $x$. Последовательности $u^{(h)}$ будем называть квазиштурмовыми.

Предложение 5.1. *Существует* $n_0(h)$ *такое, что для* $n \ge n_0(h)$ *справедливо равенство*

$$p_n(u^{(h)}) = n + h. \tag{30}$$

Доказательство получается из общей формулы для $p_n(u)$, где $u$ – произвольная геометрическая реализация динамической системы $(I^0, R_\alpha)$, доказанной в [1].

Предложение 5.2. *Пусть* $T_n^{(h)}$ *– разбиение* $I^0$ *точками* $\langle -i\alpha \rangle$, $-h \le i \le n$. *Тогда при* $n \ge n_0(h)$ *существует взаимно-однозначное соответствие между полуинтервалами разбиения* $T_n^{(h)}$ *и множествами* $I(W)$, $W \in L_n(u^{(h)})$.

Доказательство полностью аналогично доказательству предложекния 2.3.

Отметим, что имеет место равенство

$$T_n^{(h)} = R_{h\alpha}(T_{n+h}). \tag{31}$$

Имеет место следующая легко проверяемая лемма.

Лемма 5.3. *Пусть* $X$ *– метрическое пространство,* $T : X = X_0 \sqcup \ldots \sqcup X_{d-1}$ *– его разбиение,* $A : X \to X$ *и* $U : X \to X$ *– взаимно-однозначные непрерывные отображения* $X$ *на себя, причем* $A \circ U = U \circ A$. *Тогда*

$$U(T) : X = U(X_0) \sqcup \ldots \sqcup U(X_{d-1}),$$

*- также разбиение* $X$ *и имеет место изоморфизм графов перекладываний*

$$Gr(A, T) \simeq Gr(A, U(T)). \tag{32}$$

Из приведенных рассуждений вытекает следующий результат

Теорема 5.4. *Для произвольной квазиштурмовой последовательности* $u^{(h)}$ *и* $n \ge n_0(h)$ *имеет место изоморфизм графов Рози*

$$R_n(u^{(h)}) \simeq R_{n+h}(u). \tag{33}$$

Следствие 5.5. *Для произвольной квазиштурмовой последовательности* $u^{(h)}$ *и* $n \ge n_0(h)$ *выполняются равенства*

$$\mathrm{mforce}_n(u^{(h)}) = \mathrm{mforce}_{n+h}(u), \tag{34}$$

$$\overline{\mathrm{force}}_n(u^{(h)}) = \overline{\mathrm{force}}_{n+h}(u). \tag{35}$$

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Alessandri P. Codages de rotations et basses complexites // Universite Aix-Marseille II, These, 1996.

[2] Alessandri P., Berthe V. Three distance theorem and combinatorics on words // Enseig. Math. 1998. V. 44. P. 103–132

[3] Queffelec M. Substitution dynamical systems – spectral analysis. Springer. 1987.

[4] Pytheas Fogg N. Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics. Springer. 2001. 402 p.

[5] Rauzy G. Suites a termes dans un alphabet fini // Sem. de Theorie des Nombres de Bordeaux. 1983. 25-01 – 25-16.

[6] Van Ravenstein T. The three gap theorem (Steinhaus conjecture) // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1988. V. 45. P. 360–370.

[7] Shutov A. V. New estimates in the Hecke-Kesten problem // Anal. Probab. Methods Number Theory. Edited by E.Manstavičisus et al. Vilnius:TEV. 2007.

[8] Шутов А. В. Обобщенные разбиения Фибоначчи и их приложения к теории чисел. Дис. канд. физ.-мат. наук // Владимир, ВГПУ, 2005.

[9] Шутов А. В. Теорема о трех длинах // Сборник трудов молодых ученых ВГПУ. Владимир: Изд. "Нерль". 2005. Вып. 5. С. 156.

[10] Шутов А. В. Системы счисления и множества ограниченного остатка // Сборник трудов конференции "Аналитические и комбинаторные методы в теории чисел"(в печати).

Владимирский Государственный Педагогический Университет.
Получено 25.10.2007.
*E-mail: shutov@vgpu.vladimir.ru*