

ФОРМУЛЫ ГРИНА И БИЛИНЕЙНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

В. В. Жаринов, Н. Г. Марчук

Формула Грина используется для изучения краевых задач математической физики, получения априорных оценок, построения законов сохранения. Здесь предлагается естественное обобщение этой формулы.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $\partial = (\partial_1, \dots, \partial_m) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right)$; P — линейный дифференциальный оператор, действующий на g -мерные вектор-функции $u = u(x)$; P^* — оператор формально сопряженный к P , действующий на h -мерные вектор-функции $v = v(x)$,

$$Pu = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq n} P_\alpha \partial^\alpha u,$$

$$P^*v = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq n} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (P_\alpha^* v),$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_m^{\alpha_m}$; P_α — комплексные матрицы, имеющие h строк и g столбцов ¹⁾ с элементами, зависящими от x ; P_α^* — матрицы, эрмитово сопряженные к матрицам P_α . Здесь и всюду ниже функции и коэффициенты операторов предполагаются гладкими, т. е. класса C^∞ .

Мы также полагаем $(a, b) = (\overline{b}, a) = \sum_{i=1}^m a_i b_i$.

Получены условия на линейные дифференциальные операторы L, M (L размера $t \times g$, а M размера $t \times h$)

¹⁾ В этом случае будем говорить, что оператор P имеет размер $h \times g$.

при выполнении которых билинейная форма (Lu, Mv) от u, v и их производных представляется в виде дивергенции

$$(Lu, Mv) = \sum_{i=1}^m \partial_i J^i [u, v], \quad (1)$$

где $J^i [u, v]$ — билинейные формы от u, v и их производных до некоторого порядка. Представление (1) должно быть справедливо при любых гладких вектор-функциях u, v . Формулы вида (1) будем называть формулами Грина.

ЛЕММА 1. Пусть F — линейный дифференциальный оператор. Представление

$$(u, Fv) = \sum_{i=1}^m \partial_i J^i [u, v]$$

имеет место для всех гладких вектор-функций u, v тогда и только тогда, когда $F = 0$.

Доказательство. Пусть формула имеет место и при этом для некоторой точки $x^0 \in \mathbb{R}^m$, $\operatorname{Re} (Fv)_1 (x^0) > 0$, где $(Fv)_1$ есть первая компонента вектора Fv . Тогда по непрерывности будем иметь $\operatorname{Re} (Fv)_1 (x) > 0$ для всех x из некоторого шара $U(x^0, \rho)$ радиуса ρ с центром в точке x^0 . Пусть $u_1 = u_1(x)$ — гладкая скалярная неотрицательная функция с носителем в шаре $\bar{U}(x^0, \rho')$, где $0 < \rho' < \rho$, причём $u_1(x^0) > 0$. Тогда, положив $u = (u_1, 0, \dots, 0)$, по формуле Гаусса—Остроградского будем иметь

$$0 < \int_{U(x^0, \rho)} \operatorname{Re} (u, Fv) dx = \int_{S(x^0, \rho)} \sum_{i=1}^m \operatorname{Re} (J^i [v, u]) d\sigma_i = 0.$$

Полученное противоречие показывает, что $Fv = 0$. Обратное утверждение очевидно.

ЛЕММА 2 [1, 2]. Для всякого линейного дифференциального оператора

$$P = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq n} P_\alpha \partial^\alpha$$

справедлива формула Грина

$$(Pu, v) - (u, P^*v) = \sum_{i=1}^m \partial_i W^i [u, v], \quad (2)$$

где

$$W^i [u, v] = \sum_{0 \leq |\alpha + \beta| \leq n-1} (-1)^{|\alpha|} M(\alpha, \beta, i) (\partial^\beta u, \partial^\alpha P_{\alpha + \beta + (i)}^* v),$$

$$M(\alpha, \beta, i) = c(\alpha) c(\beta) / c(\alpha + \beta + (i)),$$

$$c(\alpha) = |\alpha|! / \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

Через (i) обозначен мультииндекс, у которого на i -м месте стоит единица, а на остальных местах — нули.

ТЕОРЕМА. Пусть L, M — линейные дифференциальные операторы размера $t \times g$ и $t \times h$ соответственно. Представление

$$(Lu, Mv) = \sum_{i=1}^m \partial_i J^i [u, v]$$

имеет место для всех гладких вектор-функций u, v тогда и только тогда, когда $L^*M = 0$. В последнем случае можно положить $J^i [u, v] = W^i [u, Mv]$, где W^i определены в лемме 2.

Доказательство. Согласно лемме 2 имеется тождество

$$(Lu, Mv) - (u, L^*Mv) = \sum_{i=1}^m \partial_i W^i [u, Mv],$$

так что условие $L^*M = 0$ влечет требуемое представление. С другой стороны, пусть представление имеет место. Тогда

$$(u, L^*Mv) = \sum_{i=1}^m \partial_i (J^i [u, v] - W^i [u, Mv])$$

для всех гладких вектор-функций u, v . В силу леммы 1 отсюда следует, что $L^*M = 0$, что и требовалось доказать.

Пример 1. Пусть $\Delta = \sum_{i=1}^m \partial_i^2$ — оператор Лапласа, а u, v есть g -мерные вектор-функции. Если положить

$$L = \begin{bmatrix} I_g \Delta \\ I_g \partial_1 \\ \dots \\ I_g \partial_m \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} I_g \\ I_g \partial_1 \\ \dots \\ I_g \partial_m \end{bmatrix},$$

I — единичная $g \times g$ -матрица, то $L^*M = 0$ и будем иметь первую формулу Грина для оператора Лапласа

$$(Lu, Mv) = (\Delta u, v) + \sum_{i=1}^m (\partial_i u, \partial_i v) = \sum_{i=1}^m \partial_i (\partial_i u, v).$$

Если положить

$$L = \begin{bmatrix} I_g \Delta \\ -I_g \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} I_g \\ I_g \Delta \end{bmatrix},$$

то опять $L^*M = 0$ и получим вторую формулу Грина для оператора Лапласа

$$(Lu, Mv) = (\Delta u, v) - (u, \Delta v) = \sum_{i=1}^m \partial_i [(\partial_i u, v) - (u, \partial_i v)].$$

Пример 2. Если линейные дифференциальные операторы P, Q одинакового размера $h \times g$ удовлетворяют тождеству $P^*Q + Q^*P = 0$, то, в силу теоремы, операторы $L = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix}$ порождают формулу Грина

$$(Lu, Mv) = (Pu, Qv) + (Qu, Pv) = \sum_{i=1}^m \partial_i J^i [u, v].$$

Такие формулы Грина рассматривались в [3].

Если $P = \square = \partial_0^2 - \sum_{i=1}^m \partial_i^2$ — волновой оператор, а $Q = \partial_0$, то при $u = v$ получаем формулу

$$\begin{aligned} (\square u, \partial_0 u) + (\partial_0 u, \square u) &= \\ &= \partial_0 (\sum_{i=0}^m |\partial_i u|^2) + \sum_{i=1}^m \partial_i [-(\partial_0 u, \partial_i u) - \text{к.с.}], \end{aligned}$$

из которой следует известный интеграл энергии для волнового уравнения.

Пример 3. Если оператор P размера $h \times g$ представляется в виде

$$P = Q_1 P_1 + \dots + Q_k P_k$$

(операторы P_i имеют размеры $t_i \times g$, а операторы Q_i размеры $h \times t_i$, то для операторов

$$L = \begin{bmatrix} P \\ P_1 \\ \dots \\ P_k \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} -I_h \\ Q_1^* \\ \dots \\ Q_k^* \end{bmatrix}$$

справедливо равенство L^*M и поэтому выражение (Lu, Mv) представляется в виде дивергенции. В частности, отсюда при

$$L = \begin{bmatrix} P \\ I_g \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} -I_h \\ P^* \end{bmatrix}$$

получается формула Грина (2).

Для самосопряженного оператора линейной теории упругости

$$P = I_3 (\rho \partial_0^2 - \mu \partial_1^2 - \mu \partial_2^2 - \mu \partial_3^2) - (\lambda + \mu) \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{bmatrix} [\partial_1 \partial_2 \partial_3],$$

взяв

$$L = \begin{bmatrix} P \\ I_3 \\ \partial_1 \partial_2 \partial_3 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} -I_3 \\ I_3 (\rho \partial_0^2 - \mu \partial_1^2 - \mu \partial_2^2 - \mu \partial_3^2) \\ (\lambda + \mu) \partial_1 \quad (\lambda + \mu) \partial_2 \quad (\lambda + \mu) \partial_3 \end{bmatrix},$$

будем иметь $L^*M = 0$, и выражение (Lu, Mv) представляется в виде дивергенции.

Отметим, что формула (2), в которой P есть оператор линейной теории упругости, называется второй формулой Бетти. С помощью нашей теоремы можно получить и первую формулу Бетти.

Пример 4. При

$$L = \begin{bmatrix} 0 & \partial_3 & -\partial_2 \\ -\partial_3 & 0 & \partial_1 \\ \partial_2 & -\partial_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{bmatrix}$$

имеем $L^*M = 0$ (это запись известной формулы $\text{rot grad} = 0$) и поэтому в виде дивергенции представляется выражение

$$\begin{aligned} (Lu, Mv) &= \left(\begin{bmatrix} 0 & \partial_3 & -\partial_2 \\ -\partial_3 & 0 & \partial_1 \\ \partial_2 & -\partial_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{bmatrix} v \right) = \\ &= \partial_1 [v(\partial_3 u_1 - \partial_2 u_3)] + \partial_2 [v(-\partial_3 u_1 + \partial_1 u_3)] + \\ &\quad + \partial_3 [v(\partial_2 u_1 - \partial_1 u_2)]. \end{aligned}$$

Если вектор-функции u, v удовлетворяют билинейному уравнению

$$(Lu, Mv) = 0, \quad (3)$$

в котором L, M — линейные дифференциальные операторы размера $t \times g$ и $t \times h$ соответственно, удовлетворяющие равенству $L^*M = 0$, то, в силу теоремы, существуют билинейные формы $J^i [u, v]$, для которых

$$\sum_{i=1}^m \partial_i J^i [u, v] = 0. \quad (4)$$

Это равенство будем называть билинейным законом сохранения, соответствующим условию (3). В частности, чтобы найти билинейные законы сохранения, соответствующие заданным условиям вида $Ru = 0, Sv = 0$, где R, S — линейные дифференциальные операторы, надо подобрать операторы Y, Z , удовлетворяющие равенству $R^*Y + Z^*S = 0$, и если такие дифференциальные операторы удастся найти, то, взяв

$$L = \begin{bmatrix} R \\ Z \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} Y \\ S \end{bmatrix},$$

будем иметь $L^*M = 0$ и, значит,

$$(Lu, Mv) = (Ru, Yv) + (Zu, Sv) = \sum_{i=1}^m \partial_i J^i [u, v] = 0.$$

Пример 5. Пусть u есть g -мерная, а v есть h -мерная вектор-функция, $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2$.

а) Если $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$, то, взяв $Y = a_1 \partial_1 + a_2 \partial_2 + a$, $Z = a_1^* \partial_1 + a_2^* \partial_2 - a^*$, где a_1, a_2, a — постоянные матрицы размера $g \times h$, будем иметь $\Delta Y + Z^* \Delta = 0$, и

$$(\Delta u, a_1 \partial_1 v + a_2 \partial_2 v + av) + (a_1^* \partial_1 u + a_2^* \partial_2 u - a^* u, \Delta v) =$$

$$= \partial_1 [(\partial_1 u, a_1 \partial_1 v + a_2 \partial_2 v + av) + (\partial_2 u, a_2 \partial_1 v - a_1 \partial_2 v) -$$

$$- (u, a \partial_1 v)] + \partial_2 [(\partial_1 u, a_1 \partial_2 v - a_2 \partial_1 v) +$$

$$+ (\partial_2 u, a_1 \partial_1 v + a_2 \partial_2 v + av) - (u, a \partial_2 v)] = 0.$$

б) Если $\Delta u = 0$, $(\partial_1 + i \partial_2) v = 0$, где u, v есть g -мерные вектор-функции, то, взяв $Y = 1$, $Z = \partial_1 + i \partial_2$, будем иметь $\Delta Y + Z^* (\partial_1 + i \partial_2) = 0$ и

$$(\Delta, u, v) + (\partial_1 u + i \partial_2 u, \partial_1 v + i \partial_2 v) = \partial_1 [(\partial_1 u, v) -$$

$$- i (u, \partial_2 v) + \partial_2 [(\partial_2 u, v) + i (u, \partial_1 v)] = 0.$$

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило
13.03.85

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Владимиров В. С., Жаринов В. В. Замкнутые формы, ассоциированные с линейными дифференциальными операторами // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 5. С. 845—867.
- [2] Михлин С. Г. Линейные уравнения с частными производными. М.: Высшая школа, 1977.
- [3] Марчук Н. Г. Широкий класс формул Грина и законов сохранения // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285, № 6. С. 1325—1328