В. В. Блудов, О пополнении линейно упорядоченных групп,
Алгебра и логика, 2005, том 44, номер 6, 664–681

Алгебра и логика, 44, № 6 (2005), 664—681

УДК 512.54

О ПОПОЛНЕНИИ ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУПП*)

В. В. БЛУДОВ

Моему учителю А. И. Кокорину

Введение

Вопрос о вложении линейно упорядоченных групп (л. у. групп) и, в частности, упорядочиваемых групп в полные линейно упорядоченные (упорядочиваемые) группы, известный как вопрос Мальцева–Неймана, оставался открытым более полувека. Здесь под полной группой понимается группа, полная относительно делимости, т. е. такая, что для любых элемента $g \in G$ и натурального $n > 1$ существует $x \in G$ с условием $x^n = g$; в этом случае также говорят, что из каждого элемента группы извлекаются корни любой степени n. Хорошо известны следующие вопросы о пополнении л. у. групп и связанные с ними проблемы.

Q.1 [1, пробл. 1; 2, гл. 11, пробл. 1]. Всякая ли л. у. группа может быть вложена в полную л. у. группу?

Q.2 [3, пробл. 10; 2, гл. 11, пробл. 2]. Можно ли упорядочиваемую (разрешимую) группу вложить в полную упорядочиваемую группу?

Q.3 [3, пробл. 11]. Группа G называется *G-полной*, если в ней разрешимо уравнение $x^{g_1+\ldots+g_n} = a$ для любых g_i, $a \in G$. Можно ли любую упорядочиваемую группу G вложить в G-полную упорядочиваемую

*)Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 96-01-00358, № 99-01-00335, № 03-01-00320.

группу G^* (непосредственная проверка показывает, что полная локально нильпотентная группа G всегда G-полна)?

Q.4 [2, гл. 11, пробл. 3; 4, вопр. 5.4 и 11.68]. Всякая ли л. у. группа может быть вложена в такую л. у. группу, в которой любые два строго положительных элемента сопряжены?

Q.5 [3, пробл. 16]. Вкладывается ли л. у. тело в такое л. у. тело, мультипликативная группа положительных элементов которого полна?

Q.6 [3, пробл. 12]. Пусть G — упорядочиваемая группа, $a \in G$. Когда G может быть погружена в упорядочиваемую группу H, содержащую такой элемент x, что $x^2 = a$? В каком случае присущий G линейный порядок может быть распространен на H?

Q.7 [3, пробл. 15]. Построить аналог теории Артина–Шрейера формально вещественных полей для л. у. тел.

Всякая абстрактная группа вкладывается в полную группу ([5], см. также [6, теор. 3.4]). Первый шаг в решении вопроса о пополнении л. у. групп состоял в доказательстве теоремы о вложении нильпотентных групп без кручения в полные нильпотентные группы без кручения [7]. Следующим шагом была теорема о пополнении центра упорядоченной группы [8]. Затем была доказана теорема о вложении упорядочиваемых метабелевых групп в полные упорядочиваемые метабелевые группы [9]. При этом вопрос о продолжении любого порядка исходной группы на её пополнение оставался открытым. Далее была получена теорема о вложении л. у. группы в л. у. группу с полной нормальной абелевой подгруппой [10]. Эта теорема была обобщена на случай нормальных локально нильпотентных подгрупп [11]. Наконец, была доказана теорема о вложении линейно упорядоченных метабелевых групп в полные линейно упорядоченные метабелевые группы [12]. Тем самым были закрыты вопросы, поставленные в [9].

В данной работе даются отрицательные ответы на вопросы Q.1–Q.3 (теор. 3.2 и 3.4, след. 3.5). Строятся три примера разрешимых (центрально-метабелевых) л. у. групп, которые не вкладываются ни в какие полные упорядочиваемые группы (прим. 2.1 и 2.3). Это указывает на ограниченные возможности для пополнения л. у. групп в классах более широких, чем метабелевые или нильпотентные группы. Однако не исключена возможность положительного решения вопроса пополнения для л. у. групп из многообразия $\mathfrak{N}_k\mathfrak{A}\bigcap\mathfrak{A}\mathfrak{N}_c$ — пересечения многообразия групп с нильпотентным коммутантом и многообразия нильпотентных расширений абелевых групп. При этом остаётся открытым вопрос о пополнении л. у. групп из многообразия $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_c$.

Отметим также, что приведённые в работе примеры являются модификациями примера, анонсированного автором [13, 14], и уточняют ситуацию с пополнением линейно упорядоченных групп. В примере 2.2 указывается доупорядочиваемая группа, не вложимая в полные упорядочиваемые группы, что представляет интерес, поскольку нильпотентные и метабелевые группы, для которых вопросы пополнения решены положительно, являются доупорядочиваемыми. В примере 2.3 строится л. у. группа с центральной системой выпуклых подгрупп, не вложимая в полные упорядочиваемые группы. Вопрос о пополнении таких групп возник после появления работы [15].

Отрицательные ответы на вопросы пополнения л. у. групп приводят к отрицательным ответам на смежные вопросы: следствие 3.7 даёт отрицательный ответ на вопрос Q.4, а теорема 3.6 — отрицательный ответ на вопрос Q.5. Приведённые в работе примеры показывают, что извлечение квадратных корней в л. у. группах в общем случае невозможно. Необходимые и достаточные условия, при которых возможно извлечение квадратных корней в л. у. группах, неизвестны, но одно необходимое условие для вложения л. у. группы в л. у. группу, содержащую решение уравнения $x^n = g$, приводится в предложении 3.3, что даёт частичный ответ на вопрос Q.6. Отрицательное решение вопроса вложения л. у. тел в л. у. тела, в которых из каждого положительного элемента извлекается квадратный корень, приводит к невозможности построения теории линейно упорядоченных тел по аналогии с теорией Артина–Шрейера формально вещественных полей. Это связано с тем, что возможность вложения л. у. полей в л. у. поля, у которых из каждого положительного элемента извлекается квадратный корень, является одним из основных моментов в теории Артина–Шрейера [16] (см. также [17, § 81]). Тем самым вопрос Q.7 также решается отрицательно.

§ 1. Предварительные сведения и обозначения

В работе используются стандартные обозначения и определения, которые можно найти в книгах [2, 3, 6, 17–19]. Напомним некоторые из них.

Через $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^+$ обозначаются множества натуральных, целых и целых положительных чисел, соответственно.

Подгруппа H группы G называется *изолированной*, если из $g^n \in H$, $n \in \mathbb{N}$, $g \in G$, следует $g \in H$. Наименьшая изолированная подгруппа группы G, содержащая H, называется *изолятором* H в группе G и обозначается $\mathrm{I}(H)$. Изолятор H является пересечением всех изолированных подгрупп, содержащих H. Также $\mathrm{I}(H) = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \mathrm{I}_k(H)$, где $\mathrm{I}_0(H) = H$, $\mathrm{I}_{k+1}(H)$ — подгруппа, порождённая $\mathrm{I}_k(H)$ и всеми такими элементами $g \in G$, для которых $g^n \in \mathrm{I}_k(H)$ при $n \neq 0$. Обобщением для изолированной подгруппы является *строго изолированная* подгруппа H, в которой из $g^{1+x_1+\ldots+x_n} \in H$, $g, x_1, \ldots, x_n \in G$ следует $g \in H$.

Группа с однозначным извлечением корней называется *R-группой*, а группа, в которой $g^{1+h_1+\ldots+h_n} = 1$ влечет $g = 1$, называется *R^*-группой* или *группой со строго изолированной единицей*. Всякая упорядочиваемая группа является R^*-группой. Обратное в общем случае неверно, но остаётся справедливым для центрально-метабелевых групп [19].

Каждый элемент g л. у. группы G определяет *скачок* $H_g \prec H(g)$ в системе выпуклых подгрупп. Здесь H_g — это объединение всех выпуклых подгрупп, не содержащих g, а $H(g)$ — пересечение всех выпуклых подгрупп, содержащих g. Если H_g — нормальная подгруппа группы G, то скачок $H_g \prec H(g)$ называется *нормальным*. В этом случае подгруппа $H(g)$ также нормальна. Нормальный скачок $H_g \prec H(g)$ называется *центральным*, если подгруппа $H(g)/H_g$ лежит в центре группы G/H_g. Последнее условие равносильно тому, что $|[g, x]| \ll \min\{|g|, |x|\}$ для любого $x \in G$.

Система выпуклых подгрупп л. у. группы называется *центральной*, если каждый её скачок является центральным.

Порядковый гомоморфизм л. у. групп — это групповой гомоморфизм, сохраняющий линейный порядок на группах.

В приведённой ниже лемме группа G^* может быть построена как HNN-расширение [20; 6, гл. IV] исходной группы с помощью порядкового мономорфизма φ или с помощью конструкции вложения упорядоченных модулей [3, гл. V, § 3, теор. 1]. Однако HNN-расширения в общем случае не сохраняют линейный порядок, поэтому здесь приводится доказательство с использованием ультрапроизведений, с нашей точки зрения, более наглядное.

ЛЕММА 1.1. *Если $\varphi : G \to G$ — порядковый мономорфизм л. у. группы G, то существует порядковое вложение ε_0 группы G в л. у. группу G^*, допускающую порядковый автоморфизм ψ, сужение которого на G^{ε_0} совпадает с действием φ на группе G. При этом G^* является объединением возрастающей последовательности л. у. групп $G^{\varepsilon_0\psi^{-n}}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, порядково изоморфных группе G.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим ультрастепень $U = \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} G_i/\mathcal{U}$, где G_i — изоморфные копии группы G, а $\mathcal{U}$ — неглавный ультрафильтр на множестве натуральных чисел. Линейный порядок группы G переносится на ультрастепень U: $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}/\mathcal{U} \geq 1 \Leftrightarrow \{i \mid g_i \geq 1\} \in \mathcal{U}$. Отметим также, что порядковый мономорфизм φ группы G, применённый покоординатно к элементам группы U, определяет порядковый мономорфизм ψ ультрастепени: если $\bar{g} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}/\mathcal{U} \in U$, то $\bar{g}^\psi = \{g_i^\varphi\}_{i\in\mathbb{N}}/\mathcal{U}$. Поскольку φ — порядковый мономорфизм группы G, то для каждого $k \in \mathbb{Z}^+$ отображения $\varepsilon_k : G \to U$, определённые по правилу $g^{\varepsilon_k} = \{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}/\mathcal{U}$, где $h_i = g^{\varphi^{i-k}}$ при $i \geqslant k$ и $h_i = 1$ при $i < k$, являются сохраняющими порядок вложениями л. у. группы G в л. у. группу U. Положим $G_k = G^{\varepsilon_k}$. В этом случае $G_k \leq G_{k+1}$ для всех $k \geqslant 0$. При $k \geqslant 1$ по построению имеем $G_k^\psi = G_{k-1}$, и из свойств ультрапроизведений следует, что ψ — порядковый автоморфизм группы $G^* = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} G_k$. Кроме того, $G^{\varepsilon_0\psi} = G_0^\psi = G^{\varphi\varepsilon_0}$. $\square$

§ 2. Примеры

В этом параграфе приводятся примеры л. у. групп, для которых не существует вложений в полные упорядочиваемые группы. Группа из примера 2.1 не вкладывается ни в какую полную R^*-группу, группа из примера 2.2 доупорядочиваема, группа из примера 2.3 является группой с центральной системой выпуклых подгрупп.

ПРИМЕР 2.1. Зафиксируем натуральное $n \geqslant 2$ и обозначим через H_n двуступенно нильпотентную группу, заданную порождающими h_i, $i \in \mathbb{Z}$, и определяющими соотношениями

$$[h_i, h_j, h_k] = 1, \quad i, j, k \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

$$[h_{i+k}, h_{j+k}] = [h_i, h_j], \quad i, j, k \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

$$\left[\prod_{k=0}^{n} h_{i+k}^{\binom{n}{k}}, \prod_{k=0}^{n} h_k^{\binom{n}{k}}\right] = [h_i, h_0], \quad i \geqslant 1, \tag{3}$$

$$[h_i, h_0] = 1, \quad 2 \leqslant i \leqslant n. \tag{4}$$

В (3) через $\binom{n}{k}$ обозначаются биномиальные коэффициенты $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Как следует из соотношений (1)–(4), группа H_n является фактор-группой свободной двуступенно нильпотентной группы N с множеством свободных порождающих h_i, $i \in \mathbb{Z}$, по центральной подгруппе, в соответствии с соотношениями (2)–(4).

В группе N элементы $[h_i, h_j]$ при $i > j$ образуют базис центра $\zeta(N)$ как свободной абелевой группы. Соотношения (2) позволяют выразить элементы $[h_i, h_j]$ при $j \neq 0$ через элементы $c_{i-j} = [h_{i-j}, h_0]$. Исключим из базиса элементы $[h_i, h_j]$, заменив их элементами c_{i-j} и исключив при этом соотношения (2) в представлении подгруппы $\zeta(N)$. Затем исключим соотношения (4), одновременно исключив из базиса элементы c_k при $2 \leqslant k \leqslant n$. И, наконец, исключим соотношения (3), исключив из базиса элементы c_k при $k \geqslant n+1$. Это возможно, поскольку левые части соотношений (3) для каждого фиксированного i представляют собой произведение коммутаторов c_j, где j меняется от нуля до $n+i$ и коммутатор c_{n+i} входит в соотношение с показателем 1. Пользуясь комбинаторными формулами, можно получить явный вид выражения коммутаторов c_i через коммутаторы с меньшими номерами:

$$c_i = c_{i-n} \cdot \left(\prod_{j=0}^{2n-1} c_{i-2n+j}^{\binom{2n}{j}} \right)^{-1}, \ i \geqslant n+1.$$

Здесь $c_t = [h_t, h_0]$ для любых $t \in \mathbb{Z}$. При этом $c_0 = 1$, $c_{-t} = c_t^{-1}$. Таким образом, $\zeta(H_n) = C_n = \langle c_1 \rangle$ — свободная абелева группа ранга 1, а H_n/C_n — свободная абелева группа бесконечного ранга с базисом h_i, $i \in \mathbb{Z}$.

Группа N как свободная нильпотентная группа допускает автоморфизм $d : N \to N$, заданный на порождающих по правилу

$$h_i^d = h_{i+1}, \ i \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Проверим, что автоморфизм d индуцирует автоморфизм группы H_n, который обозначим тем же символом d. Для этого достаточно проверить, что соотношения (1)–(4) сохраняются под действием отображения d. Соотношения (1) сохраняются, поскольку H_n трёхступенно нильпотентна. Проверим соотношения (2)–(4). Имеем

$$[h_i, h_j]^d = [h_{i+1}, h_{j+1}] = [h_i, h_j], \ i, j \in \mathbb{Z},$$

откуда следует, что все элементы $[h_i, h_j]$, $i, j \in \mathbb{Z}$, неподвижны относительно отображения d. Поэтому все соотношения, записанные через $[h_i, h_j]$, в частности, соотношения (2)–(4), сохраняются под действием d и, следовательно, d является автоморфизмом группы H_n.

Обозначим через K_n полупрямое произведение $H_n \rtimes \langle d \rangle$ в соответствии с автоморфизмом d, определённым в (5). Применим m раз автоморфизм d к соотношениям (3), при этом получим

$$\left[\prod_{k=0}^{n} h_{i+k+m}^{\binom{n}{k}}, \prod_{k=0}^{n} h_{k+m}^{\binom{n}{k}} \right] = [h_{i+m}, h_m] \ \ i, m \in \mathbb{Z}, \ i \geqslant 1. \tag{6}$$

Из определения автоморфизма d в фактор-группе K_n/C_n выполняется равенство

$$\left(\prod_{k=0}^{n} h_{i+k}^{\binom{n}{k}} \right) C_n = h_i^{(1+d)^n} C_n, \ i \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Положим

$$h_i^{\alpha} = h_i^{1+d}, \ i \in \mathbb{Z}.$$

Индукцией по k выведем из соотношений (3), (6), (7) соотношения

$$[h_i^{\alpha^{n+k}}, h_0^{\alpha^{n+k}}] = [h_i^{\alpha^k}, h_0^{\alpha^k}], \ i, k \geqslant 1. \tag{8}$$

При $k = 0$ соотношение (8) принимает вид (3). Далее,

$$\begin{aligned}
[h_i^{\alpha^{n+k+1}}, h_0^{\alpha^{n+k+1}}] &= [h_i^{\alpha^{n+k}d} h_i^{\alpha^{n+k}}, h_0^{\alpha^{n+k}d} h_0^{\alpha^{n+k}}] \\
&= [h_{i+1}^{\alpha^{n+k}} h_i^{\alpha^{n+k}}, h_1^{\alpha^{n+k}} h_0^{\alpha^{n+k}}] \\
&= [h_{i+1}^{\alpha^{n+k}}, h_1^{\alpha^{n+k}}] \cdot [h_{i+1}^{\alpha^{n+k}}, h_0^{\alpha^{n+k}}] \cdot [h_i^{\alpha^{n+k}}, h_1^{\alpha^{n+k}}] \\
&\quad \cdot [h_i^{\alpha^{n+k}}, h_0^{\alpha^{n+k}}] \\
&= [h_{i+1}^{\alpha^k}, h_1^{\alpha^k}] \cdot [h_{i+1}^{\alpha^k}, h_0^{\alpha^k}] \cdot [h_i^{\alpha^k}, h_1^{\alpha^k}] \cdot [h_i^{\alpha^k}, h_0^{\alpha^k}].
\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
[h_i^{\alpha^{k+1}}, h_0^{\alpha^{k+1}}] &= [h_i^{\alpha^k d} h_i^{\alpha^k}, h_0^{\alpha^k d} h_0^{\alpha^k}] = [h_{i+1}^{\alpha^k} h_i^{\alpha^k}, h_1^{\alpha^k} h_0^{\alpha^k}] \\
&= [h_{i+1}^{\alpha^k}, h_1^{\alpha^k}] \cdot [h_{i+1}^{\alpha^k}, h_0^{\alpha^k}] \cdot [h_i^{\alpha^k}, h_1^{\alpha^k}] \cdot [h_i^{\alpha^k}, h_0^{\alpha^k}]
\end{aligned}$$

и соотношения (8) справедливы.

В силу (5) выполняется $K_n/C_n \cong \langle h_0 \rangle \wr \langle d \rangle$, т. е. группа K_n упорядочиваема. По (6) имеем $C_n = \zeta(K_n)$, и значит, K_n является центрально-метабелевой группой с циклическим центром.

Определим на порождающих группы K_n отображение a:

$$d^a = d, \ h_i^a = h_i^{\alpha^n}, \ i \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

Проверим, что a продолжается до эндоморфизма группы K_n. Для этого достаточно убедиться, что определяющие соотношения (1)–(5) устойчивы относительно отображения a. Проверка (1) и (5) не вызывает сомнений. Проверим соотношения (2)–(4). Имеем:

$$\begin{aligned}
[h_{i+k}, h_{q+k}]^a &= [h_{i+k}^a, h_{q+k}^a] = [h_{i+k}^{\alpha^n}, h_{q+k}^{\alpha^n}] = [h_i^{d^k \alpha^n}, h_q^{d^k \alpha^n}] \\
&= [h_i^{\alpha^n}, h_q^{\alpha^n}]^{d^k} = [h_i^{\alpha^n}, h_q^{\alpha^n}] = [h_i^a, h_q^a] = [h_i, h_q]^a
\end{aligned}$$

и соотношения (2) сохраняются. Для проверки (3), (4) воспользуемся соотношениями (8) при $k = n$:

$$[h_i^{\alpha^n}, h_0^{\alpha^n}]^a = [h_i^{\alpha^{2n}}, h_0^{\alpha^{2n}}] = [h_i, h_0], \ [h_i, h_0]^a = [h_i^{\alpha^n}, h_0^{\alpha^n}] = [h_i, h_0] = 1,$$

где $2 \leqslant i \leqslant n$. Таким образом, отображение a не меняет вид соотношений (3), (4) и, следовательно, a продолжается до эндоморфизма группы K_n. Из формул (9) следует, что элементы g и g^a имеют одинаковый старший показатель, поэтому a является порядковым мономорфизмом группы K_n. Из (3), (7) и (9) следует

$$c_1^a = c_1. \tag{10}$$

Зафиксируем на группе K_n линейный порядок. По построению эндоморфизм a взаимно однозначен и сохраняет любой линейный порядок группы K_n. Используя лемму 1.1, продолжим a до порядкового автоморфизма группы K_n^*, т. е. вложим K_n в л. у. группу K_n^*, допускающую автоморфизм a и являющуюся объединением возрастающей цепочки групп $K_n^{a^{-t}}$, $t \in \mathbb{Z}^+$. Поскольку все группы $K_n^{a^{-t}}$ центрально-метабелевы, то таковой будет и группа K_n^*.

Положим $A = \langle a \rangle$ и рассмотрим полупрямое произведение $G_1(n) = K_n^* \rtimes A$, определённое по правилу (9). Поскольку a — порядковый автоморфизм л. у. группы K_n^*, то полагая $ga^s \geq 1$, если 1) $s > 0$ или 2) $s = 0$ и $g \geq 1$ в K^*, превращаем $G_1(n)$ в л. у. группу. В силу (10) центр группы K_n^* остаётся центром и в группе $G_1(n)$. Из (5), (9) получаем $[h_i, d] = h_i^{-1}h_{i+1}$, $[a, d] = 1$ и $[h_i, a] = h_i^{-1}h_i^{\alpha^n}$, откуда $[G_1(n), G_1(n)] \leq H_n^A$. Образ подгруппы H_n^A в фактор-группе $G_1(n)/C_n$ абелев и, таким образом, группа $G_1(n)$ также центрально-метабелева.

В следующем примере группа $G_1(n)$ из примера 2.1 вкладывается в доупорядочиваемую группу $G_2(n)$ при помощи конструкции из [21].

ПРИМЕР 2.2. Пусть H_n и C_n — те же, что и в примере 2.1. Прежде чем строить группу K_n, расширим группу H_n до группы L_n с помощью автоморфизмов $u_{j,k}$, $j \in \mathbb{Z}$ и $k \in \mathbb{Z}^+$, по формулам

$$h_i^{u_{j,0}} = \begin{cases} h_i c_1, & \text{если } i = j, \\ h_i & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{11}$$

Действие $u_{j,k}$ на элементы h_i определим по индукции так, чтобы выполнялись соотношения

$$[h_i^{(1+d)^n}, u_{j,k+1}] = [h_i, u_{j,k}],\ k \geqslant 0. \tag{12}$$

Для этого при $k \geqslant 0$ достаточно положить

$$h_i^{u_{j,k+1}} = \begin{cases} h_i, & \text{если } i < j+(k+1)n, \\ h_i c_1, & \text{если } i = j+(k+1)n, \\ h_i \left[\prod\limits_{q=0}^{n-1} h_{i-n+q}^{\binom{n}{q}}, u_{j,k+1} \right]^{-1} [h_{i-n}, u_{j,k}], & \text{если } i > j+(k+1)n. \end{cases} \tag{13}$$

Формулы (11), (13) полностью определяют действие элементов $u_{j,k}$ на порождающих h_i группы H_n. Поскольку все соотношения группы H_n имеют коммутаторный вид, а действие элементами $u_{j,k}$ сводится к умножению на центральные элементы, то все определяющие соотношения группы H_n сохраняются под действием $u_{j,k}$, и значит, действия $u_{j,k}$ продолжаются до автоморфизмов группы H_n.

Обозначим через L_n полупрямое произведение группы H_n на группу $U = \langle u_{j,k} \mid j \in \mathbb{Z},\, k \in \mathbb{Z}^+ \rangle$ в соответствии с (11), (13). Отметим, что (11), (13) влекут перестановочность автоморфизмов $u_{j,k}$ между собой, поэтому можно считать группу U абелевой. Таким образом, L_n нильпотентна ступени два, а $\bar{L}_n = L_n/C_n$ — свободная абелева группа с базисом $\bar{h}_i, \bar{u}_{i,j}$, $i \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{Z}^+$. Соотношения группы L_n устойчивы относительно отображения $d : L_n \to L_n$, заданного на порождающих по правилу

$$h_i^d = h_{i+1},\ u_{i,j}^d = u_{i+1,j},\ \text{где } i \in \mathbb{Z} \text{ и } j \in \mathbb{Z}^+,$$

поэтому d продолжается до автоморфизма группы L_n.

Обозначим через K_n полупрямое произведение группы L_n с помощью указанного автоморфизма d. Отметим, что K_n/C_n изоморфна сплетению $\langle \bar{h}_0, \bar{u}_{0,j} \mid j \in \mathbb{Z}^+ \rangle \wr \langle d \rangle$, откуда K_n — упорядочиваемая группа. Соотношения (11) позволяют для каждого $h \in H_n \setminus C_n$ найти $u \in U$ такой, что

$$h^u = hc_1^m, \tag{14}$$

где $m \neq 0$ зависит от u и h. Пусть V — централизатор H_n в U. Если $V \neq \{1\}$, то V — нормальная строго изолированная подгруппа в K_n, а K_n/V — центрально-метабелевая, а потому упорядочиваемая, R^*-группа [19]. Взяв U/V вместо U, L_n/V вместо L_n и K_n/V вместо K_n получим, что для любого $1 \neq u \in U$ найдётся $h \in H_n$ такой, что

$$u^h = uc_1^m, \tag{15}$$

где $m \neq 0$ зависит от h и u. Равенства (14) и (15) позволяют для любого $g \in L_n \setminus C_n$ найти $v \in L_n$ такой, что

$$g^v = gc_1^m, \tag{16}$$

где $m \neq 0$ зависит от g и v.

Зафиксируем линейный порядок на K_n и рассмотрим отображение $a : K_n \to K_n$, заданное на порождающих по правилу

$$d^a = d, \quad h_i^a = h_i^{(1+d)^n}, \quad u_{i,j}^a = u_{i,j+1}, \quad i \in \mathbb{Z}, \ j \in \mathbb{Z}^+.$$

Как показано в примере 2.1, отображение a согласовано с определяющими соотношениями подгруппы H_n и с сопряжением элементом d. В силу (12) отображение a согласовано с сопряжениями элементами $u_{i,j}$ и потому продолжается до эндоморфизма группы K_n. Как и в примере 2.1, продолжим порядковый мономорфизм a группы K_n до порядкового автоморфизма группы K_n^* и построим полупрямое произведение $G_2(n) = K_n^* \rtimes \langle a \rangle$. По построению $G_2(n)$ — упорядочиваемая центрально-метабелевая группа, содержащая изоморфную копию группы $G_1(n)$ из примера 2.1.

Покажем, что $G_2(n)$ — доупорядочиваемая группа. Обозначим через T нормальное замыкание подгруппы L_n в группе $G_2(n)$. По построению группы $G_2(n)$, её фактор-группа по T изоморфна свободной абелевой группе $\langle a, d \rangle$, поэтому достаточно доказать G-доупорядочиваемость подгруппы T [3, гл. VI, § 1, след. 5]. Достаточно проверить, что для любых элементов x_1, x_2 из $S(x)$ пересечение полугрупп $S(x_1)$ и $S(x_2)$ не пусто, $x \in T$, $S(x)$ — полугруппа, порождённая элементами, сопряжёнными с x в группе $G_2(n)$ [3, гл. II, § 1, след. 3]. Если $x \in C_n$, то $x_1 = x^{n_1}$, $x_2 = x^{n_2}$ и $x_1^{n_2} = x_2^{n_1}$. Пусть $x \in T \setminus C_n$. Поскольку фактор группа $G_2(n)/C_n$ метабелева и, значит, доупорядочиваема [3, гл. VI, § 1, предлож. 2], то $S(x_1)C_n \bigcap S(x_2)C_n \neq \varnothing$. Поэтому найдутся $y_1 \in S(x_1)$ и $y_2 \in S(x_2)$ такие, что

$$y_1 = y_2 c_1^q. \tag{17}$$

Предположим, что $q \neq 0$. Поменяв местами, если потребуется, y_1 и y_2, можно считать, что $q \geqslant 1$. Напомним, что $T < K_n^* = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}^+} K_n^{a^{-i}}$. Сопрягая равенство (17) подходящей степенью элемента a, получаем, что $y_2 \in T \bigcap K_n = L_n$. В этом случае, в силу (16) найдётся $v \in L_n$ такой, что $y_2^v = y_2 c_1^m$. Не нарушая общности, можно считать, что $m > 0$ (сопрягая y_2 элементом v^{-1}, получаем $y_2^{v^{-1}} = y_2 c_1^{-m}$). Тогда

$$y_2^{m-1} y_2^{v^q} = y_2^m c_1^{mq} = y_1^m$$

и $S(x_1) \bigcap S(x_2) \neq \varnothing$.

Отметим, что в этих примерах группы $G_1(n)$, $G_2(n)$ не допускали никаких упорядочений с центральной системой выпуклых подгрупп, поскольку $h_0 = [h_0, a][d, h_0]$. Для построения следующего примера внесём небольшие изменения в конструкцию группы $G_1(n)$, чтобы получить л. у. группу с центральной системой выпуклых подгрупп.

ПРИМЕР 2.3. Пусть группы K_n, H_n и C_n — те же, что и в примере 2.1. Как было отмечено выше, фактор-группа K_n/C_n изоморфна сплетению $\langle h_0 \rangle \wr \langle d \rangle$, т. е. она аппроксимируется нильпотентными группами без кручения. Таким образом, K_n/C_n, а с ней и K_n допускают линейный порядок с центральной системой выпуклых подгрупп. Зафиксируем такой порядок на группе K_n.

Прежде чем определить эндоморфизм b группы K_n, вложим эту группу с продолжением порядка в л. у. группу $\tilde{K}_n$ с полной подгруппой $\tilde{H}_n$ так, чтобы $\tilde{H}_n$ была минимальным пополнением группы H_n и выполнялось $\tilde{K}_n/\tilde{H}_n \cong K_n/H_n \cong \langle d \rangle$. Это можно сделать по теореме Гурченкова [11] или по теореме Мальцева о пополнении нильпотентных групп без кручения [7], поскольку H_n является выпуклой нормальной подгруппой группы K_n.

Определим отображение $\beta : \tilde{H}_n \to \tilde{H}_n$ по правилу

$$g^\beta = \left(g^{\frac{1}{2}}\right)^{1+a}, \quad g \in H_n^*. \tag{18}$$

Группа $\tilde{K}_n$ порождается элементами d и $h_i^{\frac{1}{k}}$, $i \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$. На этих порождающих определим отображение b по правилу

$$d^b = d,\ \left(h_i^{\frac{1}{k}}\right)^b = \left(h_i^{\beta^n}\right)^{\frac{1}{k}},\quad i \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N},$$

и покажем, что b продолжается до порядкового эндоморфизма группы $\tilde{K}_n$. Для этого проверим, что b сохраняет определяющие соотношения группы $\tilde{K}_n$.

Имеем $\left(h_i^{\frac{1}{kt}}\right)^t = h_i^{\frac{1}{k}}$. В этом случае $\left(\left(h_i^{\frac{1}{kt}}\right)^t\right)^b = \left(\left(h_i^{\frac{1}{kt}}\right)^b\right)^t = \left(h_i^{\beta^n}\right)^{\frac{1}{kt}\cdot t} = \left(h_i^{\beta^n}\right)^{\frac{1}{k}} = \left(h_i^{\frac{1}{k}}\right)^b$. Далее $\left(h_i^{\frac{1}{k}}\right)^{d^t} = h_{i+t}^{\frac{1}{k}}$. Поскольку d и b перестановочны, справедливо $\left(h_i^{\frac{1}{k}}\right)^{d^t b} = \left(h_i^{\frac{1}{k}}\right)^{bd^t} = \left(\left(h_i^{\beta^n}\right)^{\frac{1}{k}}\right)^{d^t} = \left(h_{i+t}^{\beta^n}\right)^{\frac{1}{k}} = \left(h_{i+t}^{\frac{1}{k}}\right)^b$.

Соотношения (1)–(4) заданы на коммутаторах, при этом действие отображения b отличается от действия a рациональным показателем. В двуступенно нильпотентных группах $[x^r, y^q] = [x, y]^{rq}$ для любых элементов x, y и рациональных r, q. Поэтому проверка указанных соотношений в нашем случае ничем не отличается от примера 2.1.

Как и в примере 2.1, продолжим эндоморфизм b группы $\tilde{K}_n$ до порядкового автоморфизма центрально-метабелевой группы K_n^* и рассмотрим полупрямое произведение $G_3(n) = K_n^* \rtimes \langle b \rangle$, определённое по правилу (18). Зададим на $G_3(n)$ порядок, положив $gb^s \geq 1$, если 1) $s > 0$ или 2) $s = 0$ и $g \geq 1$ в K^*. Система выпуклых подгрупп группы K_n^* была центральной. Покажем, что то же справедливо и в группе $G_3(n)$. Для этого достаточно убедиться, что $|[g, b]| \ll |g|$ для любого $g \in K_n^*$. Действительно, $[b, d] = 1$, $[b, c_1] = 1$, $[b, g] = g^{-1}g^{\beta^n}v$, $|v| \ll |g|$ для $|c_1| \ll |g| \ll |d|$, а по модулю центра $g^\beta = g^{\frac{1}{2}}(g^{\frac{1}{2}})^d = gw$, где $|w| \ll |g|$.

§ 3. Основные результаты

ЛЕММА 3.1. *Для любого $n > 1$ группы $G_1(n)$, $G_2(n)$ из примеров 2.1, 2.2 не вкладываются ни в какие R^*-группы, в которых из элемента $a \in G_1(n), G_2(n)$ извлекается корень степени n.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим группу $G = G_1(n)$. Пусть, напротив, G^* — R^*-группа, содержащая G и элемент x такой, что $x^n = a$. Из (9), (10) следует $[x^n, d] = [x^n, c_1] = 1$, а поскольку G^* является R^*-группой, то

$$[x, d] = [x, c_1] = 1 \tag{19}$$

в группе G^*. Положим $f = h_1^{-1} h_0^{-1} h_0^x$. Тогда $h_0^x = h_0 h_1 f = h_0^\alpha f$. Поскольку x и d коммутируют, то для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $h_0^{\alpha^k x} = h_0^{x\alpha^k} = h_0^{\alpha^{k+1}} f_k$, где f_k — произведение элементов, сопряжённых с f. Докажем по индукции, что $h_0^{x^k} = h_0^{\alpha^k} \bar{f}_k$, где $\bar{f}_k$ — произведение элементов, сопряжённых с f. Это верно для $k = 1$. Для $k + 1$ имеем

$$h_0^{x^{k+1}} = (h_0^{\alpha^k} \bar{f}_k)^x = h_0^{\alpha^k x} \bar{f}_k^x = h_0^{\alpha^{k+1}} f_k \bar{f}_k^x$$

и индуктивное предположение проверено.

Таким образом, $h_0^{x^n} = h_0^{\alpha^n} \bar{f}_n$. С другой стороны, $h_0^{x^n} = h_0^a = h_0^{\alpha^n}$. Отсюда $\bar{f}_n = 1$. Поскольку $\bar{G}$ является R^*-группой, то $f = 1$ и, следовательно, $h_0^x = h_0^\alpha$, $h_1^x = h_1^\alpha$. В силу (19), $c_1^x = c_1$. С другой стороны, $c_1^x = [h_1, h_0]^x = [h_1^\alpha, h_0^\alpha] = [h_1 h_2, h_1 h_0] = [h_1, h_0][h_2, h_1][h_2, h_0] = c_1^2$. Получаем противоречие. Поскольку $G_1(n) < G_2(n)$, то и $G_2(n)$ не вкладывается ни в какую R^*-группу, в которой из элемента a извлекается корень степени n. $\square$

Из леммы 3.1 следует

ТЕОРЕМА 3.2. *Существует линейно упорядоченные (доупорядочиваемые) группы, которые не вкладываются ни в какие полные упорядочиваемые группы. При этом такие группы существуют в многообразии центральных расширений метабелевых групп.*

Для уточнения этой теоремы обратимся к примеру 2.3. Предварительно получим одно необходимое условие пополнения л. у. групп.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Пусть $H = \langle h_i \mid i \in I \rangle$ — подгруппа л. у. группы G, $\varphi : \{h_i \mid i \in I\} \to G$ — отображение, заданное на порождающих элементах подгруппы H по правилу*

$$h_i^\varphi = h_i^{\frac{k_1}{m_1} a_1 + \ldots + \frac{k_s}{m_s} a_s}, \ i \in I,$$

$a_1,\dots,a_s\in G$, $\frac{k_1}{m_1},\dots,\frac{k_s}{m_s}$ — положительные рациональные числа, $b\in G$ перестановочен с элементами $a_1,\dots,a_s$ и $h_i^b=h_i^{\varphi^n}$ для всех $i\in I$. Если G вкладывается в полную упорядочиваемую группу G^*, то отображение φ продолжается до изоморфного вложения подгруппы H в группу G.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем линейный порядок на группе G^* и продолжим φ до отображения φ^* группы G^* в себя, положив

$$g^{\varphi^*}=g^{\frac{k_1}{m_1}a_1+\ldots+\frac{k_s}{m_s}a_s}.$$

Если $g_1<g_2$, то $g_1^{\frac{k_j}{m_j}}<g_2^{\frac{k_j}{m_j}}$, $j=1,\dots,s$ и $g_1^{\varphi^*}<g_2^{\varphi^*}$. Таким образом, φ^* сохраняет строгий порядок на группе G^*. Пусть $x\in G^*$ и $x^n=b$, тогда $[x^n,a_j]=[b,a_j]=1$, $j=1,\dots,s$, что в упорядоченной группе влечёт $[x,a_j]=1$. Отсюда следует перестановочность φ^* с сопряжением элементом x, $g^{\varphi^*x}=g^{x\varphi^*}$. Отображение $g\mapsto g^{\varphi^*x^{-1}}$ также сохраняет строгий порядок на группе G^*. Если $h_i^{\varphi^*x^{-1}}>h_i$ для некоторого $i\in I$, то $h_i=h_i^{\varphi^nb^{-1}}=h_i^{(\varphi^*)^nx^{-n}}=h_i^{(\varphi^*x^{-1})^n}>h_i$, противоречие. Также невозможно, чтобы было $h_i^{\varphi^*x^{-1}}<h_i$, поэтому $h_i^x=h_i^{\varphi^*}=h_i^{\varphi}$. Отсюда $H^x<G$ и отображение φ продолжается до изоморфного вложения H в G по правилу $H\to H^x$. □

ТЕОРЕМА 3.4. *Существуют л. у. группы с центральной системой выпуклых подгрупп, которые не вкладываются ни в какие полные упорядочиваемые группы. Более того, такие группы существуют в многообразии центральных расширений метабелевых групп.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение β, заданное на порождающих подгруппы $\tilde H_n$ группы $G_3(n)$, удовлетворяет условиям предложения 3.3, но не продолжается до изоморфного вложения $\tilde H_n$ в $G_3(n)$, поскольку в противном случае $[h_1,h_0]^{\beta^n}=[h_1,h_0]^b=[h_1,h_0]$, откуда $[h_1,h_0]=[h_1,h_0]^\beta=$ $=[h_1^\beta,h_0^\beta]=[h_1^{\frac12}h_2^{\frac12},h_0^{\frac12}h_1^{\frac12}]=[h_1,h_0]^{\frac12}$. □

СЛЕДСТВИЕ 3.5. *Существует упорядочиваемая группа G, которая вкладывается в полную упорядочиваемую группу и при этом G допускает упорядочения, не продолжающиеся ни на какие полные упорядочиваемые группы, содержащие изоморфную копию группы G.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F — свободная группа (или свободная разрешимая группа), допускающая гомоморфизм φ на группу $G_1(n)$ с ядром T. Тогда на F есть линейный порядок с выпуклой подгруппой T. Если F вкладывается в полную л. у. группу F^* с продолжением указанного порядка, то изолятор $\mathrm{I}(F)$ в F^* — также полная группа. Поскольку $\mathrm{I}(F) = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \mathrm{I}_k(F)$, а каждый $\mathrm{I}_k(F)$, $k > 0$, порождается $\mathrm{I}_{k-1}(F)$ и элементами x, попадающими в некоторой степени в $\mathrm{I}_{k-1}(F)$, то подгруппа T нормальна в $\mathrm{I}_k(F)$ и, значит, в $\mathrm{I}(F)$. Тогда $\mathrm{I}(F)/T$ — полная упорядочиваемая группа, содержащая группу $G_1(n)$, что противоречит лемме 3.1. С другой стороны, F аппроксимируется нильпотентными группами без кручения и поэтому на F существует линейный порядок с выпуклыми подгруппами — членами нижнего центрального ряда $\gamma_i(F)$. Нильпотентные группы $N_i = F/\gamma_i(F)$ вкладываются в полные л. у. группы N_i^*. Теперь F вкладывается в полное прямое произведение групп N_i^* — полную л. у. группу. $\square$

ТЕОРЕМА 3.6. *Для любого натурального $n > 1$ существуют л. у. тела, не вложимые ни в какие л. у. тела, в которых из всех положительных элементов извлекаются корни степени n.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R — групповая алгебра л. у. группы $G_1(n)$ над $\mathbb{Q}$. По теореме Мальцева–Неймана [22, 23] (см. также [3, гл. V, § 1, теор. 1]) алгебра R вкладывается в л. у. тело $\hat{R}$. Если $\hat{R}$ вкладывается в л. у. тело R^*, в котором из каждого положительного элемента извлекается корень степени n, то мультипликативная подгруппа положительных элементов R^+ тела R^* содержит группу $G_1(n)$ и в R^+ из каждого элемента извлекается корень степени n, что противоречит лемме 3.1. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 3.7. *Существуют л. у. группы, не вложимые в л. у. группы, у которых любые положительные элементы сопряжены.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть л. у. группа G не вкладывается ни в какую полную л. у. группу (например, одна из групп $G_i(n)$, $i = 1, 2, 3$). Если G вкладывается в л. у. группу G^*, в которой положительные элементы сопряжены, то $g = x^{-1}g^n x$ и в группе G^* из элемента g извлекается корень степени n, т. е. G^* — полная л. у. группа, что противоречит предположению о группе G. □

В заключение автор выражает искреннюю благодарность Э. Глассу, В. М. Копытову, Н. Я. Медведеву и А. Ремтулле, с которыми на протяжении ряда лет проводились совместные научные исследования и, в частности, обсуждались вопросы пополнения упорядочиваемых групп. Автор также благодарен и С. Н. Васильеву, директору ИДСТУ СО РАН, за финансовую поддержку научных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Problem Lists. Ordered Algebraic Structures, Not. Am. Math. Soc., **29**, No. 4 (1982), 327.
2. *A. M. Glass*, Partially ordered groups (Ser. Algebra, **7**), Singapore, World Scientific, 1999.
3. *А. И. Кокорин, В. М. Копытов*, Линейно упорядоченные группы, М., Наука, 1972.
4. Нерешённые вопросы теории групп. Коуровская тетрадь, 15-е изд., Новосибирск, Ин-т матем. СО РАН, 2002.
5. *B. H. Neumann*, Adjunction of elements to groups, J. Lond. Math. Soc., **18** (1943), 4—11.
6. *Р. Линдон, П. Шупп*, Комбинаторная теория групп, М., Мир, 1980.
7. *А. И. Мальцев*, Нильпотентные группы без кручения, Изв. АН СССР, сер. матем., **13**, № 3 (1949), 201—212.
8. *В. М. Копытов*, О пополнении центра упорядоченной группы, Матем. зап. Уральск. ун-та, **4**, № 3 (1963), 20—24.
9. *В. В. Блудов, Н. Я. Медведев*, О пополнении упорядочиваемых метабелевых групп, Алгебра и логика, **13**, № 4 (1974), 369—373.
10. *C. D. Fox*, An embedding theorem for ordered groups, Bull. Aust. Math. Soc., **12**, No. 3 (1975), 321—335.
11. *С. А. Гурченков*, О пополнении инвариантных локально нильпотентных подгрупп линейно упорядоченных групп, Матем. заметки, **51**, № 2 (1992), 35—39.
12. *В. В. Блудов*, Пополнение линейно упорядоченных метабелевых групп, Алгебра и логика, **42**, № 5 (2003), 542—565.

13. *V. V. Bludov*, Ordered groups which can not be embedded in any divisible orderable groups, Межд. алгебр. конф., посвящ. 250-летию Московского ун-та. Тез. докл., М., Мех.-мат. МГУ, 2004, 166—167.
14. *V. V. Bludov*, On embedding of totally orderd groups in divisible orderable groups, Алгебра, логика и кибернетика. Материалы межд. конф., посвящ. 75-летию со дня рожд. проф. А. И. Кокорина, Иркутск, ИГПУ, 2004, 6—7.
15. *V. V. Bludov, A. M. W. Glass, A. H. Rhemtulla*, On centrally ordered groups, J. Algebra (submitted).
16. *E. Artin, O. Schreier*, Algebraische Konstruktion reeller Körper, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **5** (1926), 83—115.
17. *Б. Л. ван дер Варден*, Алгебра, М., Наука, 1972.
18. *Л. Фукс*, Частично упорядоченные алгебраические системы, М., Мир, 1965.
19. *R. B. Mura, A. H. Rhemtulla*, Orderable groups (Lect. Notes Pure Appl. Math., **27**), New York–Basel, Marcel Dekker, Inc., 1977.
20. *G. Higman, B. H. Neumann, H. Neumann*, Embeddingtheorems for groups, J. Lond. Math. Soc., **24** (1950), 247—254.
21. *В. М. Копытов*, К теории доупорядочиваемых групп, Алгебра и логика, **5**, № 6 (1966), 27—31.
22. *А. И. Мальцев*, О включении групповых алгебр в алгебры с делением, Докл. АН СССР, **60** (1948), 1499—1501.
23. *B. H. Neumann*, On ordered division rings, Trans. Am. Math. Soc., **66** (1949), 202—252.

Поступило 9 февраля 2005 г.

Адрес автора:

БЛУДОВ Василий Васильевич, Иркутский гос. педагог. ун-т, ул. Нижняя набережная, 6, г. Иркутск, 664011, РОССИЯ. e-mail: bludov@math.isu.ru