Н. Ф. Абузярова, Инвариантные подпространства в неквазианалитических пространствах Ω-ультрадифференцируемых функций на интервале, *Изв. вузов. Матем.*, 2023, номер 11, 86–91

DOI: 10.26907/0021-3446-2023-11-86-91

Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2023, №11, с. 86–91 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Краткое сообщение, представленное С.Р. Насыровым

Н.Ф. АБУЗЯРОВА

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА В НЕКВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ Ω-УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ НА ИНТЕРВАЛЕ

Аннотация. В работе рассматривается ослабленная версия классического спектрального синтеза для оператора дифференцирования в неквазианалитических пространствах ультрадифференцируемых функций. При этом рассматриваемые классы пространств являются наиболее широкими из всех известных к настоящему моменту. А именно, это пространства Ω-ультрадифференцируемых функций, введенные недавно А.В.Абаниным. Для инвариантных относительно дифференцирования подпространств в указанных пространствах установлены условия допустимости слабого спектрального синтеза. В качестве применения общих результатов доказано, что, во-первых, слабый спектральный синтез имеет место для ядра оператора свертки, действующего локально, в отсутствии каких-либо ограничений на характеристическую функцию ультрараспределения, порождающего этот оператор, во-вторых, пересечение любого числа ядер операторов свертки допускает слабый спектральный синтез, при условии, что эти операторы свертки порождены ультрараспределениями с одним и тем же точечным носителем и характеристическая функция хотя бы одного из них является мультипликатором в соответствующем пространстве целых функций.

Ключевые слова: ультрадифференцируемая функция, ультрараспределение, преобразование Фурье–Лапласа, инвариантное подпространство, спектральный синтез.

УДК: 517.538: 517.982: 517.984: 517.547

DOI: 10.26907/0021-3446-2023-11-86-91

Введение

Символом $C^\infty(a;b)$, как обычно, обозначаем пространство всех бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций на интервале $(a;b)\subseteq\mathbb{R}$, снабженное стандартной метризуемой топологией проективного предела последовательности банаховых пространств $C^m[a_m;b_m]$, где $\{[a_m;b_m]\}_{m=1}^\infty$ — последоватедьность отрезков, исчерпывающая $(a;b)$:

$$[a_m;b_m]\Subset[a_{m+1};b_{m+1}],\ m=1,2,\dots,\quad \bigcup_{m=1}^\infty[a_m;b_m]=(a;b).$$

Поступила в редакцию 03.09.2022, после доработки 20.09.2023. Принята к публикации 26.09.2023.

Благодарности. Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2022-0124).

Пусть X — локально-выпуклое пространство бесконечно дифференцируемых функций на интервале $(a;b)$, непрерывно вложенное в $C^\infty(a;b)$, $D = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ — оператор дифференцирования. Будем предполагать, что выполнены следующие условия:
1) оператор D действует непрерывно из X в X;
2) пространство X содержит все экспоненциальные одночлены

$$e_{k,\lambda}(t) = t^k e^{\mathrm{i}\lambda t}, \quad t \in (a;b),\ k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\},\ \lambda \in \mathbb{C};$$

3) X — неквазианалитический класс функций.

Рассмотрим замкнутое подпространство $W \subset X$, инвариантное относительно дифференцирования: $D(W) \subset W$, короче, *D-инвариантное подпространство*. Символом $\operatorname{Exp} W$ обозначим совокупность всех экспоненциальных одночленов $e_{k,\lambda}$, содержащихся в W. Ясно, что если W — D-инвариантное подпространство и $e_{k,\lambda} \in W$, $k \geq 1$, то $e_{j,\lambda} \in W$, $j = 0, \ldots, k-1$.

Классическая задача спектрального синтеза для оператора D в X — выяснить, при каких условиях D-инвариантное подпространство $W \subsetneq X$ порождается множеством $\operatorname{Exp} W$, т. е.

$$W = \overline{\operatorname{span} \operatorname{Exp} W}? \tag{1}$$

Хорошо известны результаты, касающиеся этой задачи для оператора дифференцирования в пространстве голоморфных функций на выпуклой области в $\mathbb{C}$ ([1]–[3]), в пространстве $C^\infty(\mathbb{R})$ для группы операторов сдвига $\{T_h\}_{h\in\mathbb{R}}$ ([4]–[6]). Вместе с тем, как заметили в 2008 г. авторы работы [7], не всегда классический спектральный синтез подходит для описания D-инвариантных подпространств. А именно, в пространстве $C^\infty(a;b)$ имеются нетривиальные D-инвариантные подпространства, не содержащие экспонент:

$$W_I = \{f \in C^\infty(a;b): \quad f = 0 \text{ на } I\}, \tag{2}$$

где $I \subsetneq (a;b)$ — непустой относительно замкнутый промежуток. Также в ([7], теорема 4.1) было показано, что всякое нетривиальное D-инвариантное подпространство $W \subset C^\infty(a;b)$ содержит максимальное подпространство вида (2), так называемое "резидуальное подпространство". Соответственно, каждое такое W имеет *резидуальный промежуток* I_W, определяемый как наименьший из всех относительно замкнутых в $(a;b)$ промежутков I со свойством $W_I \subset W$. Таким образом, для пространства $C^\infty(a;b)$ рамки классического спектрального синтеза (1) оказываются слишком тесными. В связи с этим обстоятельством в работе [7] была предложена постановка задачи, которую мы называем *задачей слабого спектрального синтеза*: выяснить, какие из нетривиальных D-инвариантных подпространств $W \subset C^\infty(a;b)$ допускают представление

$$W = \overline{W_{I_W} + \operatorname{span} \operatorname{Exp} W}? \tag{3}$$

Легко видеть, что задача о возможности представления (3) содержит в себе классическую задачу спектрального синтеза как частный случай, соответствующий $I_W = (a;b)$. Вопрос о представлении (3), а также его развитии и уточнении для D-инвариантных подпространств в пространстве $C^\infty(a;b)$ исследовался в работах [8]–[13].

Наличие в пространстве $C^\infty(a;b)$ подпространств вида (2) обусловлено его неквазианалитичностью. Для *неквазианалитического* пространства $X \subsetneq C^\infty(a;b)$ мы также наблюдаем наличие в нем нетривиальных D-инвариантных подпространств, не содержащих экспонент, например,

$$W_c = \{f \in X: \ f^{(k)}(c) = 0: \ k = 0, 1, 2 \ldots\}, \quad c \in (a;b).$$

Поэтому, как и в случае пространства $C^\infty(a;b)$, задачу спектрального синтеза для оператора D в X имеет смысл рассматривать именно в ослабленной форме (3).

Недавно такая задача была изучена нами в пространстве $X = \mathcal{U}_{(\omega)}(a;b)$ ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа [14]. Подход, использованный нами ранее в [8] и [10] для пространства $C^\infty(a;b)$, оказался эффективным и в этом случае, также сохранили свою форму некоторые из результатов.

В настоящей статье речь пойдет о задаче слабого спектрального синтеза (3) в весьма широком классе пространств Ω-ультрадифференцируемых функций (короче, Ω-УДФ). Теория Ω-УДФ и Ω-ультрараспределений построена в работах А.В. Абанина [15], [16]; она включает в себя, как частные случаи, хорошо известные теории ультрадифференцируемых функций Берлинга–Бьорка, Румье–Коматсу и др. Соответственно, предлагаемые нами результаты по слабому спектральному синтезу также включают в себя информацию о D-инвариантных подпространствах во всех указанных видах пространств УДФ. Отметим, что доказательства представляемых утверждений проводятся по двойственной схеме, аналогичной той, что была применена ранее в [8], [10], [14].

1. Спектральный синтез

В качестве пространства X рассматриваем $\mathcal{U}_\Omega(a;b)$ — пространство Ω-УДФ на интервале $(a;b)$, определяемое *правильной* возрастающей или убывающей последовательностью неквазианалитических весов $\Omega = \{\omega_n\}_{n=1}^\infty$.

Определения и свойства весов ω_n, а также пространств $\mathcal{U}_\Omega(a;b)$ подробно изложены в работах [15], [16], где эти пространства были введены и изучены. Мы будем приводить и цитировать нужные нам определения и факты по мере надобности в ходе изложения.

Пусть Λ — последовательность кратных точек комплексной плоскости, каждая точка выписывается столько раз, какова ее кратность. Символом $\exp^\Lambda$ будем обозначать множество экспоненциальных одночленов, построенное по этой последовательности, а именно, для каждой точки λ, содержащейся в Λ с кратностью $k \in \mathbb{N}$, в множество $\exp^\Lambda$ включаются функции $e^{-\mathrm{i}\lambda t}, \ldots, t^{k-1}e^{-\mathrm{i}\lambda t}$.

Напомним, что *радиус полноты* $r(\Lambda)$ последовательности Λ определяется как инфимум множества положительных чисел r таких, что система функций $\exp^\Lambda$ не полна в пространстве $C^\infty(-r;r)$ (или, что равносильно, в каждом из пространств $C(-r;r)$, $L^2(-r;r)$).

Используя теоремы Берлинга–Мальявена о мультипликаторе и о радиусе полноты (см., например, [17], гл. X, XI) и аналог теоремы Пэли–Винера–Шварца об аналитической реализации сильного сопряженного пространства $\mathcal{U}'_\Omega(a;b)$ в виде весового пространства целых функций (см. [15], гл. 5; [16]), и принимая во внимание неквазианалитичность весов ω_n, нетрудно показать, что *система функций* $\exp^\Lambda$ *не полна в пространстве* $\mathcal{U}_\Omega(a;b)$ *тогда и только тогда, когда* $r(\Lambda) < \dfrac{b-a}{2}$.

Пусть $I \subseteq (a;b)$ — относительно замкнутый промежуток, $|I|$ — его длина, а W_I — D-инвариантное подпространство вида (2) в пространстве $\mathcal{U}_\Omega(a;b)$, т. е.

$$W_I = \{f \in \mathcal{U}_\Omega(a;b) : \quad f = 0 \text{ на } I\}.$$

Для реализации двойственной схемы исследования задачи слабого спектрального синтеза в $\mathcal{U}_\Omega(a;b)$, как и в случае пространства $C^\infty(a;b)$, сначала нужно убедиться в наличии у каждого нетривиального D-инвариантного подпространства W *резидуального* промежутка $I_W \subseteq (a;b)$ и *резидуального* подпространства W_{I_W}. Для этого мы устанавливаем следующее, более общее, утверждение.

Предложение 1. *Для любого (не обязательно D-инвариантного) замкнутого подпространства $L \subset \mathcal{U}_\Omega(a;b)$ существует относительно замкнутый промежуток $I_L \subseteq (a;b)$ со свойствами $W_{I_L} \subset L$, $W_I \setminus L \neq \emptyset \ \forall\, I \subsetneq I_L$.*

Доказательство предложения 1 основано на соображениях двойственности, топологических свойствах пространств $\mathcal{U}_\Omega(a;b)$, $\mathcal{U}'_\Omega(a;b)$, а также свойствах целых функций — преобразований Фурье–Лапласа Ω-ультрараспределений из $\mathcal{U}'_\Omega(a;b)$.

Рассмотрим D-инвариантное подпространство $W \subset \mathcal{U}_\Omega(a;b)$ с резидуальным промежутком $I_W \subseteq (a;b)$ и запасом экспоненциальных одночленов $\operatorname{Exp} W$. Пусть $\Lambda_W \subset \mathbb{C}$ — последовательность показателей системы $\operatorname{Exp} W$, т. е. $\operatorname{Exp} W = \exp^{\Lambda_W}$.

Спектром σ_W *подпространства* W называется спектр сужения оператора дифференцирования $D : W \to W$.

Предложение 2.

1) *Для спектра произвольного нетривиального D-инвариантного подпространства W реализуется одна из двух возможностей: либо $\sigma_W = \mathbb{C}$, либо $\sigma_W = (-\mathrm{i}\Lambda_W)$.*

2) *Если $r(\Lambda_W) > \dfrac{|I_W|}{2}$, то подпространство W тривиально*: $W = \mathcal{U}_\Omega(a;b)$.

Замечание 1. Можно показать, что спектр подпространства

$$\widetilde{W} = \overline{W_{I_W} + \operatorname{span} \operatorname{Exp} W}$$

равен $(-\mathrm{i}\Lambda_W)$. В частности, это означает, что дискретность спектра $\sigma_W = (-\mathrm{i}\Lambda_W)$ является необходимым условием допустимости слабого спектрального синтеза (3).

Замечание 2. Пусть $c, d \in (a;b)$, $W_{c,d} = \{f \in \mathcal{U}_\Omega(a;b) : \ f^{(k)}(c) = f^{(k)}(d) = 0, \ k = 0,1,2,\dots\}$, $W_{[c;d]}$ определяется формулой (1) для $I = [c;d]$. Аналогично тому, как это сделано в ([7], §2), убеждаемся в том, что $\sigma_{W_{c,d}} = \mathbb{C}$, $\sigma_{W_{[c;d]}} = \emptyset$, при этом $\operatorname{Exp} W_{c,d} = \operatorname{Exp} W_{[c;d]} = \emptyset$. Можно привести как примеры D-инвариантных подпространств W с непустым множеством $\operatorname{Exp} W$ и дискретным спектром $(-\mathrm{i}\Lambda_W)$, так и примеры D-инвариантных подпространств W с непустым $\operatorname{Exp} W$ и спектром $\sigma_W = \mathbb{C}$.

Следующее утверждение об условиях допустимости слабого спектрального синтеза формулируется только в терминах характеристик самого подпространства W без использования двойственных объектов и понятий, которые необходимо возникают в доказательствах, использующих двойственную схему перехода к подмодулям целых функций.

Теорема 1. *Пусть $W \subsetneq \mathcal{U}_\Omega(a;b)$ — D-инвариантное подпространство с дискретным спектром: $\sigma_W = -\mathrm{i}\Lambda_W$.*

Если $r(\Lambda_W) < \dfrac{|I_W|}{2}$, то $W = \overline{W_{I_W} + \operatorname{span} \exp^{\Lambda_W}}$.

Следствие. Пусть $W \subsetneq \mathcal{U}_\Omega(a;b)$ — D-инвариантное подпространство с дискретным спектром $\sigma_W = -\mathrm{i}\Lambda_W$.

1) Если резидуальный промежуток I_W не компактен в $(a;b)$, то W допускает слабый спектральный синтез (3).

2) W допускает спектральный синтез (1) тогда и только тогда, когда $I_W = (a;b)$.

Замечание 3. Приведенное в теореме 1 условие аналогично достаточному условию допустимости слабого спектрального синтеза в пространстве всех бесконечно дифференцируемых функций $C^\infty(a;b)$ (см. [8], теорема 2, следствия 2, 3, замечание 3, или [10], теорема 5, следствие 2, а также [9], теоремы 1.1, 1.3).

Для $S \in \mathcal{U}'_\Omega(a;b)$ положим $\varphi = \mathcal{F}(S)$, где

$$\mathcal{F}(S)(z) = S(e^{-\mathrm{i}tz}), \ z \in \mathbb{C},$$

— преобразование Фурье–Лапласа $\mathcal{P} := \mathcal{F}(\mathcal{U}'_\Omega(a;b)) \subset H(\mathbb{C})$. Отображение $\mathcal{F}$ индуцирует в $\mathcal{P}$ структуру локально-выпуклого пространства, изоморфного $\mathcal{U}'_\Omega(a;b)$. *Множество мультипликаторов* $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ определяется как совокупность функций $\varphi \in \mathcal{P}$ таких, что оператор умножения на φ действует непрерывно из $\mathcal{P}$ в $\mathcal{P}$.

Для множеств $A, B \subset \mathbb{R}$ символом $A \div B$ обозначается их *геометрическая разность*: $y \in A \div B$ тогда и только тогда, когда $y + B \subset A$.

Пусть $S \in \mathcal{U}'_\Omega(a;b)$, $I \subset (a;b)$ — относительно замкнутый промежуток,

$$\widetilde{I} := I \div \operatorname{ch}\operatorname{supp} S \neq \emptyset,$$

где $\operatorname{ch}\operatorname{supp} S$ — замыкание выпуклой оболочки носителя Ω-ультрараспределения S. Рассмотрим “*локальный*” *оператор свертки*

$$T_{S,I} : \mathcal{U}_\Omega(a;b) \to \mathcal{U}_\Omega(\widetilde{I}),$$

определяемый формулой

$$g = T_{S,I}(f), \quad g(y) = S(f(x+y)),\ y \in \widetilde{I}.$$

Ядро этого оператора $W_{S,I} := \ker T_{S,I}$ — D-инвариантное подпространство в $\mathcal{U}_\Omega(a;b)$ с резидуальным промежутком $I_W = I$ и спектром $\sigma_W = (-\mathrm{i}\mathcal{Z}_\varphi)$, где $\mathcal{Z}_\varphi$ — нулевое множество функции φ.

Теорема 2. *Подпространство $W_{S,I}$ допускает слабый спектральный синтез.*

Теорема 3. *Пусть $I \subset (a;b)$ — относительно компактный промежуток, $0 \in I$,*

$$\mathcal{S} = \{S_\alpha\} \subset \mathcal{U}'_\Omega(a;b), \quad \operatorname{supp} S_\alpha = \{0\} \quad \forall \alpha.$$

Положим $W_{\mathcal{S},I} = \bigcap\limits_{S \in \mathcal{S}} \ker T_{S,I}$.

Если $\varphi_{\alpha_0} = \mathcal{F}(S_{\alpha_0}) \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$ для некоторого α_0, то D-инвариантное подпространство $W_{\mathcal{S},I}$ допускает слабый спектральный синтез.

Литература

[1] Красичков–Терновский И.Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций*. I: *Спектральный синтез на выпуклых областях*, Матем. сб. **87(129)** (4), 459–489 (1972).

[2] Красичков–Терновский И.Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций*. II: *Спектральный синтез на выпуклых областях*, Матем. сб. **88(130)** (1(5)), 3–30 (1972).

[3] Красичков–Терновский И.Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций*. III: *О распространении спектрального синтеза*, Матем. сб. **88(130)** (3(7)), 331–352 (1972).

[4] Schwartz L. *Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques*, Ann. Math. **48** (4) 857–929 (1947).

[5] Schwartz L. *Théorie des distributions* Vol. I (Hermann, Paris, 1951).

[6] Schwartz L. *Théorie des distributions* Vol. II (Hermann, Paris, 1952).

[7] Aleman A., Korenblum B. *Derivation-invariant subspaces of C^∞*, Comput. Meth. Funct. Theory **8** (2), 493–512 (2008).

[8] Абузярова Н.Ф. *Спектральный синтез в пространстве Шварца бесконечно дифференцируемых функций*, Докл. РАН **457**(5), 510–513 (2014).

[9] Aleman A., Baranov A., Belov Yu. *Subspaces of C^∞ invariant under the differentiation*, J. Func. Anal. **268** (8), 2421–2439 (2015).

[10] Абузярова Н.Ф. *Спектральный синтез для оператора дифференцирования в пространстве Шварца*, Матем. заметки **102**(2), 163–177 (2017).

[11] Baranov A., Belov Yu. *Synthesizable differentiation-invariant subspaces*, Geom. Funct. Anal. **29** (1), 44–71 (2019).

[12] Абузярова Н.Ф. *Главные подмодули в модуле Шварца*, Изв. вузов. Матем. (5), 83–88 (2020).

[13] Абузярова Н.Ф. *Представление инвариантных подпространств в пространстве Шварца*, Матем. сб. **213** (8), 3–25 (2022).

[14] Abuzyarova N.F. *Differentiation operator in the Beurling space of ultradifferentiable functions of normal type on an interval*, Lobachevskii J. Math. **43**(6), 1472–1485 (2022).
[15] Абанин А.В. *Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения* (Наука, М., 2007).
[16] Абанин А.В. *Ω-ультрараспределения*, Изв. РАН, Сер. Матем. **72**(2) 207–240 (2008).
[17] Koosis P. *The logarithmic integral.* II (Cambridge Univ. Press, Cambridge 1992).

Наталья Фаирбаховна Абузярова

Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра
Российской академии наук,
ул. Чернышевского, д. 112, г. Уфа, 450008, Россия;
Уфимский университет науки и технологий,
ул. Заки Валиди, д. 32, г. Уфа, 450076, Россия,

e-mail: abnatf@gmail.com

N.F. Abuzyarova

Invariant subspaces in nonquasianalytic spaces of Ω-ultradifferentiable functions on an interval

Abstract. In this paper we consider a weakened version of the spectral synthesis for the differentiation operator in nonquasianalytic spaces of ultradifferentiable functions. We deal with the widest possible class of spaces of ultradifferentiable functions among all known ones. Namely, these are spaces of Ω-ultradifferentiable functions which have been recently introduced and explored by A.V. Abanin. For differentiation invariant subspaces in these spaces, we establlish conditions of weak spectral synthesis. As an application, we prove that a kernel of a local convolution operator admits weak spectral synthesis. We also show that a conjunction of kernels of convolution operators admits weak spectral synthesis if all generating ultradistributions have the same support equaled to $\{0\}$ and there exists one generated by an ultradistribution which characteristic function is a multiplier in the corresponding space of entire functions.

Keywords: ultradifferentiable functions, ultradistributions, Fourier-Laplace transform, invariant subspaces, spectral synthesis.

Natalia Fairbakhovna Abuzyarova

Institute of Mathematics with Computing Centre – Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences,
112 Chernyshevsky str., Ufa, 450008 Russia;
Ufa University of Science and Technology,
32 Zaki Validi str., Ufa, 450076 Russia,

e-mail: abnatf@gmail.com