Б. В. Базалий, Н. В. Краснощек, О регулярности решения задачи со свободной границей для уравнения $v_t = (v^m)_{xx}$, *Алгебра и анализ*, 2000, том 12, выпуск 2, 100–130

Алгебра и анализ
Том 12 (2000), вып. 2

О РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $v_t = (v^m)_{xx}$

© Б. В. Базалий, Н. В. Краснощек

В работе исследуются свойства гладкости решения начально-краевой задачи со свободной границей для нелинейного вырождающегося уравнения $v_t = (v^m)_{xx}$, $m > 1$, в случае одной геометрической переменной. На свободной границе выполняется условие $v = 0$, а скорость ее движения определяется законом Дарси. Устанавливаются дифференциальные свойства свободной границы в зависимости от гладкости данных задачи вплоть до начального момента времени.

Введение

В работе изучаются свойства гладкости решения краевой задачи со свободной (неизвестной) границей для нелинейного уравнения фильтрации локально по времени. Исследования по качественным свойствам решений этого уравнения имеют обширную библиографию [1]. Пусть $v(x,t)$-решение задачи Коши:

$$v_t = (v^m)_{xx}, \quad (x,t) \in R \times (0,T); \quad v(x,0) = v_o(x) \geq 0.$$

Следствием вырождения уравнения на множестве $\{v(x,t) = 0\}$ является известное свойство его решений при $m > 1$ — конечная скорость распространения возмущений. Это означает, что если в задаче Коши начальные данные $v(x,0)$ неотрицательны и имеют ограниченный носитель, то в каждый момент времени носитель решения ограничен. Таким образом возникает граница раздела областей $\{v(x,t) > 0\}$ и $\{v(x,t) = 0\}$, свободная граница, которая описывается

Ключевые слова: вырождающиеся параболические уравнения, задача со свободной границей, задача Коши, краевая задача.

Работа была частично поддержана проектом 1.4/127 ДФФД Украины и грантом INTAS 96-1060.

функциями $x = \sigma(t) = \sup_x\{v(x,t) > 0\}$, $x = \eta(t) = \inf_x\{v(x,t) > 0\}$. В работах [2–5] в случае одной геометрической переменной представлены результаты по регулярности функций $\sigma(t), \eta(t)$. В этих исследованиях регулярность границы изучалась при $t > 0$ и, таким образом, при минимальных предположениях о гладкости начальных условий. Целью нашей работы является описание свойств гладкости свободной границы на отрезке $[0,t]$, где t достаточно малое, для некоторой краевой задачи, которая моделирует задачу Коши. В связи с этим заметим, что для решения задачи Коши на свободной границе $x = \sigma(t)$, например, выполняются условия:

$$v(\sigma(t), t) = 0, \quad \sigma_t = -\frac{m}{m-1}\left(v^{m-1}(x,t)\right)_x|_{x=\sigma(t)}.$$

В рассматриваемой нами краевой задаче мы сохраняем эти условия на свободной границе, и поскольку свойства гладкости свободной границы определяются локальными свойствами решения в окрестности свободной границы , то наши результаты имеют непосредственное отношение к описанию свободной границы в задаче Коши. Более того, используя предлагаемый ниже метод, вместо задачи Коши можно было бы рассмотреть начально-краевую задачу для рассматриваемого уравнения в заранее неизвестной области $x \in (\eta(t), \sigma(t))$ и получить аналогичные результаты о регулярности свободных границ, однако объем работы при этом значительно увеличился бы.

Наши исследования приводят к следующему результату. Пусть начальное распределение $v_0(x)$ в окрестности точки $\sigma(0)$ удовлетворяет некоторым условиям согласования, монотонности и $v_{0x}, (x - \sigma(0))v_{0xx} \in H^\alpha$. Тогда свободная граница $x = \sigma(t)$ является гладкой кривой класса $H^{1+\beta}([0,T])$, $\beta < \alpha/2$, при достаточно малом T. Здесь H^l (l — нецелое) пространство гёльдеровых функций. Кроме того, гладкость свободной границы увеличивается при увеличении гладкости начального распределения.

Метод исследования основан на сведении задачи в неизвестной области к задаче в фиксированной области и последующей редукции к отысканию неподвижных точек некоторого нелинейного оператора. При этом основные аналитические трудности преодолеваются при исследовании соответствующей линейной задачи для вырождающегося параболического уравнения вида $v_t = xv_{xx} + sv_x$, $s > 0$, в области $x \in (0,l)$. Результаты по ее разрешимости, изложенные в теореме 2, могут представлять и самостоятельный интерес.

§1. Постановка задачи и основной результат

Пусть требуется найти функции $v(z,t)$ и $\sigma(t)$ по условиям:

$$
\begin{gathered}
v_t = (v^m)_{zz}, \quad m > 1,\ 0 < z < \sigma(t),\ 0 < t < T; \\
v(\sigma(t),t) = 0,\ \sigma_t(t) = -\frac{m}{m-1}\left(v^{m-1}\right)_z(\sigma(t),t), \quad 0 < t < T; \\
v(0,t) = 1, \quad \sigma(0) = \sigma_0 > 0, \quad v(z,0) = v_0(z),\ z \in (0,\sigma_0).
\end{gathered}
$$

Для дальнейшего удобно переписать эту задачу в терминах „функции давления“ $u = v^{m-1}(z,t)$. Получим

$$
\begin{gathered}
u_t = muu_{zz} + \frac{m}{m-1}u_z^2, \quad 0 < z < \sigma(t),\ 0 < t < T; \\
u(\sigma(t),t) = 0,\ \sigma_t(t) = -\frac{m}{m-1}u_z(\sigma(t),t), \quad 0 < t < T; \\
u(0,t) = 1, \quad \sigma(0) = \sigma_0 > 0; \\
u(z,0) = u_0(z) = v_0^{m-1}(z), \quad z \in (0,\sigma_0).
\end{gathered} \tag{1}
$$

Пусть в задаче (1) выполняются условия согласования первого порядка для начальной функции и условие

$$
-\infty < \frac{\partial u_0}{\partial z}(z) \le -\delta, \quad (\delta > 0). \tag{2}
$$

Задачу (1) со свободной (неизвестной) границей $z = \sigma(t)$ можно различными способами свести к задаче в фиксированной области. В рассматриваемом случае удобно ввести преобразование годографа, т.е. из равенства $u = u(z,t)$ найти функцию $z = z(u,t)$ и считать ее искомой. В силу условия (2) для гладких решений, по крайней мере при достаточно малых t, это преобразование невырожденное. Сразу же заметим, что условие строгой монотонности можно было бы заменить более слабым условием $\partial u_0/\partial z(\sigma_0) < 0$, если применить, например, способ сведения задачи со свободной границей к задаче в фиксированной области, предложенный в [6]. Доказательство нашего основного результата в своей главной части мало бы изменилось, но потребовало бы гораздо больше места. Условие $\partial u_0/\partial z(\sigma_0) < 0$ исключает так называемое „время ожидания“, когда свободная граница некоторое время неподвижна.

Обозначим $\Omega_T = \{(u,t),\, 0 < u < 1,\, 0 < t < T\}$. Непосредственно проверяется, что функция $z(u,t)$ удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{gathered}
z_u^2 z_t = m u z_{uu} - \frac{m}{m-1} z_u, \quad (u,t) \in \Omega_T; \\
z_u z_t = -\frac{m}{m-1}, \quad u = 0, \; 0 < t < T; \\
z(1,t) = 0, \quad 0 < t < T; \\
z(u,0) = z_0(u), \quad u \in (0,1),
\end{gathered} \tag{3}$$

где под функцией $z_0(u)$ понимается функция, обратная к $u_0(z)$. Очевидно, что при известной функции $z(u,t)$ свободная граница имеет представление $\sigma(t) = z(0,t)$.

Условие (2) и условия согласования для задачи (3) принимают вид:

$$\begin{gathered}
-1/\delta \le \frac{\partial z_0}{\partial u}(u) < 0, \quad u \in [0,1]; \\
z_{0u}(0)\, z_t(0,0) = -\frac{m}{m-1}, \quad z_t(0,0) = z_{0u}^{-2}\left(m u z_{0uu} - \frac{m}{m-1} z_{0u}\right)\Big|_{u=0}, \\
z_0(1) = 0, \quad \left[m z_{0uu} - \frac{m}{m-1} z_{0u}\right]\Big|_{u=1} = 0.
\end{gathered} \tag{4}$$

Для гладких решений задачи (3) краевое условие при $u = 0$ эквивалентно условию

$$u z_{uu}(u,t)\,|_{u=0} = 0.$$

Пусть $\Omega \subset R, \Omega_T = \Omega \times (0,T)$. Обозначим через $H^{\alpha,\alpha}\left(\overline{\Omega}_T\right)$ и $P^{2+\alpha,1+\alpha}\left(\overline{\Omega}_T\right)$ пространства, которые получаются замыканием множества бесконечно дифференцируемых функций соответственно в нормах:

$$\begin{aligned}
|z|_{\overline{\Omega}_T}^{(\alpha,\alpha)} &= \max_{\overline{\Omega}_T} |z(x,t)| + \langle z \rangle_{x,\overline{\Omega}_T}^{(\alpha)} + \langle z \rangle_{t,\overline{\Omega}_T}^{(\alpha)}, \\
\|z\|_{\overline{\Omega}_T}^{(2+\alpha,1+\alpha)} &= \max_{\overline{\Omega}_T} |z(x,t)| + |z_t|_{\overline{\Omega}_T}^{(\alpha,\alpha)} + |x z_{xx}|_{\overline{\Omega}_T}^{(\alpha,\alpha)} + |z_x|_{\overline{\Omega}_T}^{(\alpha,\alpha)},
\end{aligned}$$

где

$$\langle z \rangle_{x,\overline{\Omega}_T}^{(\alpha)} = \sup_{x,x',t} \frac{|z(x,t) - z(x',t)|}{|x - x'|^{\alpha}}, \quad \langle z \rangle_{t,\overline{\Omega}_T}^{(\alpha)} = \sup_{x,t,t'} \frac{|z(x,t) - z(x,t')|}{|t - t'|^{\alpha}}.$$

Через $\overset{\circ}{H}{}^{\alpha,\alpha}\left(\overline{\Omega}_T\right)$ $\left(\overset{\circ}{P}{}^{2+\alpha,1+\alpha}\left(\overline{\Omega}_T\right)\right)$ мы будем обозначать подпространство в $H^{\alpha,\alpha}\left(\overline{\Omega}_T\right)$ $\left(P^{2+\alpha,1+\alpha}\left(\overline{\Omega}_T\right)\right)$, элементы которого обращаются в нуль (вместе с производной по t) при $t=0$.

Мы будем использовать также подпространства гёльдеровых функций $H^l\left(\overline{\Omega}\right)$, $H^{l,l/2}\left(\overline{\Omega}_T\right)$, l — нецелое, определенные в [7, гл. 1, §1], и соответствующие пространства $\overset{\circ}{H}{}^{l,l/2}\left(\overline{\Omega}_T\right)$.

Обозначим старшую полунорму в пространстве $P^{2+\alpha,1+\alpha}\left(\overline{\Omega}_T\right)$ через

$$\langle\langle z\rangle\rangle_{\overline{\Omega}_T}^{(2+\alpha)}=\langle z_t\rangle_{\overline{\Omega}_T}^{(\alpha,\alpha)}+\langle z_x\rangle_{\overline{\Omega}_T}^{(\alpha,\alpha)}+\langle xz_{xx}\rangle_{\overline{\Omega}_T}^{(\alpha,\alpha)},$$

где

$$\langle z\rangle_{\overline{\Omega}_T}^{(\alpha,\alpha)}=\langle z\rangle_{x,\overline{\Omega}_T}^{(\alpha)}+\langle z\rangle_{t,\overline{\Omega}_T}^{(\alpha)}$$

есть старшая полунорма в пространстве $H^{\alpha,\alpha}\left(\overline{\Omega}_T\right),\alpha<1$.

Обозначим $E^{2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ пространство функций с нормой

$$\|z\|_{\overline{\Omega}}^{(2+\alpha)}=\max_{\overline{\Omega}}|z|+|z_x|_{\overline{\Omega}}^{(\alpha)}+|xz_{xx}|_{\overline{\Omega}}^{(\alpha)}$$

и старшей полунормой

$$\langle\langle z\rangle\rangle_{\overline{\Omega}}^{(2+\alpha)}=\langle z_x\rangle_{x,\overline{\Omega}}^{(\alpha)}+\langle xz_{xx}\rangle_{x,\overline{\Omega}}^{(\alpha)}.$$

Здесь $|z|_{\Omega}^{(\alpha)}=\max\limits_{\overline{\Omega}}|z|+\langle z\rangle_{x,\Omega}^{(\alpha)}$ — норма в $H^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Сформулируем основной результат данной работы.

Теорема 1.1. *Пусть* $z_0(u)\in E^{2+\alpha}([0,1])$ *и выполняются условия* (4). *Тогда при достаточно малых* T, $0<T\le T_0$, *где* T_0 *зависит от данных задачи, существует единственное решение задачи* (3) $z\in P^{2+\beta,1+\beta}\left(\overline{\Omega}_T\right)$, $0<\beta<\alpha/2$, *и, следовательно,* $\sigma(t)\in H^{1+\beta}([0,T])$.

Ниже мы покажем, как с увеличением гладкости начальных данных в задаче (3) увеличивается гладкость свободной границы $\sigma(t)$.

§2. Вспомогательная задача

Пусть L_s-дифференциальный оператор, действующий по правилу

$$L_s w = x^{1-s}\left(x^s w_x\right)_x = x w_{xx} + s w_x.$$

Пусть $s > 0, a, b$ — произвольные числа. Рассмотрим задачу

$$L_s w = f(x), \ \ x \in (0,l); \quad x^s w_x|_{x=0} = a, \ \ w(l) = b. \tag{5}$$

Обозначим

$$w_{(s)}(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-s}}{1-s}, & s \neq 1, \\ \ln x, & s = 1, \end{cases}$$

$$w_{(f)}(x) = \int\limits_0^x y^{-s} dy \int\limits_0^y \xi^{s-1} f(\xi)\, d\xi,$$

тогда решение задачи (5) имеет вид

$$w(x) = b + a\left(w_{(s)}(x) - w_{(s)}(l)\right) + w_{(f)}(x) - w_{(f)}(l).$$

Легко видеть, что

$$\frac{dw_{(f)}}{dx} = x^{-s}\int\limits_0^x \xi^{s-1} f(\xi)\, d\xi = \int\limits_0^1 y^{s-1} f(xy)\, dy,$$

так что $w'_{(f)}(0) = f(0)/s$ и, следовательно из уравнения получаем, что $\lim\limits_{x\to 0} x w''_{(f)}(x) = 0$. Таким образом, для функции $w_{(f)}(x)$ условия $x^s w'_{(f)}(x)|_{x=0} = 0$ и $x w''_{(f)}(x)|_{x=0} = 0$ эквивалентны.

Лемма 2.1. *Пусть* $a = 0$, b — *произвольное число,* $s > 0$, $f \in H^\alpha([0,l])$, *тогда существует* $w \in E^{2+\alpha}([0,l])$ — *единственное гладкое решение задачи* (5), *справедливо неравенство*

$$\|w\|^{(2+\alpha)}_{[0,l]} \leq c(|f|^{(\alpha)}_{[0,l]} + b)$$

и $\lim\limits_{x\to 0} xw_{xx}(x) = 0$.

Для доказательства единственности достаточно предположений об абсолютной непрерывности функции $w(x)$ и конечности интеграла

$$\int_0^l x^s |w_x(x)|^2 \, dx.$$

В самом деле, пусть $\widetilde{w} = w_1 - w_2$, где w_1, w_2 — два различные решения задачи (5), тогда

$$L_s\widetilde{w} = 0, \ x \in (0,l); \qquad x^s\widetilde{w}_x|_{x=0} = 0, \ \widetilde{w}(l) = 0.$$

После умножения уравнения $L_s\widetilde{w} = 0$ на $x^{s-1}\widetilde{w}(x)$ и интегрирования по частям получаем

$$\int_0^l x^s |\widetilde{w}_x(x)|^2 \, dx = 0,$$

и, следовательно, $\widetilde{w}(x) = 0$.

§3. Модельная задача

Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} Lu = u_t - xu_{xx} - su_x = f(x,t), \quad (x,t) \in D_T = \{x \in R_+, t \in (0,T)\}; \\ x^s u_x|_{x=0} = 0, \ t \in (0,T); \quad u(x,0) = 0, \ x \in R_+, \end{gathered} \tag{6}$$

где $f(x,t) \in \overset{\circ}{H}{}^{\alpha,\alpha}(\overline{D}_T)$ и имеет компактный носитель по переменной x, ограниченный по t. Решение задачи (6) выражается в виде объемного потенциала

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau) \, d\xi.$$

Чтобы вычислить ядро G этого потенциала, совершим в (6) преобразование Лапласа по переменной t. Преобразованные функции u, f будем обозначать соответственно $\widehat{u}$ и $\widehat{f}$. Задача (6) перейдет в следующую задачу:

$$\begin{gathered} p\widehat{u}(x,p) - x\widehat{u}_{xx}(x,p) - s\widehat{u}_x(x,p) = \widehat{f}(x,p); \\ x^s u_x(x,p)|_{x=0} = 0, \ \widehat{u}(x,p) \to 0, \quad x \to +\infty. \end{gathered}$$

Решение однородного уравнения данного вида можно выразить с помощью функций Бесселя [8, с. 985, 8.491(6)]. Далее, для преобразованной задачи можно построить функцию Грина, после чего применить обратное преобразование Лапласа. В результате получим функцию Грина для задачи (6), которая имеет вид (ср. [9, гл. 3, §3])

$$G(x,\xi,t-\tau) = \frac{1}{t-\tau}\left(\frac{x}{\xi}\right)^{q/2} \exp\left(-\frac{x+\xi}{t-\tau}\right) I_{-q}\left(2\frac{x^{1/2}\xi^{1/2}}{t-\tau}\right), \quad q = 1-s,$$

где $I_{-q}(x)$ – функция Бесселя мнимого аргумента.

3.1. Оценки функции Грина. Нетрудно проверить с помощью формулы (6.643(2)) из [8], что функция Грина удовлетворяет равенству

$$\int\limits_0^\infty G(x,\xi,t)\,d\xi = 1. \tag{7}$$

Лемма 3.1. *Для функции Грина справедливы оценки:*

$$|D_t^r G(x,\xi,t)| \le c\frac{u^{-2q}}{t^{1+r}} e^{-\gamma(u-v)^2} \begin{cases} 1, & 0 < 2uv < 1, \\ (2uv)^{q-1/2}, & 2uv \ge 1, \end{cases} \tag{8}$$

$$|D_t^r D_x G(x,\xi,t)| \le c\frac{u^{-2q}}{t^{2+r}} e^{-\gamma(u-v)^2} \begin{cases} (1+u^2), & 0 < 2uv < 1, \\ (2uv)^{q-1/2}(1+u/v), & 2uv \ge 1, \end{cases} \tag{9}$$

где $u = (\xi/t)^{1/2}$, $v = (x/t)^{1/2}$, $\gamma \in (0,1)$.

Доказательство. При доказательстве мы будем использовать известную асимптотику функции $I_{-q}(z)$:

$$I_{-q}(z) \le \begin{cases} cz^{-q}, & z < 1, \\ c_1 e^z\left(z^{-1/2} + c_2(q) z^{-3/2}\right), & z \ge 1 \end{cases} \tag{10}$$

и равенство

$$\frac{d}{dz}\left(z^q I_{-q}\right) = z^q I_{-q+1}(z). \tag{11}$$

Представим функцию Грина в виде

$$G(x,\xi,t) = 2^{-q}t^{-1}u^{-2q}e^{-\left(u^2+v^2\right)}(2uv)^q I_{-q}(2uv),$$

тогда с помощью (11) получим

$$G_x(x,\xi,t) = 2^{-q}t^{-2}u^{-2q}e^{-\left(u^2+v^2\right)}(2uv)^q\left[\frac{u}{v}I_{-q+1}(2uv) - I_{-q}(2uv)\right].$$

Теперь из этого представления с помощью (10) получим оценку (9) при $r = 0$.

Дифференцирование функции $G(x,\xi,t)$ по t дает

$$\begin{aligned}
&G_t(x,\xi,t)\\
&\quad = 2^{-q}t^{-2}u^{-2q}e^{-\left(u^2+v^2\right)}(2uv)^q\\
&\qquad \times\left[(q-1)I_{-q}(2uv) - 2uvI_{-q+1}(2uv) + \left(u^2+v^2\right)I_{-q}(2uv)\right]\\
&\quad = 2^{-q}t^{-2}u^{-2q}e^{-\left(u^2+v^2\right)}(2uv)^q\\
&\qquad \times\left[(q-1)I_{-q}(2uv) + (u-v)^2 I_{-q}(2uv) - 2uv\left(I_{-q+1}(2uv) - I_{-q}(2uv)\right)\right].
\end{aligned}$$

Используя оценки (10), а также простые неравенства вида

$$\begin{aligned}
\exp\left(-u^2-v^2\right) &\le c\exp[-(u-v)^2], \quad u \ge 0,\ v \ge 0,\\
z\exp(-z) &\le c\exp(-z/2), \quad z \ge 0,
\end{aligned}$$

получим

$$\left|(u-v)^2 e^{-\left(u^2+v^2\right)}I_{-q}(2uv)\right| \le c\begin{cases} e^{-\frac{1}{2}(u-v)^2}(2uv)^{-1/2}, & 2uv \ge 1,\\ e^{-(u-v)^2}(2uv)^{-q}, & 0 < 2uv \le 1,\end{cases}$$

$$\left|2uve^{-\left(u^2+v^2\right)}\left(I_{-q+1}(2uv) - I_{-q}(2uv)\right)\right| \le ce^{-(u-v)^2}\begin{cases}(2uv)^{-1/2}, & 2uv \ge 1,\\ (2uv)^{-q}, & 0 < 2uv \le 1.\end{cases}$$

Из этих неравенств следует неравенство (8) при $r = 1$. Аналогично доказываются остальные оценки в (8) и (9). •

Лемма 3.2. *Функция Грина* $G(x,\xi,t)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\int_0^\infty |D_t^r G(x,\xi,t)|\, d\xi \le ct^{-r}, \quad r \ge 0, \tag{12}$$

$$\int_0^\infty |uG(x,\xi,t)|\, d\xi \le c\max(1,v), \quad u = (\xi/t)^{1/2}, \ v = (x/t)^{1/2}. \tag{13}$$

Доказательство. Заметим сначала, что при $\alpha > -1$ справедливы неравенства:

$$J_1(v) = \int_{1/2v}^\infty u^\alpha e^{-\gamma(u-v)^2} du \le c \begin{Bmatrix} v^\alpha, & v \ge 1, \\ e^{-\gamma/16v^2}, & v \le 1 \end{Bmatrix} \le cv^\alpha, \tag{14}$$

$$J_2(v) = \int_0^{1/2v} u^\alpha e^{-\gamma(u-v)^2} du \le c \begin{Bmatrix} e^{-\gamma v^2}, & v \ge 1, \\ 1, & v \le 1 \end{Bmatrix} \le ce^{-\gamma v^2}. \tag{15}$$

Действительно, например,

$$J_1(v) = \int_{-v+1/2v}^\infty (\xi+v)^\alpha e^{-\gamma\xi^2} d\xi \le \int_{-v+1/2v}^\infty e^{-\gamma\xi^2/2} \max[(\xi+v)^\alpha e^{-\gamma\xi^2/2}] d\xi.$$

Можно убедиться в том, что $\max[(\xi+v)^\alpha e^{-\gamma\xi^2/2}] \le cv^\alpha$ при $v > 1$, $\xi \in (-v+1/2v, \infty)$, поэтому

$$J_1(v) \le cv^\alpha \int_{-\infty}^\infty e^{-\gamma\xi^2/2} d\xi \le cv^\alpha.$$

При $v \le 1$ в интеграле $J_1(v)$ сделаем замену $2uv = z$. Получим

$$\begin{aligned} J_1(v) &= 2^{-\alpha-1} v^{-\alpha-1} \int_1^\infty z^\alpha \exp\left[-\gamma\left(\frac{z^2}{4v^2} - z + v^2\right)\right] dz \\ &\le cv^{-\alpha-1} e^{-\gamma v^2} e^{-\gamma/8v^2} \int_1^\infty z^\alpha \exp\left(-\frac{\gamma z^2}{8v^2} + \gamma z\right) dz \\ &\le ce^{-\gamma/16v^2} \int_1^\infty z^\alpha \exp\left(-\frac{\gamma z^2}{8} + \gamma z\right) dz \\ &\le ce^{-\gamma/16v^2}. \end{aligned}$$

Аналогично доказываются неравенства (15). При доказательстве (12) применим последовательно оценки (8), (14), (15). Получим

$$\int_0^\infty |D_t^r G(x,\xi,t)|\,d\xi$$
$$\le ct^{-r}\int_0^{1/2v} u^{1-2q}e^{-\gamma(u-v)^2}du + ct^{-r}\int_{1/2v}^\infty u^{1-2q}(uv)^{q-1/2}\,e^{-\gamma(u-v)^2}du$$
$$\le ct^{-r}.$$

С использованием тех же оценок получим

$$\int_0^\infty |uG(x,\xi,t)|\,d\xi \le c(e^{-\gamma v^2}+v) \le c\max(1,v)\,,$$

что и доказывает неравенство (13). •

3.2. Оценки объемного потенциала. Прежде чем написать представление для производной по времени объемного потенциала, докажем следующий факт. Для произвольных $x \in R_+, t \in (0,T)$ и финитной функции $f(x,t)$ выполняется равенство

$$\lim_{\tau\to+\infty}\int_0^\infty G(x,\xi,\tau)\,f(\xi,t)\,d\xi = 0. \tag{16}$$

Действительно, используя оценки (10), получим

$$|G(x,\xi,\tau)| \le \frac{c}{\tau}\left(\frac{x}{\xi}\right)^{q/2}\exp\left(-\frac{x+\xi}{\tau}\right)\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{(x\xi)^{-q/2}}{\tau^{-q}}, & 0<2\dfrac{(x\xi)^{1/2}}{\tau}<1,\\ \exp\left[2\dfrac{(x\xi)^{1/2}}{\tau}\right], & 2\dfrac{(x\xi)^{1/2}}{\tau}\ge 1\end{array}\right\}$$
$$\le c\left\{\begin{array}{ll}\tau^{-s}\xi^{s-1}, & 0<2\dfrac{(x\xi)^{1/2}}{\tau}<1,\\ \tau^{-s-1}\xi^{s-1/2}x^{1/2}, & x^{-1/2}\le 2\xi^{1/2}/\tau.\end{array}\right.$$

Следовательно, при $\tau \ge 1$

$$|G(x,\xi,\tau)| \le c\tau^{-s}(1+x^{1/2})\max\{\xi^{s-1},\xi^{s-1/2}\},$$

и, принимая во внимание компактность носителя функции $f(x,t)$, получим

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^\infty G(x,\xi,\tau)\, f(\xi,t)\, d\xi\right| \\
&\quad \le c\tau^{-s}(1+x^{1/2}) \max\left\{ \int_0^\infty \xi^{s-1}\,|f(\xi,t)|\, d\xi, \int_0^\infty \xi^{s-1/2}\,|f(\xi,t)|\, d\xi \right\} \\
&\quad \le c\tau^{-s}(1+x^{1/2}),
\end{aligned}$$

откуда и следует (16).

Из принадлежности функции $f(x,t)$ классу $\overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^{\alpha,\alpha}(\overline{D}_T)$ следует, что ее можно продолжить нулем при $t<0$ с сохранением класса, поэтому объемный потенциал можно записать в виде

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)\, f(\xi,\tau)\, d\xi. \tag{17}$$

Пусть h — произвольное положительное число, тогда последовательность функций

$$u_h(x,t) = \int_{-\infty}^{t-h} d\tau \int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)\, f(\xi,\tau)\, d\xi$$

сходится к функции $u(x,t)$. Имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_h}{\partial t}(x,t) \\
&\quad = \int_{-\infty}^{t-h} d\tau \int_0^\infty G_t(x,\xi,t-\tau)\,(f(\xi,\tau)-f(\xi,t))\, d\xi \\
&\qquad + \int_{-\infty}^{t-h} d\tau \int_0^\infty G_t(x,\xi,t-\tau)\, f(\xi,t)\, d\xi + \int_0^\infty G(x,\xi,h)\, f(\xi,t-h)\, d\xi \\
&\quad = \int_{-\infty}^{t-h} d\tau \int_0^\infty G_t(x,\xi,t-\tau)\,(f(\xi,\tau)-f(\xi,t))\, d\xi + \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\infty G(x,\xi,\tau)\, f(\xi,t)\, d\xi \\
&\qquad + \int_0^\infty G(x,\xi,h)\,(f(\xi,t-h)-f(\xi,t))\, d\xi.
\end{aligned}$$

Последнее слагаемое в этой сумме оценивается с помощью (12) при $r = 0$, так что

$$\left| \int_0^\infty G(x,\xi,h)\,(f(\xi,t-h) - f(\xi,t))\,d\xi \right| \le c\,\langle f\rangle_t^{(\alpha)}\,h^\alpha.$$

Следовательно, учитывая (16), получаем, переходя к пределу при $h \to 0$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_0^\infty G_t(x,\xi,t-\tau)\,(f(\xi,\tau) - f(\xi,t))\,d\xi \tag{18}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty G_\tau(x,\xi,\tau)\,(f(\xi,t-\tau) - f(\xi,t))\,d\xi. \tag{19}$$

Лемма 3.3. *Потенциал* (19) *удовлетворяет оценке*

$$\langle u_t\rangle_x^{(\alpha)} \le c\,\langle f\rangle_t^{(\alpha)}. \tag{20}$$

Доказательство. Запишем разность $u_t(x+h,t) - u_t(x,t)$ в виде

$$\begin{aligned} &u_t(x+h,t) - u_t(x,t) \\ &= \int_0^h d\tau \int_0^\infty G_\tau(x+h,\xi,\tau)\,[f(\xi,t-\tau) - f(\xi,t)]\,d\xi \\ &\quad - \int_0^h d\tau \int_0^\infty G_\tau(x,\xi,\tau)\,[f(\xi,t-\tau) - f(\xi,t)]\,d\xi \\ &\quad + \int_h^\infty d\tau \int_0^\infty [G_\tau(x+h,\xi,\tau) - G_\tau(x,\xi,\tau)]\,[f(\xi,t-\tau) - f(\xi,t)]\,d\xi \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Интегралы I_1 и I_2 оцениваются подобным образом с помощью оценки (12). Например,

$$|I_1| \le c\,\langle f\rangle_t^{(\alpha)} \int_0^h \tau^{\alpha-1}\,d\tau \le c\,\langle f\rangle_t^{(\alpha)}\,h^\alpha.$$

Для слагаемого I_3 имеем

$$|I_3| = \left| \int\limits_h^\infty d\tau \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^h G_{\tau\sigma}(x+\sigma,\xi,\tau)\, d\sigma \right) [f(\xi,t-\tau) - f(\xi,t)]\, d\xi \right|$$
$$\leq \langle f\rangle_t^{(\alpha)} \int\limits_h^\infty d\tau \int\limits_0^h d\sigma \int\limits_0^\infty |G_{\tau\sigma}(x+\sigma,\xi,\tau)|\, \tau^\alpha d\xi.$$

Сделаем замену переменных $\xi = u^2\tau$ и обозначим $v = (x+\sigma)^{1/2}\tau^{-1/2}$. С помощью оценки (9) получим

$$|I_3| \leq c\langle f\rangle_t^{(\alpha)} \int\limits_h^\infty \tau^{\alpha-2} d\tau \int\limits_0^h d\sigma \int\limits_0^{1/2v} u^{1-2q} e^{-\gamma(u-v)^2} \left(1+u^2\right) du$$
$$+ c\langle f\rangle_t^{(\alpha)} \int\limits_h^\infty \tau^{\alpha-2} d\tau \int\limits_0^h d\sigma \int\limits_{1/2v}^\infty u^{1-2q} e^{-\gamma(u-v)^2} \left(1+\frac{u}{v}\right) (uv)^{q-1/2} du$$
$$= I_3^{(1)} + I_3^{(2)}.$$

Для оценки первого слагаемого справа используем оценку (15)

$$|I_3^{(1)}| \leq c\langle f\rangle_t^{(\alpha)} \int\limits_h^\infty \tau^{\alpha-2} d\tau \int\limits_0^h \exp\left(-\gamma v^2\right)\Big|_{v=(x+\sigma)^{1/2}\tau^{-1/2}} d\sigma \leq c\langle f\rangle_t^{(\alpha)} h \int\limits_h^\infty \tau^{\alpha-2} d\tau$$
$$\leq c\langle f\rangle_t^{(\alpha)} h^\alpha,$$

а для оценки второго слагаемого оценку (14)

$$\left|I_3^{(2)}\right| \leq c\langle f\rangle_t^{(\alpha)} \int\limits_h^\infty \tau^{\alpha-2} d\tau \int\limits_0^h d\sigma \leq c\langle f\rangle_t^{(\alpha)} h^\alpha.$$

Из приведенных оценок следует неравенство (20). •

Лемма 3.4. *Потенциал* (18) *удовлетворяет оценке*

$$\langle u_t\rangle_t^{(\alpha)} \le c\,\langle f\rangle_t^{(\alpha)}. \tag{21}$$

Доказательство. Воспользуемся представлением

$$\begin{aligned}
&u_t(x,t+h)-u_t(x,t)\\
&\quad=\int\limits_{t-h}^{t+h} d\tau \int\limits_0^\infty G_t\,(x,\xi,t+h-\tau)\,[f(\xi,\tau)-f(\xi,t+h)]\,d\xi\\
&\qquad-\int\limits_{t-h}^{t} d\tau \int\limits_0^\infty G_t\,(x,\xi,t-\tau)\,[f\,(\xi,\tau)-f\,(\xi,t)]\,d\xi\\
&\qquad+\int\limits_{-\infty}^{t-h} d\tau \int\limits_0^\infty [G_t\,(x,\xi,t+h-\tau)-G_t\,(x,\xi,t-\tau)]\,[f\,(\xi,\tau)-f\,(\xi,t)]\,d\xi\\
&\qquad+\int\limits_{-\infty}^{t-h} d\tau \int\limits_0^\infty G_t\,(x,\xi,t+h-\tau)\,[f\,(\xi,t)-f\,(\xi,t+h)]\,d\xi\\
&\quad=\sum_{k=1}^{4} I_k.
\end{aligned}$$

С помощью оценок (12) оценим первые три слагаемых

$$\begin{aligned}
|I_1| &\le c\,\langle f\rangle_t^{(\alpha)} \int\limits_{t-h}^{t+h} d\tau\,|t+h-\tau|^{\alpha-1}\\
&\le c\,\langle f\rangle_t^{(\alpha)}\,h^\alpha,\\
|I_2| &\le c\,\langle f\rangle_t^{(\alpha)} \int\limits_{t-h}^{t} d\tau\,|t-\tau|^{\alpha-1}\\
&\le c\,\langle f\rangle_t^{(\alpha)}\,h^\alpha,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|I_3| &\le c\langle f\rangle_t^{(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{t-h} d\tau \int\limits_0^h d\sigma \int\limits_0^\infty |G_{\theta\theta}(x,\xi,\theta)|\,|_{\theta=t-\tau+\sigma}\,|t-\tau|^\alpha\, d\xi \\
&\le c\langle f\rangle_t^{(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{t-h} |t-\tau|^\alpha\, d\tau \int\limits_0^h (t-\tau+\sigma)^{-2}\, d\sigma \\
&\le c\langle f\rangle_t^{(\alpha)} h^\alpha.
\end{aligned}
$$

В интеграле I_4 поменяем порядок интегрирования и воспользуемся (16) и (12). В итоге получим

$$
\begin{aligned}
|I_4| &= \left| \int\limits_0^\infty [f(\xi,t)-f(\xi,t+h)] \int\limits_{2h}^\infty G_\tau(x,\xi,\tau)\, d\tau \right| \\
&\le \int\limits_0^\infty |G(x,\xi,2h)|\,|f(\xi,t)-f(\xi,t+h)|\, d\xi \\
&\le c\langle f\rangle_t^{(\alpha)} h^\alpha.
\end{aligned}
$$

Полученные оценки доказывают (21). •

Убедимся в том, что объемный потенциал $u(x,t)$ удовлетворяет граничному условию задачи (6) в точке $x=0$. Вследствие равенства (7)

$$
\int\limits_0^\infty G_x(x,\xi,t)\, d\xi = 0
$$

получаем

$$
u_x(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\infty G_x(x,\xi,t-\tau)\,[f(\xi,\tau)-f(x,\tau)]\, d\xi. \tag{22}
$$

Обозначим $D_{R,T} = \{(x,t) : (x,t) \in D_T,\ 0 < x < R\}$.

Лемма 3.5. *Для потенциала* (22) *выполняется оценка*

$$
\max_{D_{R,T}} |u_x(x,t)| \le c\langle f\rangle_x^{(\alpha)} (T^\alpha + R^{\alpha/2}T^{\alpha/2}). \tag{23}
$$

Доказательство. В интеграле (22) сделаем замену переменных $u^2 = \xi/(t-\tau)$, обозначим $v^2 = x/(t-\tau)$ и воспользуемся оценкой (9) при $r = 0$. Получим

$$
\begin{aligned}
&|u_x(x,t)| \\
&\quad \le c\langle f\rangle_x^{(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\, d\tau \int_0^{1/2v} u^{1-2q} e^{-\gamma(u-v)^2} \left(1+u^2\right) \left|u^2-v^2\right|^{\alpha} du \\
&\quad + c\langle f\rangle_x^{(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\, d\tau \int_{1/2v}^{\infty} u^{1-2q} (uv)^{q-1/2} e^{-\gamma(u-v)^2} \left(1+\frac{u}{v}\right) \left|u^2-v^2\right|^{\alpha} du \\
&\quad = c\langle f\rangle_x^{(\alpha)} (I_1 + I_2).
\end{aligned}
$$

Вследствие неравенства $z^{\alpha}\exp\left(-z^2\right) \le c\exp\left(-z^2/2\right)$ и оценки (15) получаем

$$
\begin{aligned}
|I_1| &\le c\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\, d\tau \int_0^{1/2v} u^{1-2q}\left(1+u^2\right)(u+v)^{\alpha} e^{-\gamma(u-v)^2/2} du \\
&\le c\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\, d\tau \int_0^{1/2v} u^{1-2q}\left(1+u^2\right)\max\left(u^{\alpha}, v^{\alpha}\right) e^{-\gamma(u-v)^2/2} du \\
&\le c\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \max\left(1, v^{\alpha}\right) e^{-\gamma v^2/2} d\tau \le c\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\, d\tau \\
&\le ct^{\alpha}.
\end{aligned}
$$

При оценке второго слагаемого применим оценку (14), получим

$$
|I_2| \le c\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left(\frac{x}{t-\tau}\right)^{\alpha/2} d\tau \le c x^{\alpha/2} t^{\alpha/2},
$$

что и доказывает неравенство (23). •

Из оценки (23) следует, что для функции $u(x,t)$ выполняется условие

$$
\lim_{x\to 0} x^s u_x(x,t) = 0.
$$

При каждом t функцию $u(x,t)$ можно рассматривать как решение задачи

$$xu_{xx} + su_x = u_t - f(x,t) = F(x,t).$$

Как следует из рассуждений при доказательстве леммы 2.1,

$$\langle u_x\rangle^{(\alpha,\alpha)} \le c\langle F\rangle^{(\alpha,\alpha)},$$

поэтому, принимая во внимание леммы 3.3,3.4, получим

$$\langle u_x\rangle^{(\alpha,\alpha)} \le c\langle f\rangle^{(\alpha,\alpha)}. \tag{24}$$

Таким образом, на основании лемм 3.3, 3.4, неравенства (24) и леммы 2.1 можно сформулировать следующее

Утверждение 3.1. *Для решения $u(x,t)$ модельной задачи справедлива оценка*

$$\langle\langle u\rangle\rangle^{(2+\alpha)}_{D_T} \le c\langle f\rangle^{(\alpha,\alpha)}_{D_T}, \tag{25}$$

и

$$\lim_{x\to 0} xu_{xx}(x,t) = 0.$$

В дальнейшем нам понадобится оценка констант Гёльдера функции $u_x(x,t)$ вне окрестности точки $x=0$. Пусть $\varepsilon \in (0,1]$, $R(-\varepsilon) = (\varepsilon,\infty)$, $D(-\varepsilon)_T = R(-\varepsilon)\times(0,T)$, $T \le \varepsilon \le 1$.

Лемма 3.6. *На множестве $D(-\varepsilon)_T$ для решения задачи* (6) *выполняется оценка*

$$\langle u_x\rangle^{(\alpha,\alpha)} \le cT^{(1-\alpha)/2}(\varepsilon^{-1/2} + \varepsilon^{-3(1-\alpha)/4})\langle f\rangle^{(\alpha,\alpha)}. \tag{26}$$

Доказательство. Введем бесконечно дифференцируемую функцию $\chi(x)$ такую, что

$$\begin{aligned} &\chi(x) = 0, && x\in[0,\varepsilon/2];\\ &\chi(x) = 1, && x\in[\varepsilon,\infty);\\ &|D^r\chi(x)| \le c(r)/\varepsilon^r. \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $v(x,t) = \chi(x)\, u(x,t)$. Так как $v(x,t) = 0$ при $x \le \varepsilon/2$, можно считать, что $v(x,t)$ есть решение задачи Коши

$$v_t - \varepsilon v_{xx} = F(x,t), \ (x,t) \in R \times (0,T); \quad v(x,0) = 0, \ x \in R,$$

где

$$F(x,t) = (su_x + f)\,\chi(x) + \frac{x-\varepsilon}{x}\chi(x)\, xu_{xx} - \varepsilon\,(2u_x\chi(x) + u\chi_{xx}(x)).$$

Как следует из результатов [7, гл. 4, §2], решение задачи Коши $v(x,t)$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{H}{}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(R_T)$, и, более того, в нашем случае имеют место оценки

$$\langle v_x\rangle_t^{((1+\alpha)/2)} \le \frac{c}{\varepsilon^{1/2}} \langle F\rangle_t^{(\alpha)}, \tag{27}$$

$$\langle v_{xx}\rangle_t^{(\alpha)} \le \frac{c}{\varepsilon} \langle F\rangle_t^{(\alpha)}. \tag{28}$$

Из вида функции $F(x,t)$ следует, что

$$\langle F\rangle_t^{(\alpha)} \le c\big(\langle f\rangle_t^{(\alpha)} + \langle u_x\rangle_t^{(\alpha)} + \langle xu_{xx}\rangle_t^{(\alpha)} + \varepsilon^{-1}\langle u\rangle_t^{(\alpha)}\big).$$

Воспользуемся известным фактом, что для функции $u \in \overset{\circ}{H}{}^{\beta,\beta}(\overline{\Omega}_T)$ при $\alpha < \beta$ справедливо неравенство

$$\langle u\rangle^{(\alpha,\alpha)} \le cT^{\beta-\alpha}\langle u\rangle^{(\beta,\beta)}, \tag{29}$$

а для функций $u \in \overset{\circ}{H}{}^{l,l/2}(\overline{\Omega}_T)$ при $l' < l$ — неравенство

$$\langle u\rangle^{(l')} \le cT^{(l-l')/2}\langle u\rangle^{(l)}. \tag{30}$$

Более того, для $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}$ имеем

$$\langle u\rangle_x^{((1+\alpha)/2)} \le T^{(1+\alpha)/4}(\langle u\rangle_t^{((1+\alpha)/2)} + \langle u_x\rangle_t^{(\alpha/2)}). \tag{31}$$

С помощью (25) и (29) получаем, с учетом условия $T \leq \varepsilon$,

$$\langle F\rangle_t^{(\alpha)} \leq c\langle f\rangle^{(\alpha,\alpha)},$$

и, следовательно, из (27), поскольку $u(x,t) = v(x,t)$ при $x \in R(-\varepsilon)$, вытекает

$$\langle u_x\rangle_{t,D(-\varepsilon)_T}^{((1+\alpha)/2)} \leq c\varepsilon^{-1/2}\langle f\rangle^{(\alpha,\alpha)}.$$

Поскольку $v_x \in \overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}$, то из (31), (28) и (29) следует

$$\begin{aligned}\langle u_x\rangle_{x,D(-\varepsilon)_T}^{((1+\alpha)/2)} &= \langle v_x\rangle_{x,D(-\varepsilon)_T}^{((1+\alpha)/2)} \leq cT^{(1+\alpha)/4}\left(\langle v_x\rangle_t^{((1+\alpha)/2)} + \langle v_{xx}\rangle_t^{(\alpha/2)}\right)\\ &\leq cT^{(1+\alpha)/4}(\varepsilon^{-1/2} + T^{\alpha/2}\varepsilon^{-1})\langle f\rangle^{(\alpha,\alpha)}.\end{aligned}$$

Снова используя (29), получим в области $D(-\varepsilon)_T$ при $T \leq \varepsilon \leq 1$

$$\langle u_x\rangle^{(\alpha,\alpha)} \leq cT^{(1-\alpha)/2}(\varepsilon^{-1/2} + \varepsilon^{-3(1-\alpha)/4})\langle f\rangle^{(\alpha,\alpha)},$$

что и требовалось доказать. •

Следствие 3.1. *Пусть* $v \in \overset{\circ}{\mathrm{P}}{}^{2+\alpha,1+\alpha}(\overline{D}_T)$ *и* $T \leq \varepsilon \leq 1$, *тогда имеет место оценка*

$$\langle v_x\rangle_{D(-\varepsilon)_T}^{(\alpha,\alpha)} \leq cT^{(1-\alpha)/2}(\varepsilon^{-1/2} + \varepsilon^{-3(1-\alpha)/4})\langle\langle v\rangle\rangle_{D_T}^{(2+\alpha)}.$$

В самом деле, в силу оценки (26) имеем

$$\begin{aligned}\langle v_x\rangle_{D(-\varepsilon)_T}^{(\alpha,\alpha)} &\leq cT^{(1-\alpha)/2}(\varepsilon^{-1/2} + \varepsilon^{-3(1-\alpha)/4})\langle Lv\rangle_{D_T}^{(\alpha,\alpha)}\\ &\leq cT^{(1-\alpha)/2}(\varepsilon^{-1/2} + \varepsilon^{-3(1-\alpha)/4})\langle\langle v\rangle\rangle_{D_T}^{(2+\alpha)}.\end{aligned}$$

3.3. Оценки потенциала.

$$g(x,t) = \int_0^\infty G(x,\xi,t)\,\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{32}$$

Для функции $\varphi(\xi)$ с компактным носителем из $(0,l)$ мы получим оценки функции $g(x,t)$. При оценке константы Гёльдера по t мы воспользуемся тем, что для функции $v(t)$, определенной на $[0,T]$, справедливо неравенство

$$\langle v\rangle_t^{(\alpha)} \leq c\sup_t\left|t^{1-\alpha}v_t(t)\right|, \tag{33}$$

если только правая часть имеет смысл.

Лемма 3.7. *Для функции* $g(x,t)$ *справедлива оценка*

$$\langle g\rangle_{t,D(l)_T}^{(\alpha/2)} \le c\max(T^{\alpha/2}, l^{\alpha/2})\langle\varphi\rangle_x^{(\alpha)}, \quad D(l)_T = (0,l)\times(0,T). \tag{34}$$

Доказательство. В соответствии с (7) имеем

$$g(x,t) = \int_0^\infty G(x,\xi,t)\left[\varphi(\xi) - \varphi(x)\right]d\xi + \varphi(x).$$

Далее, используя лемму 3.1 и неравенства (14), (15), получим неравенство

$$\begin{aligned}
&\left|t^{1-\alpha/2}\int_0^\infty G_t(x,\xi,t)\left[\varphi(\xi)-\varphi(x)\right]d\xi\right| \\
&\le c\langle\varphi\rangle_x^{(\alpha)} t^{\alpha/2}\int_0^{1/2v} u^{1-2q}e^{-\gamma(u-v)^2}\left|u^2-v^2\right|^\alpha du \\
&\quad + c\langle\varphi\rangle_x^{(\alpha)} t^{\alpha/2}\int_{1/2v}^\infty u^{1-2q}(uv)^{q-1/2}e^{-\gamma(u-v)^2}\left|u^2-v^2\right|^\alpha du \\
&\le c\langle\varphi\rangle_x^{(\alpha)} t^{\alpha/2}\left(\max(1,v^\alpha)+v^\alpha\right) \le c\langle\varphi\rangle_x^{(\alpha)}\max(t^{\alpha/2}, x^{\alpha/2}),
\end{aligned}$$

что в соответствии с (33) дает оценку (34). •

Лемма 3.8. *Для функции* $g(x,t)$ *справедлива оценка*

$$\langle g\rangle_{x,D(l)_T}^{(\alpha/2)} \le c\max(T^{\alpha/2}, l^{\alpha/2})\langle\varphi\rangle_x^{(\alpha)}. \tag{35}$$

Доказательство. Для разности $g(x+h,t) - g(x,t)$ сначала рассмотрим случай $h \le t$. Имеем

$$g(x+h,t) - g(x,t) = \int_x^{x+h} d\theta\int_0^\infty G_\theta(\theta,\xi,t)\left[\varphi(\xi) - \varphi(\theta)\right]d\xi.$$

Обозначим $v_1 = (\theta/t)^{1/2}$. Используя те же оценки, что и в предыдущей лемме, получим

$$
\begin{aligned}
&|g(x+h,t) - g(x,t)| \\
&\quad \le c\langle\varphi\rangle_x^{(\alpha)} \int_x^{x+h} d\theta \int_0^{1/2v_1} t^{\alpha-1}\left(1+u^2\right) u^{1-2q} e^{-\gamma(u-v_1)^2} \left|u^2 - v_1^2\right|^\alpha du \\
&\quad + c\langle\varphi\rangle_x^{(\alpha)} \int_x^{x+h} d\theta \int_{1/2v_1}^{\infty} t^{\alpha-1} u^{1-2q} (uv_1)^{q-1/2} \left(1+\frac{u}{v_1}\right) e^{-\gamma(u-v_1)^2} \left|u^2 - v_1^2\right|^\alpha du \\
&\quad \le c\langle\varphi\rangle_x^{(\alpha)} \int_x^{x+h} \max(t^{\alpha-1}, \theta^{\alpha/2} t^{-1+\alpha/2}) d\theta \le c l^{\alpha/2} h^{\alpha/2} \langle\varphi\rangle_x^{(\alpha)}.
\end{aligned}
$$

При $h \ge t$ имеем

$$
\begin{aligned}
&\frac{|g(x+h,t) - g(x,t)|}{h^{\alpha/2}} \\
&\quad \le \frac{|g(x+h,t) - g(x+h,0)|}{t^{\alpha/2}} \left(\frac{t}{h}\right)^{\alpha/2} \\
&\quad + \frac{|g(x,t) - g(x,0)|}{t^{\alpha/2}} \left(\frac{t}{h}\right)^{\alpha/2} + \frac{|g(x+h,0) - g(x,0)|}{h^{\alpha/2}} \\
&\quad \le 2\langle g\rangle_t^{(\alpha/2)} + \langle\varphi\rangle_x^{(\alpha/2)}.
\end{aligned}
$$

Здесь мы также воспользовались тем, что

$$
\lim_{t\to 0} \int_0^\infty G(x,\xi,t)\left[\varphi(\xi) - \varphi(x)\right] d\xi = 0.
$$

Приведенные оценки доказывают (35). •

Леммы 3.7 и 3.8 мы используем при изучении задачи вида

$$
Lv = 0,\ \ (x,t) \in D_T; \quad x^s v_x|_{x=0} = 0; \quad v(x,0) = v_0(x) \in E^{2+\alpha}(R_+). \tag{36}
$$

Решение этой задачи имеет вид

$$v(x,t) = \int_0^\infty G(x,\xi,t)\, v_0(\xi)\, d\xi.$$

Функция Грина $G(x,\xi,t)$ относительно параметра ξ удовлетворяет уравнению

$$G_t - (\xi^s \left(\xi^{1-s} G\right)_\xi)_\xi = 0$$

и граничным условиям

$$\lim_{\xi\to 0} \xi^{1-s} G(x,\xi,t) = ct^{-s} e^{-x/t}, \quad \lim_{\xi\to 0} \xi^s \left(\xi^{1-s} G\right)_\xi = 0,$$

что легко проверяется, используя асимптотику функции $I_{-q}(z)$ в окрестности $z = 0$. С помощью этих соотношений легко получается представление

$$v_t(x,t) = \int_0^\infty G(x,\xi,t)\, \xi^{1-s} \left(\xi^s v_{0\xi}(\xi)\right)_\xi d\xi.$$

Из лемм 3.7 и 3.8 теперь следует, что

$$\langle v_t \rangle_{D(l)_T}^{(\alpha/2,\alpha/2)} \le c(T,l) \langle\langle v_0 \rangle\rangle_{D(l)}^{(2+\alpha)}, \quad D(l) = (0,l).$$

В уравнении задачи (36) перенесем член v_t вправо и применим лемму 2.1, так что в результате получим

$$\langle\langle v \rangle\rangle_{D(l)_T}^{(2+\alpha/2)} \le c(T,l) \langle\langle v_0 \rangle\rangle_{D(l)}^{(2+\alpha)}, \quad \lim_{x\to 0} x v_{xx}(x,t) = 0. \tag{37}$$

§4. Линейная задача

Пусть $\Omega = (0,l), \Omega(\delta) = (0,\delta), \delta$ — некоторое фиксированное, достаточно малое число, $\Omega_\tau = (0,l)\times(0,\tau)$. Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} Mu = u_t - xa(x,t)u_{xx} - b(x,t)u_x - c(x,t)u = f(x,t), \quad (x,t)\in\Omega_\tau; \\ xu_{xx}|_{x=0} = 0; \quad u(l,t) = \varphi(t), \ u(x,0) = 0. \end{gathered} \tag{38}$$

Будем предполагать, что $\varphi \in \underset{\circ}{\mathrm{H}}^{1+\alpha}([0,\tau])$; $a(x,t)$,$b(x,t)$,$c(x,t) \in H^{\alpha,\alpha}(\overline{\Omega}_\tau)$;$f \in \underset{\circ}{\mathrm{H}}^{\alpha,\alpha}(\overline{\Omega}_\tau)$ и при некоторых значениях параметров μ_1,μ_2,δ: $a(x,t)\geq\mu_1>0$ при $(x,t)\in\overline{\Omega}_\tau$; $b(x,0)\geq\mu_2>0$ при $x\in\overline{\Omega}(\delta)$.

Пусть $H = \underset{\circ}{\mathrm{H}}^{\alpha,\alpha}(\overline{\Omega}_\tau)\times\underset{\circ}{\mathrm{H}}^{1+\alpha}([0,\tau])$ — банахово пространство пар функций $h=(f,\varphi)$ с нормой $\|h\|_H = |f|^{(\alpha,\alpha)}_{\Omega_\tau} + |\varphi|^{(1+\alpha)}_{[0,\tau]}$.

При исследовании задачи (38) мы используем метод из [7, гл. 4]. Запишем задачу в виде

$$Au = h, \quad A\colon \underset{\circ}{\mathrm{P}}^{2+\alpha,1+\alpha}(\overline{\Omega}_\tau)\to H,$$

и в соответствии с методом построим „регуляризатор“ $R\colon H\to\underset{\circ}{\mathrm{P}}^{2+\alpha,1+\alpha}(\overline{\Omega}_\tau)$ такой, чтобы

$$ARh = h + Th, \quad RAu = u + Wu, \tag{39}$$

причем нормы операторов $T\colon H\to H$, $W\colon \underset{\circ}{\mathrm{P}}^{2+\alpha,1+\alpha}(\overline{\Omega}_\tau)\to\underset{\circ}{\mathrm{P}}^{2+\alpha,1+\alpha}(\overline{\Omega}_\tau)$ малы при достаточно малом τ. Отсюда будет следовать существование ограниченного обратного оператора A^{-1} для ограниченного оператора A.

Введем покрытие множества Ω множествами $\omega^{(k)}$,$\Omega^{(k)}$, где

$$\begin{aligned} \omega^{(k)} &= \left(\xi^{(k)}-\frac{\lambda}{2},\xi^{(k)}+\frac{\lambda}{2}\right)\cap\Omega, \\ \Omega^{(k)} &= \left(\xi^{(k)}-\frac{3\lambda}{4},\xi^{(k)}+\frac{3\lambda}{4}\right)\cap\Omega, \end{aligned}$$

причем $\xi^{(k)} = k\lambda/2$, $k=1,\ldots,k(\lambda)$, а под $k(\lambda)$ мы понимаем такое минимальное значение индекса k, при котором $x = l\in\omega^{(k(\lambda))}$. Пусть N_1 – множество индексов k, таких что $\Omega^{(k)}\cap\Omega(\delta)\neq\varnothing$, N_2 – множество остальных индексов, $N = N_1\cup N_2$. Пусть

$$\tau = \kappa\lambda^\nu, \quad \nu = \max\left(\frac{1+\alpha}{\alpha},\frac{3}{2}+\frac{3}{1-\alpha}\right), \ \kappa<1. \tag{40}$$

Введем нормы

$$\{u\}_{\Omega_\tau}^{(2+\alpha)} = \sup_k \langle\langle u\rangle\rangle_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(2+\alpha)}, \tag{41}$$

$$\{u\}_{\Omega_\tau}^{(\alpha)} = \sup_k \langle u\rangle_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(\alpha,\alpha)}. \tag{42}$$

Аналогично лемме 4.2 из [7, гл. 4] можно показать, что при выполнении (40) нормы (41), (42) эквивалентны обычным нормам в пространствах $\underset{\circ}{\mathrm{P}}{}^{2+\alpha,1+\alpha}(\overline{\Omega}_\tau)$ и $\underset{\circ}{\mathrm{H}}{}^{\alpha,\alpha}(\overline{\Omega}_\tau)$, и, следуя доказательству леммы 4.4 из [7, гл. 4], можно убедиться, что для функции

$$w(x,t) = \sum_k w^{(k)}(x,t), \quad w^{(k)}(x,t) = 0, \ (x,t) \in \Omega_\tau \backslash \Omega_\tau^{(k)}$$

справедливы неравенства

$$\{w\}_{\Omega_\tau}^{(\alpha)} \le N_0 \sup_k \langle w^{(k)}\rangle_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(\alpha,\alpha)},$$

$$\{w\}_{\Omega_\tau}^{(2+\alpha)} \le N_0 \sup_k \langle\langle w^{(k)}\rangle\rangle_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(2+\alpha)}, \quad N_0 = 3.$$

Введем функции $\zeta^{(k)}(x)$, $\eta^{(k)}(x)$(см. [7, гл. 4, §4]) такие, что

$$\zeta^{(k)}(x) = 1, \ x \in \omega^{(k)}; \quad \zeta^{(k)}(x) = 0, \ x \in \Omega\backslash\Omega^{(k)}; \quad \eta^{(k)}(x) = 0, \ x \in \Omega\backslash\Omega^{(k)};$$
$$|D_x^r \zeta^{(k)}| \le c(r)/\lambda^r; \quad |D_x^r \eta^{(k)}| \le c(r)/\lambda^r; \quad \sum\nolimits_k \eta^{(k)}(x)\zeta^{(k)}(x) = 1.$$

Перейдем к построению оператора R. При $k \in N_1$ обозначим

$$s^{(k)} = b(\xi^{(k)},0)/a(\xi^{(k)},0).$$

В силу условий на коэффициенты задачи (38) имеем $0 < s^{(k)} < +\infty$. При $k \in N_1$ обозначим через $R^{(k)}$ оператор, который ставит в соответствие функции $f^{(k)}(x,t) \in \underset{\circ}{\mathrm{H}}{}^{\alpha,\alpha}(\overline{D}_\tau)$ решение задачи

$$\begin{gathered} u_t^{(k)} - xa(\xi^{(k)},0)u_{xx}^{(k)} - b(\xi^{(k)},0)u_x^{(k)} = f^{(k)}(x,t), \quad (x,t) \in D_\tau, \\ x^{s^{(k)}} u_x^{(k)}|_{x=0} = 0; \quad u^{(k)}(x,0) = 0. \end{gathered} \tag{43}$$

Из результатов п. 3 следует, что существует единственное решение задачи (43) $u^{(k)} \in \underset{\circ}{\mathrm{P}}^{2+\alpha,1+\alpha}(\overline{D}_\tau)$ и выполняется условие

$$\lim_{x\to 0} x u_{xx}^{(k)}(x,t) = 0. \tag{44}$$

При $k \in N_2 \backslash \{k(\lambda)\}$ оператор $R^{(k)}$ ставит в соответствие функции $f^{(k)}(x,t) \in \underset{\circ}{\mathrm{H}}^{\alpha,\alpha}(R_\tau)$ решение задачи Коши

$$\begin{gathered} u_t^{(k)} - \xi^{(k)} a(\xi^{(k)},0) u_{xx}^{(k)} - b(\xi^{(k)},0) u_x^{(k)} = f^{(k)}(x,t), \quad (x,t) \in R_\tau; \\ u^{(k)}(x,0) = 0. \end{gathered} \tag{45}$$

Поскольку в этом случае $\xi^{(k)} \geq \delta$, мы имеем дело с невырождающимся уравнением, и в силу оценок (27), (28) задача (45) имеет единственное решение $u^{(k)} \in \underset{\circ}{\mathrm{P}}^{2+\alpha,1+\alpha}(\overline{D}_\tau)$. Наконец, при $k = k(\lambda)$ оператор $R^{(k)}$ сопоставляет паре функций $h^{(k)} = \left(f^{(k)}(x,t), \varphi(t)\right)$ решение задачи

$$\begin{gathered} u_t^{(k)} - la(l,0) u_{xx}^{(k)} - b(l,0) u_x^{(k)} = f^{(k)}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_\tau; \\ u^{(k)}(0,t) = 0, \quad u^{(k)}(l,t) = \varphi(t), \quad u^{(k)}(x,0) = 0. \end{gathered} \tag{46}$$

Можно убедиться, что и в этом случае существует единственное решение $u^{(k)} \in \underset{\circ}{\mathrm{P}}^{2+\alpha,1+\alpha}(\overline{\Omega}_\tau)$ задачи (46) и выполняется условие (44).

Оператор R определим с помощью набора операторов $R^{(k)}$:

$$Rh = \sum_k \eta^{(k)} u^{(k)},$$

где

$$u^{(k)} = \begin{cases} R^{(k)}\left(\zeta^{(k)} f\right), & k \neq k(\lambda), \\ R^{(k(\lambda))}\left(\zeta^{(k(\lambda))} f, \varphi\right), & k = k(\lambda). \end{cases}$$

Поскольку $\sum_k \eta^{(k)} u^{(k)}(x,t)\,|_{x=l} = \varphi(t)$, для оператора $Th = (T_1 h, T_2 h)$ вторая компонента равна нулю. Получим представление для первой компоненты. Имеем

$$
\begin{aligned}
MRh &= \sum_{k\in N} \eta^{(k)} u_t^{(k)} - xa(x,t) \sum_{k\in N} \left(\eta^{(k)} u_{xx}^{(k)} + 2\eta_x^{(k)} u_x^{(k)} + \eta_{xx}^{(k)} u^{(k)}\right) \\
&\quad - b(x,t) \sum_{k\in N} (\eta^{(k)} u_x^{(k)} + \eta_x^{(k)} u^{(k)}) - c(x,t) \sum_{k\in N} \eta^{(k)} u^{(k)} \\
&= \sum_{k\in N} \eta^{(k)} \zeta^{(k)} f + \sum_{k\in N} \left[\eta^{(k)} \big(b(\xi^{(k)},0) - b(x,t)\big) u_x^{(k)} - 2xa(x,t)\, \eta_x^{(k)} u_x^{(k)}\right] \\
&\quad - \sum_{k\in N} u^{(k)} \left(xa(x,t)\, \eta_{xx}^{(k)} + b(x,t)\, \eta_x^{(k)}\right) - \sum_{k\in N} c(x,t)\, \eta^{(k)} u^{(k)} \\
&\quad + \sum_{k\in N_1} \eta^{(k)} \big(a(\xi^{(k)},t) - a(x,t)\big) x u_{xx}^{(k)} \\
&\quad + \sum_{k\in N_2} \eta^{(k)} \big(a(\xi^{(k)},0)\xi^{(k)} - a(x,t)\, x\big) u_{xx}^{(k)} \\
&= f + T_1 h,
\end{aligned}
$$

при этом мы использовали равенство $\sum_k \eta^{(k)} \zeta^{(k)} = 1$.

При вычислении $\langle T_1 h\rangle_{\Omega_\tau}^{(\alpha,\alpha)}$ особого внимания заслуживают слагаемые вида $\eta_x^{(k)} u_x^{(k)}$ при $k \in N_1$ так как, например,

$$
\max |\eta_x^{(k)}| \langle u_x^{(k)} \rangle_x^{(\alpha)} \le \frac{c}{\lambda} \langle f^{(k)} \rangle^{(\alpha,\alpha)}.
$$

Однако, используя локальные оценки для $u_x^{(k)}$, полученные в лемме 3.6, мы можем добиться, чтобы соответствующие нормы указанных слагаемых были малы при подходящем выборе параметров $\tau, \lambda, \kappa, \nu$ в (40). По построению $\eta^{(k)}(x) = 0$ при $x \in \Omega(\lambda/4)$ для всех k, следовательно,

$$
\langle \eta_x^{(k)} u_x^{(k)} \rangle_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(\alpha,\alpha)} \le c \langle \eta_x^{(k)} u_x^{(k)} \rangle_{\Omega_\tau^{(k)} \setminus \Omega(\lambda/8)_\tau}^{(\alpha,\alpha)}.
$$

Положим в лемме 3.6 $T = \tau$, $\varepsilon = \lambda/8$. В силу (40) при достаточно малых λ имеем $\tau \le \lambda/8 \le 1$, поэтому из (26) и (29) следует

$$
\begin{aligned}
\langle \eta_x^{(k)} u_x^{(k)} \rangle^{(\alpha,\alpha)} &\le \langle \eta_x^{(k)} \rangle^{(\alpha,\alpha)} \max |u_x^{(k)}| + \max |\eta_x^{(k)}| \langle u_x^{(k)} \rangle^{(\alpha,\alpha)} \\
&\le c \left[\frac{\tau^\alpha}{\lambda^{1+\alpha}} + \frac{\tau^{(1-\alpha)/2}}{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda^{1/2}} + \frac{1}{\lambda^{3(1-\alpha)/4}} \right) \right] \langle f^{(k)} \rangle^{(\alpha,\alpha)}.
\end{aligned}
$$

Далее, применяя оценку (25), используя принадлежность функций $a(x,t)$, $b(x,t)$ пространству $H^{(\alpha,\alpha)}(\overline{\Omega}_\tau)$, неравенства (29), (30), соотношение (40) между λ и τ и эквивалентные нормы (42), получим

$$\langle T_1 h\rangle_{\Omega_\tau}^{(\alpha,\alpha)} \le c\,(\tau^\alpha + \lambda^\alpha + \kappa^\gamma)\,\langle f\rangle_{\Omega_\tau}^{(\alpha,\alpha)}, \quad \gamma = \max\left(\alpha, \frac{1-\alpha}{2}\right).$$

Выбирая здесь λ и κ достаточно малыми, можно добиться выполнения неравенства $\|T\| < 1$. Аналогичные рассуждения справедливы и для оператора W. Таким образом, обеспечивается существование ограниченного оператора A^{-1}.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены предположения на данные линейной задачи* (38), *тогда при достаточно малом τ существует единственное решение $u(x,t) \in \overset{\circ}{P}{}^{2+\alpha,1+\alpha}(\overline{\Omega}_\tau)$ и справедливо неравенство*

$$\|u\|_{\Omega_\tau}^{(2+\alpha,1+\alpha)} \le c(|f|_{\Omega_\tau}^{(\alpha)} + |\varphi|_{[0,\tau]}^{(1+\alpha)}), \tag{47}$$

где c зависит от коэффициентов задачи, размеров области Ω_τ и не зависит от f и ϕ.

§5. Доказательство теоремы 1.1

Вначале мы сведем задачу (3) к задаче с нулевыми начальными данными. Для этого будем искать решение в виде $z(u,t) = \theta(u,t) + w(u,t)$, где функция $w(u,t)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} &w(u,0) = z_0(u), \\ &w_t(u,0) = z_t(u,0) = z_{0u}^{-2}(u)\Big(muz_{0uu}(u) - \frac{m}{m-1}z_{0u}(u)\Big). \end{aligned} \tag{48}$$

Введем функции $w^{(1)}(u), w^{(2)}(u,t)$ как решения соответствующих задач (s — произвольное положительное число):

$$-L_s w^{(1)} = f(u), \quad u \in (0,1); \quad u^s w_u^{(1)}(u)\,|_{u=0} = 0, \quad w^{(1)}(1) = 0, \tag{49}$$

и

$$w_t^{(2)} - L_s w^{(2)} = 0, \quad (u,t) \in D_T; \quad u^s w_u^{(2)}(u,t)\,|_{u=0} = 0, \quad w^{(2)}(u,0) = w_0^{(2)}(u), \tag{50}$$

где $f(u) = z_t(u,0) - L_s z_0(u), w_0^{(2)}(u)$ – финитное продолжение с сохранением класса $E^{2+\alpha}$ функции $z_0(u) - w^{(1)}(u)$. По лемме 2.1 существует единственное решение задачи (49) из класса $E^{2+\alpha}$. Решение задачи (50) может быть представлено в виде (32) (см. задачу (36)) и, как следует из (37), $w^{(2)}(u,t) \in P^{2+\alpha/2,1+\alpha/2}(\overline{D_T})$. Очевидно, что функция $w(u,t) = w^{(1)}(u) + w^{(2)}(u,t)|_{\Omega_\tau}$ удовлетворяет условиям (48) и принадлежит пространству $P^{2+\alpha/2,1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_\tau)$. Кроме того,

$$\begin{gathered} w_u(0,0)\, w_t(0,0) = \frac{-m}{m-1}, \\ |w_u(u,t)| \geq \delta/2, \quad (u,t) \in \Omega_\tau, \end{gathered} \tag{51}$$

при достаточно малом τ.

В терминах функции $\theta(u,t)$ задача (3) принимает вид

$$\begin{gathered} \theta_t - ua(u,t)\theta_{uu} - b(u,t)\theta_u = F(w,\theta), \quad (u,t) \in \Omega_\tau; \\ \theta(u,0) = 0, \ u \in [0,1]; \quad u\theta_{uu}(u,t)|_{u=0} = 0, \ \theta(1,t) = -w(1,t), \ t \in (0,\tau), \end{gathered} \tag{52}$$

где

$$\begin{aligned} a(u,t) &= \frac{m}{w_u^2(u,t)}, \\ b(u,t) &= -\left(\frac{m}{m-1} + 2w_u(u,t)\, w_t(u,t)\right) w_u^{-2}(u,t), \\ F(w,\theta) &= \frac{m}{w_u^2(u,t)}\left(uw_{uu} - \frac{1}{m-1}w_u\right) \\ &\quad - \frac{1}{w_u^2(u,t)}\left[\left(\theta_u^2 + 2w_u\theta_u\right)\theta_t - \left(w_u^2 + \theta_u^2\right)w_t\right]. \end{aligned}$$

Отметим, что в силу равенства в (51) $b(0,0) = m/(m-1)\,w_u^2(0,0)$ и, следовательно, $b(0,0)/a(0,0) = 1/(m-1)$. Теперь запишем (52) в виде

$$A\theta = h, \quad h = (F(w,\theta), -w(1,t))$$

в соответствии с п. 4, причем оператор A удовлетворяет условиям теоремы 4.1, поэтому справедлива и такая запись

$$\theta = A^{-1}[h] = A^{-1}\left[(F(w,\theta), -w(1,t))\right] = \Gamma[\theta].$$

Очевидно, что неподвижная точка нелинейного оператора Γ дает решение исходной задачи (3). Пусть B_r — шар радиуса r с центром в нуле в пространстве $\overset{\circ}{\mathrm{P}}{}^{2+\beta,1+\beta}(\overline{\Omega}_\tau)$, $0<\beta<\alpha/2$. При $\theta_1,\theta_2\in B_r$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|F(w,0)\|_{\Omega_\tau}^{(\beta,\beta)} &\le c_1\|z_0\|_{[0,1]}^{(2+\alpha)}\tau^{\alpha/2-\beta}, \\ \|F(w,\theta_1)-F(w,\theta_2)\|_{\Omega_\tau}^{(\beta,\beta)} &\le c_2\|z_0\|_{[0,1]}^{(2+\alpha)}r\|\theta_1-\theta_2\|_{\Omega_\tau}^{(2+\beta,1+\beta)}. \end{aligned} \tag{53}$$

Действительно, по построению функции $w(u,t)$ имеем $F(w,0)\in\overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^{\alpha/2,\alpha/2}(\overline{\Omega}_\tau)$ и остается воспользоваться неравенством (29), чтобы убедиться в справедливости первого неравенства в (53). Второе неравенство есть следствие того обстоятельства, что $F(w,\theta)$ не содержит линейных слагаемых относительно θ. Вследствие этих оценок и ограниченности оператора A^{-1} отображение Γ переводит B_r в себя и при достаточно малых r и τ является сжимающим. Справедливость теоремы 1.1 следует тогда из принципа сжимающих отображений.

Замечание (о повышении гладкости свободной границы). Продифференцируем соотношения в задаче (3) по t и обозначим $\zeta(u,t)=z_t(u,t)$. Получим

$$\begin{aligned} z_u^2\zeta_t = mu\zeta_{uu}-\frac{m}{m-1}\zeta_u-2z_uz_t\zeta_u, &\quad (u,t)\in\Omega_\tau; \\ u\zeta_{uu}|_{u=0}=0, &\quad \zeta(1,t)=0. \end{aligned} \tag{54}$$

В предположении $\zeta(u,0)=z_{0u}^{-2}(muz_{0uu}-m(m-1)^{-1}z_{0u})\in E^{2+\alpha}([0,1])$ задачу (54) для $\zeta(u,t)$ можно свести к задаче с нулевыми начальными данными, которая удовлетворяет всем условиям теоремы 4.1. Отсюда вытекает, что $z_t(u,t)\in P^{2+\beta,1+\beta}(\overline{\Omega}_\tau)$ и, следовательно, при указанном предположении $\sigma(t)\in H^{2+\beta}([0,\tau])$.

Список литературы

[1] Калашников А. С., *Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка*, Успехи мат. наук **42** (1987), №2, 135–176.

[2] Knerr B., *The porous medium equation in one dimension*, Trans. Amer. Math. Soc. **234** (1977), 381–415.

[3] Aronson D. G., Vázquez J. L., *Eventual C^∞-regularity and concavity for flows in one-dimensional porous media*, Arch. Rational Mech. Anal. 99 (1987), 329–348.

[4] Angenent S. B., *Analyticity of the interface of the porous media equation after the waiting time*, Proc. Amer. Math. Soc. **102** (1988), 329–336.

[5] Shmarev S. I., Vázquez J. L., *The regularity of solutions of reaction-diffusion equations via Lagrangian coordinates*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 3 (1996), 465–497.

[6] Hanzawa E. I., *Classical solutions of the Stefan problem*, Tôhoku Math. J. (2) 33 (1981), no. 2, 297–335.

[7] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения параболичесого типа*, Наука, М., 1967.

[8] Градштейн И. С., Рыжик И. М., *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, М., 1963.

[9] Терсенов С. А., *Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе*, НГУ, Новосибирск, 1973.

Институт
прикладной математики и механики
НАН Украины
ул. Р. Люксембург 74
Донецк, 340114
Украина
E-mail: bazaliy@iamm.ac.donetsk.ua

Поступило 22 ноября 1998 г.