В. В. Пеллер, Операторы Ганкеля и свойства непрерывности операторов наилучшего приближения, *Алгебра и анализ*, 1990, том 2, выпуск 1, 163–189

В.В.Пеллер

ОПЕРАТОРЫ ГАНКЕЛЯ И СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНОСТИ ОПЕРАТОРОВ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

В работе изучаются точки непрерывности операторов $\mathcal{A}_m$ наилучшего приближения функциями вида $r+h$, где r - рациональная функция степени не выше, чем n, а $h\in H^\infty$, в равномерной норме на единичной окружности. Показано, что для некоторого класса банаховых пространств X функция φ является точкой непрерывности оператора $\mathcal{A}_m$ в норме X тогда и только тогда, когда кратность сингулярного числа $s_m(H_\varphi)$ оператора Ганкеля H_φ равна единице. Приводится приложение к самосопряженным операторам Ганкеля.

§ 1. Введение

В этой работе, которую можно рассматривать как расширенный вариант препринта [24], мы будем изучать свойства непрерывности оператора наилучшего приближения аналитическими функциями в равномерной норме, а также свойства непрерывности других операторов наилучшего приближения, связанных с рациональной аппроксимацией в норме ВМО. Оператор наилучшего приближения аналитическими функциями играет важную роль в интерполяционных задачах [1, 2, 21], в теории операторов Ганкеля и Теплица [1, 2, 9], в стационарных процессах [9], в теории управления и теории цепей [13, 17].

Если φ - функция класса L^∞ на единичной окружности $\mathbb{T}$, то легко видеть, что существует функция f из H^∞ такая, что

$$\operatorname{dist}_{L^\infty(\mathbb{T})}(\varphi, H^\infty) = \|\varphi-f\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.$$

Такая функция f называется *наилучшим приближением* функции φ аналитическими функциями в равномерной норме (такая функция, вообще говоря, неединственна).

На самом деле можно рассматривать наилучшее приближение также для неограниченных функций φ. Если φ входит в класс ВМО функций

Ключевые слова: операторы Ганкеля, операторы наилучшего приближения, сингулярные числа.

ограниченной средней осцилляции (см. [6], т. е. φ допускает представление $\varphi=\psi_1+\tilde{\psi}_2$, где $\psi_1,\psi_2\in L^\infty$, а $\tilde{\psi}$ - функция, гармонически сопряженная с ψ), то существует функция f, аналитическая в единичном круге $\mathbb{D}$ такая, что $\varphi-f\in L^\infty(\mathbb{T})$. Среди таких функций существует функция f_0, которая минимизирует норму $\|\varphi-f_0\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$. В этом случае f_0 называется наилучшим приближением функции φ в равномерной норме.

Если φ входит в класс VMO функций исчезающей средней осцилляции (см. [6], т. е. $\varphi=\psi_1+\tilde{\psi}_2$, где ψ_1, $\psi_2\in C(\mathbb{T})$), то наилучшее приближение единственно (см. [1, 9]). *Оператор* (нелинейный) *наилучшего приближения* $\mathcal{A}$ определен на классе VMO равенством $\mathcal{A}\varphi=f_0$.

В приложениях бывает нужно для заданной функции φ_0 на $\mathbb{T}$ приближенно вычислить функцию $\mathcal{A}\varphi$. Недавно появились работы [18, 19], посвященные этой задаче. При этом надо уметь оценивать отклонения $\mathcal{A}\varphi-\mathcal{A}\psi$ в случае, когда ψ - малое возмущение (в том или ином смысле) функции φ. Отметим, что в [18] также рассматривается векторный случай.

Существенную роль в этой проблематике играют операторы Ганкеля. Если $\varphi\in$BMO, то *оператор Ганкеля* H_φ определен на классе Харди H^2 равенством

$$H_\varphi f = \mathbb{P}_-\varphi f, \qquad f \in H^2,$$

где $\mathbb{P}_-$ - ортогональный проектор из L^2 на $H^2_- \stackrel{\mathrm{def}}{=} L^2\ominus H^2$. Если ψ - наилучшее приближение функции φ в равномерной норме, то по теореме Нехари (см. [21, 9])

$$\|H_\varphi\| = \|\varphi-\psi\|_{L^\infty(\mathbb{T})},$$

причем правая часть равенства эквивалентна $\|\mathbb{P}_-\varphi\|_{\mathrm{BMO}}$.

В работе [18] сформулировано следующее утверждение: если $\varphi\in C^\infty(\mathbb{T})$, $\varphi_n\in C^\infty(\mathbb{T})$, $\lim\limits_n\|\varphi-\varphi_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})}=0$ и кратность сингулярного числа $s_0(H_\varphi)$ оператора H_φ равна единице (см. определение в § 2), то $\lim\limits_n\|\mathcal{A}\varphi-\mathcal{A}\varphi_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})}=0$.

Однако доказательство этого утверждения содержит ошибки, и я не знаю, справедливо ли оно или нет.

В той же работе [18] показано, что при $\varphi(z)=\bar{z}^2$ (в этом случае кратность сингулярного числа $s_0(H_\varphi)$ равна двум) существуют гладкие функции φ_n такие, что $\|\varphi_n-\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\longrightarrow 0$, но $\|\mathcal{A}\varphi_n-\mathcal{A}\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\not\longrightarrow 0$.

В работе [9] рассматриваются различные классы пространств функций на $\mathbb{T}$, инвариантные относительно оператора $\mathcal{A}$ (другие классы таких пространств рассматриваются в [5, 10]).

В препринтном варианте этой работы [24] рассматривается второй класс таких пространств из работы [9] и доказывается, что если φ входит в такое пространство X, $\mathbb{P}_{\perp}\varphi\neq\mathbb{O}$, то φ - точка непрерывности оператора $\mathcal{A}$ в норме пространства X в том и только в том случае, когда максимальное сингулярное число $s_0(H_\varphi)$ оператора H_φ имеет кратность единицу. Кроме того, показано, что если кратность больше единицы, то даже сходимость φ_n и φ в значительно более сильном смысле не влечет сходимости $\mathcal{A}\varphi_n$ к $\mathcal{A}\varphi$ в равномерной норме.

В этой работе мы докажем более сильное утверждение, именно такая сходимость не влечет сходимость $\mathcal{A}\varphi_n$ к $\mathcal{A}\varphi$ и в норме пространства ВМО.

В этой связи возникает важный в приложениях вопрос, как можно оценить $\mathcal{A}\varphi_n-\mathcal{A}\varphi$ при малых возмущениях φ_n функции φ в случае, когда кратность сингулярного числа $s_0(H_\varphi)$ больше единицы. В препринтном варианте этой работы показано, что для второго класса пространств X, описанного в [9], сходимость φ_n к φ в норме пространства X всегда влечет сходимость $\mathcal{A}\varphi_n$ к $\mathcal{A}\varphi$ в норме L^q при всех $q<\infty$.

Недавно я получил препринт [16], где рассматриваются операторы приближения более общего вида в алгебре Винера $\mathcal{F}l^1$ (эта алгебра входит в упомянутый выше класс пространств X и состоит из функций на $\mathbb{T}$, ряд Фурье которых сходится абсолютно). Эти операторы связаны с рациональной аппроксимацией в норме пространства ВМО, они играют важную роль в теории управления и обработки цифровых сигналов [11, 15] и определяются следующим образом. Пусть $m\in\mathbb{Z}_+$, $\varphi\in$VMO. Рассмотрим множество $\tilde{\mathcal{R}}_m$ функций g из ВМО таких, что $\mathbb{P}_-g$ - рациональная функция степени не выше, чем m (т.е. $\mathbb{P}_-g = p_1/p_2$, где p_1, p_2 - полиномы, степени которых не превосходят m). Тогда существует единственная функция f из $\tilde{\mathcal{R}}_m$ такая, что

$$\|\varphi - f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \inf_{g\in\tilde{\mathcal{R}}_m} \|\varphi - g\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.$$

Оператор наилучшего приближения $\mathcal{A}_m$ на классе ВМО определяется равенством

$$\mathcal{A}_m\varphi = f.$$

Ясно, что $\mathcal{A}_0=\mathcal{A}$.

В [16] сформулировано следующее утверждение. Функция φ, $\varphi\notin\tilde{\mathcal{R}}_m$, класса $\mathcal{F}l^1$ является точкой непрерывности оператора $\mathcal{A}_m$ в норме пространства $\mathcal{F}l^1$ тогда и только тогда, когда кратность сингулярного числа $s_m(H_\varphi)$ оператора Ганкеля H_φ равна единице.

Однако доказательство этого утверждения, приведенное в [16], верно только в случае $m>0$ и $s_{m-1}(H_\varphi)=s_m(H_\varphi)$. Недавно авторы [16] информировали меня о том, что им удалось разобрать случай $s_{m-1}H_\varphi \neq s_m(H_\varphi)$. Отметим, что методы работы [16] существенно отличаются от методов препринта [24].

В § 4 этой работы мы покажем, что для класса пространств X, упомянутых выше, справедливы следующие утверждения. Если $\varphi\in X$ и кратность сингулярного числа $s_m(H_\varphi)$ оператора H_φ равна единице, то функция φ является точкой непрерывности оператора $\mathcal{A}_m$ в норме пространства X. В случае кратного сингулярного числа ситуация несколько более сложная. Если кратность сингулярного числа $s_m(H_\varphi)$ равна μ, $\mu>1$, и

$$s_k(H_\varphi) = s_{k+1}(H_\varphi) = \ldots = s_{k+\mu-1}(H_\varphi),$$

то при $m \neq k+\frac{\mu-1}{2}$ даже сходимость φ_n к φ в очень сильном смысле не гарантирует сходимости $\mathcal{A}_m\varphi_n$ к $\mathcal{A}_m\varphi$ в норме пространства BMO. Если $m = k+\frac{\mu-1}{2}$, то результаты уже не столь удовлетворительны. Используя идею работы [16], мы покажем, что в этом случае при $X=\lambda_\alpha$, $\alpha\notin\mathbb{Z}$ (см. определение классов Гёльдера λ_α в § 2), сходимость φ_n к φ в норме пространства λ_α не гарантирует сходимости $\mathcal{A}_m\varphi_n$ к $\mathcal{A}_m\varphi$ в норме пространства BMO.

Отметим здесь, что сингулярные числа операторов Ганкеля могут иметь какие угодно кратности. Более того, как показано в [4] (см. также [22]), для любой невозрастающей последовательности $\{s_n\}_{n\ge0}$ неотрицательных чисел существует оператор Ганкеля H_φ такой, что $s_n(H_\varphi)=s_n$, $n\ge0$.

В § 3 мы изучим поведение кратных сингулярных чисел операторов Ганкеля при возмущении символа рациональными дробями и при умножении символа на z и $\bar{z}$. Полученные в § 3 результаты будут существенно использоваться в § 4. Вместе с тем они, видимо, представляют и самостоятельный интерес. В качестве приложения полученных результатов будет показано, что у компактного „самосопряженного" оператора Ганкеля кратности собственных чисел λ и $-\lambda$ могут отличаться не более чем на единицу. Вместе с одним результатом В. И. Васюнина и С. Р. Треиля это приводит к полному описанию всех компактных самосопряженных операторов Ганкеля с точностью до унитарной эквивалентности.

В § 5 мы покажем, что в случае произвольной кратности сингулярного числа $s_m(H_\varphi)$ сходимость φ_n к φ в X влечет сходимость $\mathcal{A}\varphi_n$ к $\mathcal{A}\varphi$ в L^q при всех $q<\infty$.

В § 6 мы рассмотрим задачу наилучшего приближения в классах Бесова $B_p^{1/p}$, $1<p<\infty$, и опишем точки непрерывности отображения $\varphi \longmapsto$

$\longmapsto \|\mathcal{A}\varphi\|_{B_p^{1/p}}$. В § 7 мы сформулируем открытые вопросы. В § 2 собрана необходимая информация о сингулярных числах операторов, об операторах Ганкеля и Тёплица и операторах наилучшего приближения.

Я хотел бы выразить свою искреннюю признательность В. И. Васюнину за полезные обсуждения.

§ 2. Предварительные сведения

I. Сингулярные числа и классы Шаттена-фон Неймана. Пусть $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ - гильбертовы пространства, T - ограниченный оператор из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$. Сингулярные числа (s-числа) $s_k(T)$, $0\le k<\infty$, определяются равенством

$$s_k(T) = \inf \{\| T-R \| : \operatorname{rank} R \le k\}. \tag{1}$$

Ясно, что $s_0(T) = \| T \|$. Если оператор T компактен, то $\{s_k(T)\}_{k\ge 0}$ - последовательность собственных чисел оператора $(T^*T)^{1/2}$. Кратность сингулярного числа $s_k(T)$ оператора T - это кратность собственного числа $s_k(T)$ оператора $(T^*T)^{1/2}$.

Говорят, что оператор T принадлежит классу Шаттена-фон Неймана S_p, $0<p<\infty$, если

$$\sum_{k\ge 0} (s_k(T))^p < \infty .$$

II. Операторы Ганкеля и Тёплица. В этом пункте мы приведем известные факты об операторах Ганкеля и Тёплица, которые нам понадобятся в дальнейшем. Более подробная информация может быть найдена в [12, 26, 25, 21, 9].

Критерий компактности операторов Ганкеля дается теоремой Хартмана: оператор H_φ компактен тогда и только тогда, когда существует функция ψ из $C(\mathbb{T})$ такая, что $H_\varphi=H_\psi$. Последнее утверждение эквивалентно тому, что $\mathbb{R}\_\varphi \in \mathrm{VMO}$.

Сформулируем теперь описание операторов Ганкеля класса S_p (см. [7] при $p\ge1$ и [8, 27] при $p<1$). Оператор H_φ входит в класс S_p, $0<p<\infty$, в том и только в том случае, когда $\mathbb{P}\_\varphi$ входит в класс Бесова $B_p^{1/p}$ (см. определение классов Бесова в следующем пункте).

В дальнейшем нам понадобится следующая важная теорема Адамяна-Арова-Крейна [3].

Т е о р е м а A. *Пусть $\varphi\in\mathrm{VMO}$, $m\in\mathbb{Z}_+$. Тогда существует функция ψ из $\tilde{\mathcal{R}}_m$ такая, что*

$$s_m(H_\varphi) = \| \varphi - \psi \|_{L^\infty(\mathbb{T})}.$$

Причем такая функция ψ единственна.

Ввиду теоремы Кронекера (см. [7, 21]) $\psi \in \tilde{\mathcal{R}}_m$ в том и только в том случае, когда rank $H_\psi \le m$. Поэтому теорема Адамяна-Арова-Крейна утверждает, что если T - оператор Ганкеля, то в (1) можно считать, что R - оператор Ганкеля ранга не выше, чем k. Отсюда легко видеть, что

$$\mathcal{A}_m \varphi = \psi .$$

Функция ψ в теореме А может быть выписана следующим образом. Пусть f - собственная функция оператора $H_\varphi^* H_\varphi$, соответствующая собственному числу $(s_m(H_\varphi))^2$. Тогда $\psi = \varphi - \dfrac{H_\varphi f}{f}$, причем функция $v = \dfrac{H_\varphi f}{\bar{f}}$ не зависит от выбора функции f и $|v| = s_m(H_\varphi)$ почти всюду на $\mathbb{T}$ (см. [3]). Кроме того, если s - сингулярное число оператора H_φ кратности μ и

$$s = s_k(H_\varphi) = s_{k+1}(H_\varphi) = \ldots = s_{k+\mu-1}(H_\varphi) > s_{k+\mu}(H_\varphi),$$

то сингулярное число $s_0(H_v) = s$ оператора H_v имеет кратность $2k+\mu$ (см. [3]).

Оператор Тёплица T_φ для $\varphi \in L^\infty$ определяется равенством

$$T_\varphi f = \mathbb{P}_+ \varphi f, \qquad f \in H^2,$$

где $\mathbb{P}_+$ - ортопроектор из L^2 на H^2.

Если u - унимодулярная функция (т. е. $|u(\zeta)|=1$ при почти всех ζ из $\mathbb{T}$), то оператор T_u обратим слева в том и только в том случае, когда $\operatorname{dist}(u, H^\infty) < 1$.

Напомним, что оператор T называется фредгольмовым, если он обратим по модулю компактных операторов. Индекс фредгольмова оператора T определяется равенством

$$\operatorname{ind} T = \dim \operatorname{Ker} T - \dim \operatorname{Ker} T^*.$$

Для оператора Тёплица T_φ либо $\operatorname{Ker} T_\varphi = \{\mathbb{O}\}$, либо $\operatorname{Ker} T_\varphi^* = \{\mathbb{O}\}$. Поэтому если индекс фредгольмова оператора Тёплица равен нулю, то он обратим.

Пространство QC квазинепрерывных функций на $\mathbb{T}$ определяется равенством $QC = (H^\infty + C(\mathbb{T})) \cap (\overline{H^\infty} + C(\mathbb{T}))$. Если u - унимодулярная функция из QC, то оператор T_u фредгольмов и $u = z^n e^{i\beta}$, где β - вещественная функция из VMO (теорема Сарасона). В этом случае $\operatorname{ind} T_u = -n$.

Если $\varphi \in \mathrm{VMO}$, $\mathbb{P}_- \varphi \ne \mathbb{O}$, то $\varphi - \mathcal{A}\varphi \in QC$ и кратность s-числа $s_0(H_\varphi)$ оператора H_φ равна $\operatorname{ind} T_{\varphi - \mathcal{A}\varphi}$.

Перечисленные выше утверждения могут быть найдены в [21, 26, 9].

Из теоремы Адамяна-Арова-Крейна легко вывести следующее утверждение, которое, по-видимому, впервые было сформулировано в [16].

.Следствие. *Пусть* $\varphi \in \mathrm{VMO}$, f *- функция класса* VMO *на* $\mathbb{T}$

такая, что $\mathbb{P}_-f$ *— рациональная функция степени* k. *Тогда если функция* $\varphi-f$ *постоянна по модулю п.в. на* $\mathbb{T}$ *и* $\operatorname{ind} T_{\varphi-f} = N>2k$, *то* $f=\mathcal{A}_k\varphi$ *и сингулярное число* $s_k(H_\varphi)=\|\varphi-f\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$ *имеет кратность* $N-2k$.

Нам понадобится еще одно утверждение, которое связывает между собой операторы Ганкеля H_u и $H_{\bar{u}}$ для унимодулярной функции u.

Т е о р е м а Б [9]. *Пусть* u *— унимодулярная функция на* T *такая, что оператор Тёплица* T_u *на* H^2 *имеет плотный образ. Тогда оператор* $H^*_{\bar{u}}H_{\bar{u}}$ *унитарно эквивалентен оператору* $H^*_uH_u|H^2\ominus E$, *где* $E=\{f\in H^2:H^*_uH_uf=f\}$.

III. Операторы наилучшего приближения. Пусть $\varphi\in\mathrm{VMO}$. Предположим, что норма оператора Ганкеля H_φ достигается на функции h из H^2: $\|H_\varphi h\|_{L^2}= s_0(H_\varphi)\|h\|_{H^2}$. Тогда функция $\varphi-\mathcal{A}\varphi$ имеет постоянный модуль почти всюду на $\mathbb{T}$ и

$$\varphi - \mathcal{A}\varphi = \frac{H_\varphi h}{h}.$$

Если кратность s-числа $s_0(H_\varphi)$ равна единице, то

$$\varphi - \mathcal{A}\varphi = c\bar{z}\,\frac{\bar{h}}{h}, \quad c \in \mathbb{C},$$

(см. [1, 9]).

В работе [9] были выделены 3 больших класса пространств, инвариантных относительно оператора $\mathcal{A}$. В этом пункте мы рассмотрим первый из этих классов. Он состоит из пространств X функций на $\mathbb{T}$, удовлетворяющих следующим аксиомам:

(A_1) Если $f\in X$, то $\bar{f}\in X$ и $\mathbb{P}_+f\in X$.

(A_2) X — банахова алгебра относительно поточечного умножения.

(A_3) Множество тригонометрических полиномов плотно в X.

(A_4) Всякий мультипликативный линейный функционал на X совпадает со значением в некоторой точке ζ на $\mathbb{T}$: $f \longmapsto f(\zeta)$.

В работе [9] показано, что если пространство X удовлетворяет аксиомам (A_1)–(A_4), то $\mathcal{A}X\subset X$.

Заметим, что в этом случае $\mathcal{A}_mX\subset X$ при всех m из $\mathbb{Z}_+$. Действительно, пусть $\varphi\in X$ и $\psi = \mathcal{A}_m\varphi$. Тогда легко видеть, что $\psi = \mathcal{A}(\varphi-\mathbb{P}_-\psi)$ и $\mathbb{P}_-\psi\in X$, ибо $\mathbb{R}_-\psi$ — рациональная функция.

Приведем теперь примеры пространств, удовлетворяющих аксиомам (A_1)–(A_4).

1. Сепарабельные пространства Гёльдера-Зигмунда. Классы Гёльдера-Зигмунда Λ_α при $\alpha\le1$ определяются следующим образом:

$$\Lambda_\alpha = \{f:|f(\zeta\tau)-f(\zeta)|\le c_f|1-\tau|^\alpha,\zeta,\tau \in \mathbb{T}\},\quad 0<\alpha<1,$$

$$\Lambda_1 = \{f:|f(\zeta\tau)+f(\zeta\bar{\tau})-2f(\zeta)|\le c_f|1-\tau|,\zeta,\tau \in \mathbb{T}\}.$$

При $\alpha > 1$

$$\Lambda_\alpha = \{f\in C^n(\mathbb{T}) : f^{(n)}\in \Lambda_{\alpha-n}\},\ n < \alpha .$$

Классы Λ_α не удовлетворяют аксиоме (A_3). Сепарабельное пространство Гёльдера-Зигмунда λ_α, $\alpha>0$, может быть определено как замыкание множества тригонометрических полиномов в Λ_α. Классы λ_α, $\alpha>0$, удовлетворяют аксиомам $(A_1)-(A_4)$. Отметим, что пространства Λ_α, $\alpha>0$, также инвариантны относительно оператора $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}\,\Lambda_\alpha\subset \Lambda_\alpha$, и они входят в первый класс пространств, описанных в [9].

2. Классы Бесова. Классы Бесова B^s_{pq}, $0<p,q\le\infty$, $s>0$, определяются равенствами

$$B^s_{pq} = \{f \in L^p : \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\|\Delta^n_t f\|^q_{L^p}}{|t|^{1+sq}}\, dt < \infty\},\ q < \infty ,$$

$$B^s_{p\infty} = \{f \in L^p :\ \sup_{t\ne 0} \frac{\|\Delta^n_t f\|_{L^p}}{|t|^s} < \infty\},$$

где n - целое число, $n>s$, $(\Delta_t f)(\zeta)=f(e^{it}\zeta)-f(\zeta)$, $\Delta^n_t=\Delta_t\Delta^{n-1}_t$. Мы будем использовать обозначение $B^s_p=B^s_{pp}$. Если p, $q\ge s$, $s>1/p$, $q<\infty$ или $q=1$, $s=1/p$, то пространство B^s_{pq} удовлетворяет аксиомам $(A_1)-(A_4)$.

3. Пространства $\mathcal{F}l^1(w)$. Пусть $w=\{w_n\}_{n\ge 0}$ - последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию

$$w_{|j+k|} \le w_{|j|}\, w_{|k|}\ ,\ j,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Пространство $\mathcal{F}l^1(w)$ состоит из функций f на $\mathbb{T}$ таких, что

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat f(n)|\, w_{|n|} < \infty ,$$

где $\hat f(n)$ - n-й коэффициент Фурье функции f. Пространство $\mathcal{F}l^1(w)$ удовлетворяет аксиомам $(A_1)-(A_4)$.

4. Пространства Соболева (пространства бесселевых потенциалов). Пусть $1<p<\infty$, $s>0$. Пространство $\mathcal{L}^s_p$ определяется как пространство функций, дробные производные которых порядка s принадлежат классу L^p. При $s>1/p$ пространство $\mathcal{L}^s_p$ удовлетворяет аксиомам $(A_1)-(A_4)$.

5. Пусть Z - одно из пространств

$$\mathrm{VMO},\ C_A+\overline{C_A},\ H^1+\overline{H^1}$$

$(C_A=C(\mathbb{T})\cap H^2)$. Тогда для всякого положительного целого числа n пространство $X=\{f:f^{(n)}\in Z\}$ удовлетворяет аксиомам $(A_1)-(A_4)$. Если $Z=L^1+\mathbb{P}_+L^1$, то при $n\ge 2$ пространство $X=\{f:f^{(n)}\in Z\}$ также удовлетворяет аксиомам $(A_1)-(A_4)$.

§ 3. Кратные сингулярные числа операторов Ганкеля

В этом параграфе мы изучим, как ведут себя кратные сингулярные числа операторов Ганкеля при возмущении их символов рациональными дробями и при умножении символов на z и на $\bar{z}$. Будет показано, в частности, что при возмущении символа рациональной дробью $\frac{c}{z-\lambda}$ в общем положении кратность сингулярного числа уменьшается на 2. В качестве следствия будет установлено, что у компактных самосопряженных операторов Ганкеля кратности собственных чисел λ и $-\lambda$ могут отличаться не более чем на единицу.

Пусть φ - функция из VMO такая, что оператор Ганкеля H_φ имеет сингулярное число s кратности μ, и предположим, что

$$s = s_k(H_\varphi) = s_{k+1}(H_\varphi) = \dots = s_{k+\mu-1}(H_\varphi) > s_{k+\mu}(H_\varphi). \tag{2}$$

Следующее утверждение описывает поведение кратных сингулярных чисел при возмущении рациональными дробями общего положения.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\varphi \in \mathrm{VMO}$, s *- сингулярное число оператора* H_φ *кратности* $\mu \ge 2$, *удовлетворяющее условию* (2). *Пусть далее* $\lambda \in \mathbb{D}$, $\zeta \in \mathbb{C}$ *и* $\psi = \varphi + \frac{\zeta}{z-\lambda}$. *Тогда, если* $\zeta \ne 0$, *а точка* λ *не является полюсом функции* $\mathbb{P}_-\mathcal{A}_k\varphi$, *то*

$$s_k(H_\psi) > s = s_{k+1}(H_\psi) = \dots = s_{k+\mu-2}(H_\psi) > s_{k+\mu-1}(H_\psi).$$

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, обозначим символом $\mathcal{R}_l$ множество рациональных функций с полюсами в $\mathbb{D}$, число которых (с учетом кратности) не превосходит l.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы Адамяна-Арова-Крейна вытекает (см. § 2, п. II), что при всех m, $k \le m \le k+\mu-1$, функции $\mathcal{A}_m\varphi$ совпадают и $r = \mathbb{P}_-\mathcal{A}_k\varphi \in \mathcal{R}_k$. Причем r - единственная функция из $\mathcal{R}_{k+\mu-1}$ такая, что

$$\| H_{\varphi-r} \| = s. \tag{3}$$

Поскольку H_ψ - возмущение оператора H_φ оператором ранга 1, то легко видеть, что

$$s_{k+1}(H_\psi) = \dots = s_{k+\mu-2}(H_\psi) = s$$

и что $s_k(H_\psi) \ge s$.

Пусть λ - точка из $\mathbb{D}$, не являющаяся полюсом функции r, $\zeta \ne 0$. Покажем, что

$$s_k(H_\psi) > s .$$

Предположим, что $s_k(H_\psi) = s$. Из теоремы Адамяна-Арова-Крейна вытекает, что

$$s_k(H_\psi) = \| H_{\psi-r_1} \|$$

для некоторой функции r_1 из $\mathcal{R}_k$. Но тогда

$$s_k(H_\psi) = \| H_{\psi - r_2} \| , \qquad (4)$$

где $r_2 = r_1 + \frac{\zeta}{z-\lambda} \in \mathcal{R}_{k+1}$. Покажем, что $r_2 \neq r$. Действительно, если $k=0$, то это очевидно. Если $k>0$, то точка λ не является полюсом функции r. Поэтому если $r_2 = r$, то λ не является полюсом функции r_2. Но тогда $r_1 = -\frac{\zeta}{z-\lambda} + r_3$, где $r_3 \in \mathcal{R}_{k-1}$. Отсюда

$$s_k(H_\varphi) = \| H_{\varphi - r_3} \| ,$$

что противоречит тому, что $s_{k-1}(H_\varphi) > s_k(H_\varphi)$.

Итак, $r_2 \neq r$. Но тогда равенства (3) и (4) показывают, что существуют две различные функции r и r_2 из $\mathcal{R}_{k+1} \subset \mathcal{R}_{k+\mu-1}$ такие, что

$$\| H_{\varphi - r} \| = \| H_{\varphi - r_2} \| = s_k(H_\varphi),$$

что противоречит теореме Адамяна-Арова-Крейна.

Приступим теперь к доказательству того, что $s_{k+\mu-1}(H_\psi) < s$. Поскольку H_ψ - возмущение оператора H_φ ранга 1, то ясно, что $s_{k+\mu-1}(H_\psi) \le s$. Предположим, что $s_{k+\mu-1}(H_\psi) = s$. Тогда

$$s_k(H_\psi) > s = s_{k+1}(H_\psi) = \dots = s_{k+\mu-1}(H_\psi). \qquad (5)$$

Пусть ν - кратность сингулярного числа s оператора H_ψ. Ясно, что $\nu \ge \mu - 1$. Следовательно, по теореме Адамяна-Арова-Крейна существует единственная рациональная функция ρ из $\mathcal{R}_{k+\mu-1}$ такая, что

$$\| H_{\psi - \rho} \| = s.$$

Рассмотрим теперь функцию $\rho_1 = r + \frac{\zeta}{z-\lambda} \in \mathcal{R}_{k+1} \subset \mathcal{R}_{k+\mu-1}$. Из (3) вытекает, что

$$\| H_{\psi - \rho_1} \| = s .$$

Следовательно, $\rho_1 = \rho$ и $\psi - \mathcal{A}_{k+1}\psi = \varphi - \mathcal{A}_k \varphi$. Ввиду теоремы Ажамяна--Арова-Крейна (см. § 2, п. II) из (2) вытекает, что функция $\varphi - \mathcal{A}_k \varphi$ постоянна по модулю п. в. на $\mathbb{T}$ и $\operatorname{ind} T_{\varphi - \mathcal{A}_k \varphi} = 2k+\mu$. (Оператор Тёплица $T_{\varphi - \mathcal{A}_k \varphi}$ фредгольмов, поскольку $\varphi - \mathcal{A}_k \varphi \in QC$ (см. § 2, п. *II*)). Аналогичным образом из (5) следует, что функция $\psi - \mathcal{A}_{k+1}\psi$ постоянна по модулю и $\operatorname{ind} T_{\psi - \mathcal{A}_{k+1}\psi} = 2(k+1)+\nu$. Поскольку $\nu \ge \mu - 1$, то $2(k+1)+\nu > 2k+\mu$, что приводит к противоречию. ●

С л е д с т в и е. *Пусть s - сингулярное число оператора H_φ кратности μ и имеет место (2). Пусть далее Λ - множество из l точек в круге $\mathbb{D}$, $l \ge \frac{\mu-1}{2}$, не являющихся полюсами функции $\mathbb{P}_- \mathcal{A}_k \varphi$. Тогда существуют сколь угодно малые числа ζ_λ, $\lambda \in \Lambda$, такие, что оператор Ганкеля H_ψ,*

$$\psi = \varphi + \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{\zeta_\lambda}{z-\lambda} ,$$

удовлетворяет условию

$$s_k(H_\psi) > s_{k+1}(H_\psi) >\ldots> = s_{k+\mu-1}(H_\psi) > s_{k+\mu}(H_\psi).$$

Это утверждение легко выводится из теоремы 1 по индукции.

Рассмотрим теперь случай, когда λ - полюс функции $\mathbb{P}_-\mathcal{A}_k\varphi$.

Т е о р е м а 2. *Пусть $\varphi\in VMO$, s - сингулярное число оператора H_φ кратности $\mu\geq2$, удовлетворяющие условию (2). Тогда, если точка λ из $\mathbb{D}$ является полюсом функции $\mathbb{P}_-\mathcal{A}_k\varphi$, $\zeta\in\mathbb{C}$, $\psi = \varphi + \frac{\zeta}{z-\lambda}$, то либо s - сингулярное число оператора H_ψ кратности μ, и тогда*

$$s = s_k(H_\psi) = s_{k+1}(H_\psi) = \ldots = s_{k+\mu-1}(H_\psi) > s_{k+\mu}(H_\psi), \tag{6}$$

либо s - сингулярное число оператора H_ψ кратности $\mu+2$, и тогда

$$s = s_{k-1}(H_\psi) = s_k(H_\psi) = \ldots = s_{k+\mu}(H_\psi) > s_{k+\mu+1}(H_\psi). \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим опять функцию $r = \mathbb{P}_-\mathcal{A}_k\varphi \in \mathcal{R}_k$. Ясно, что в условиях теоремы функция $r+\frac{\zeta}{z-\lambda} \in \mathcal{R}_k$. Поэтому $\mathcal{A}_k\psi = =\mathcal{A}_k\varphi + \frac{\zeta}{z-\lambda}$. Следовательно, $\psi-\mathcal{A}_k\varphi = \varphi-\mathcal{A}_k\varphi$ и, стало быть, функция $\psi-\mathcal{A}_k\psi$ имеет постоянный модуль и $\operatorname{ind} T_{\psi-\mathcal{A}_k\varphi}= 2k+\mu$.

Теперь возможны два случая. В первом случае $r + \frac{\zeta}{z-\lambda} \in \mathcal{R}_{k-1}$. Тогда рассуждениями, аналогичными рассуждениям в доказательстве теоремы, легко показать, что имеет место (7). Если же $r + \frac{\zeta}{z-\lambda} \in \in\mathcal{R}_k\setminus\mathcal{R}_{k-1}$, то столь же легко показать, что имеет место (6). ●

Применим теперь теорему 1 к изучению спектральных свойств „самосопряженных" операторов Ганкеля.

Иногда удобнее считать, что оператор Ганкеля действует в одном пространстве. Это можно сделать следующим образом. Пусть φ - функция класса BMO, J - унитарный оператор в $L^2(\mathbb{T})$, определенный равенством

$$Jz^n = z^{-n-1},\ n\in\mathbb{Z}.$$

Тогда оператор Γ_φ (который также будет называться оператором Ганкеля) в H^2 определяется равенством

$$\Gamma_\varphi f = J H_\varphi f,\ f \in H^2.$$

Оператор Γ_φ имеет матрицу $\{\hat\varphi(-n-k-1)\}_{n,k\geq0}$ в базисе $\{z^n\}_{n\geq0}$ пространства H^2. Ясно, что оператор Γ_φ самосопряжен в том и только в том случае, когда коэффициенты Фурье $\hat\varphi(n)$, $n<0$, вещественны.

Авторы работы [4] отметили (устно), что методы их работы позволяют доказать следующее утверждение. Пусть A - компактный самосопряженный оператор, обладающий следующими свойствами: 1) $\dim\operatorname{Ker} A=0$ или $\dim\operatorname{Ker} A=\infty$; 2) если $\lambda\in\mathbb{R}$ и $\lambda\neq0$, то

$$|\dim\operatorname{Ker}(A-\lambda I) - \dim\operatorname{Ker}(A+\lambda I)| \leq 1.$$

Тогда существует самосопряженный оператор Ганкеля, унитарно эквивалентный оператору A.

Ими же было высказано (устно) предположение о том, что условия 1) и 2) необходимы для того, чтобы компактный самосопряженный оператор A был унитарно эквивалентен оператору Ганкеля. Необходимость условия 1) хорошо известна и очевидна (см. [20]). Оказывается, что необходимость условия 2) легко вывести из теоремы 1.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $\lambda\in\mathbb{R}$. *Тогда для всякого компактного самосопряженного оператора* Γ_φ *справедливо неравенство*

$$\left|\ \dim\operatorname{Ker}(\Gamma_\varphi-\lambda I)-\dim\operatorname{Ker}(\Gamma_\varphi+\lambda I)\ \right|\le 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$m=\dim\operatorname{Ker}(\Gamma_\varphi-\lambda I),\quad n=\dim\operatorname{Ker}(\Gamma_\varphi+\lambda I).$$

Пусть для определенности $\lambda>0$, $n\ge m$. Доказательство будем проводить индукцией по m. Предположим, что $n-m\ge 2$. Ясно, что при $x\in(-1,1)$ и вещественных c оператор Ганкеля $\Gamma_{\frac{c}{z-x}}$ самосопряжен.

Предположим сначала, что $m>0$. Сингулярное число λ оператора Γ_φ имеет кратность $n+m$. Пусть k - наименьшее число такое, что $s_k(\Gamma_\varphi)=\lambda$. Выберем теперь точку x на $(-1,1)$ такую, что x не является полюсом функции $\mathbb{P}_-\mathcal{A}_k\varphi$. Тогда по теореме 1 при $c\ne 0$ кратность сингулярного числа λ оператора $\Gamma_{\varphi+\frac{c}{z-x}}$ равна $m+n-2$.

Поскольку $\Gamma_{\frac{c}{z-x}}$ - самосопряженный оператор ранга 1, то очевидно, что кратность собственных чисел λ и $-\lambda$ возмущенного оператора $\Gamma_{\varphi+\frac{c}{z-x}}$ может измениться не более чем на единицу. А так как суммарная кратность, равная кратности сингулярного числа λ, равна $m+n-2$, то при возмущении оператора Γ_φ оператором $\Gamma_{\frac{c}{z-x}}$ кратности собственных чисел λ и $-\lambda$ падают на единицу. Продолжим этот процесс до тех пор, пока кратность числа $-\lambda$ станет равной нулю. Тогда на следующем шаге кратность сингулярного числа λ по теореме 1 должна уменьшиться на 2, а кратность собственного числа λ может уменьшиться лишь на единицу, что приводит к противоречию с предположением $n-m\ge 2$. ●

Перейдем теперь к изучению вопроса о поведении кратных сингулярных чисел оператора Ганкеля при умножении его символа на z или $\bar z$. Мы рассмотрим несколько более общую ситуацию, когда вместо z рассматривается фактор Бляшке b_ζ $\zeta\in\mathbb{D}$,

$$b_\zeta(z)=\frac{z-\zeta}{1-\bar\zeta z}. \tag{8}$$

Т е о р е м а 4. *Пусть* $\varphi\in\mathrm{VMO}$, s *- сингулярное число оператора* H_φ *кратности* $\mu\geq 2$, *удовлетворяющие условию* (2). *Пусть далее* $\zeta\in\mathbb{D}$ *и* $\psi = \bar{b}_\zeta\varphi$. *Справедливы следующие утверждения.*

1) *Если* $(\mathcal{A}_k\varphi)(\zeta)=0$, *то* s *- сингулярное число оператора* H_ψ *кратности* $\mu+1$ *и*

$$s = s_k(H_\psi) = s_{k+1}(H_\psi) = \ldots = s_{k+\mu}(H_\psi).$$

2) *Если* $(\mathcal{A}_k\varphi)(\zeta) \neq 0$, *то* s *- сингулярное число оператора* H_ψ *кратности* $\mu-1$ *и*

$$s = s_{k+1}(H_\psi) = s_{k+2}(H_\psi) = \ldots = s_{k+\mu-1}(H_\psi).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию $\bar{b}_\zeta\mathcal{A}_k\varphi$. Функция $\psi-\bar{b}_\zeta\mathcal{A}_k\varphi$ имеет постоянный модуль п. в. на $\mathbb{T}$, принадлежит классу QC и $\mathrm{ind}T_{\bar{b}_\zeta(\varphi-\mathcal{A}_k\varphi)}=2k+\mu+1$. При условии 1) $\mathbb{P}_-\bar{b}_\zeta\mathcal{A}_k\varphi$ - рациональная функция степени k, а при условии 2) $\mathbb{P}_-\bar{b}_\zeta\mathcal{A}_k\varphi$ - рациональная функция степени $k+1$. Утверждение теоремы вытекает теперь из следствия к теореме Адамяна-Арова-Крейна (см. § 2, п. II), причем $A_{k+1}\psi = \bar{b}_\zeta\mathcal{A}_k\varphi$. ●

Т е о р е м а 5. *Пусть* $\varphi\in\mathrm{VMO}$, s *- сингулярное число оператора* H_φ *кратности* $\mu\geq 2$, *удовлетворяющие условию* (2). *Пусть далее* $\zeta\in\mathbb{D}$ *и* $\psi = b_\zeta\varphi$. *Справедливы следующие утверждения.*

1) *Если* ζ *- полюс функции* $\mathbb{P}_-\mathcal{A}_k\varphi$, *то* s *- сингулярное число оператора* H_ψ *кратности* $\mu+1$ *и*

$$s = s_{k-1}(H_\psi) = s_k(H_\psi) = \ldots = s_{k+\mu-1}(H_\psi).$$

2) *Если* ζ *- не полюс функции* $\mathbb{P}_-\mathcal{A}_k\varphi$, *то* s *- сингулярное число оператора* H_ψ *кратности* $\mu-1$ *и*

$$s = s_k(H_\psi) = s_{k+1}(H_\psi) = \ldots = s_{k+\mu-2}(H_\psi).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию $b_\zeta\mathcal{A}_k\varphi$. Функция $\psi-b_\zeta\mathcal{A}_k\varphi$ имеет постоянный модуль п. в. на $\mathbb{T}$, принадлежит классу QC и $\mathrm{ind}\, T_{b_\zeta(\varphi-\mathcal{A}_k\varphi)}=2k+\mu-1$. При условии 1) $\mathbb{P}_-b_\zeta\mathcal{A}_k\varphi$ - рациональная функция степени $k-1$, а при условии 2) $\mathbb{P}_-b_\zeta\mathcal{A}_k\varphi$ - рациональная функция степени k. Утверждение теоремы вытекает теперь из следствия к теореме Адамяна-Арова-Крейна (см. § 2, п. II), причем $\mathcal{A}_k\psi = b_\zeta\mathcal{A}_k\varphi$. ●

§ 4. Непрерывность оператора $\mathcal{A}_m$ и кратность s-числа s_m

В этом параграфе мы покажем, что если пространство X функций на $\mathbb{T}$ удовлетворяет аксиомам $(A_1)-(A_4)$, а функция φ из X такова, что кратность сингулярного числа $s_m(H_\varphi)$ оператора Ганкеля H_φ равна единице, то φ является точкой непрерывности оператора $\mathcal{A}_m$ в норме пространства X. В случае, когда кратность μ сингулярного числа $s = s_m(H_\varphi)$ больше единицы и выполнено условие (2), мы покажем, что при $m \neq k + \frac{\mu-1}{2}$ функция φ не является точкой непрерывности в значительно более слабом смысле. Именно сходимость φ_n к φ в очень сильном смысле не влечет сходимости $\mathcal{A}_m\varphi$ к $\mathcal{A}_m\varphi$ даже в норме пространства BMO. В случае, когда $m = k + \frac{\mu-1}{2}$, полученные результаты не столь удовлетворительны. Мы покажем, что в этом случае сходимость φ_n к φ в пространстве λ_α при нецелых α не влечет сходимости $\mathcal{A}_m\varphi_n$ к $\mathcal{A}_m\varphi$ в BMO. В заключении параграфа мы покажем, что существуют функции $\varphi \in C(\mathbb{T})$ такие, что кратность s-числа $s_0(H_\varphi)$ равна единице, но оператор $\mathcal{A}$ разрывен в точке φ в равномерной норме.

Введем следующее обозначение. Пусть $\varphi \in \mathrm{VMO}$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим символом $\mu_m(\varphi)$ кратность сингулярного числа $s_m(H_\varphi)$ оператора H_φ: $\mu_m(\varphi) = \dim\{f \in H^2:\ H_\varphi^* H_\varphi f = s_m^2(H_\varphi) f\}$.

Сначала мы установим одно вспомогательное утверждение, которое будет использовано в этом и следующем параграфах. Всюду в этой работе символом H_φ^* обозначается оператор, сопряженный с оператором H_φ, рассматриваемым как оператор из H^2 в H^2_-,

$$H_\varphi^* : H^2_- \longrightarrow H^2,\quad H_\varphi^* f = \mathbb{P}_+ \bar{\varphi} f,\quad f \in H^2_-.$$

Если X - пространство функций, то символом X_A обозначается подпространство, состоящее из аналитических в $\mathbb{D}$ функций: $X_A = \{f \in X: \hat{f}(n) = 0 \text{ при } n < 0\}$.

Л е м м а 1. *Пусть X - пространство функций, удовлетворяющее аксиомам* $(A_1)-(A_4)$, *и $\varphi \in X$. Тогда оператор $H_\varphi^* H_\varphi$ имеет одинаковый спектр в H^2 и X_A.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из аксиом $(A_1)-(A_3)$ вытекает, что оператор $H_\varphi^* H_\varphi$ отображает пространство X_A в себя и является на нем компактным оператором. Следовательно, спектр оператора $H_\varphi^* H_\varphi$ в X_A состоит из точки $\{0\}$ и собственных значений. По теореме Хартмана $H_\varphi^* H_\varphi$ - компактный оператор в H^2. Ясно, что всякий собственный (корневой) вектор оператора $H_\varphi^* H_\varphi$ в X_A является собственным (корневым) вектором в H^2. Обратное утверждение также имеет место и установлено в работе [23]. Это доказывает лемму. ●

З а м е ч а н и е. Из доказательства видно, что ненулевые собственные значения оператора $H_\varphi^* H_\varphi$ имеют одинаковую кратность в H^2 и X_A.

Т е о р е м а 6. *Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$, X - пространство функций на $\mathbb{T}$, удовлетворяющее аксиомам* $(A_1)-(A_4)$, *и φ - функция из X такая, что*

$\mu_m(\varphi)=1$. *Тогда если* $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ *- последовательность функций из* X *такая, что* $\lim \| \varphi_n-\varphi \|_X =0$, *то* $\lim\limits_n \| \mathcal{A}_m\varphi_n-\mathcal{A}_m\varphi \|_X = 0$.

Доказательство. Пусть f - собственная функция оператора $H_\varphi^* H_\varphi$, отвечающая собственному числу $(s_m(H_\varphi))^2$. Тогда $\mathcal{A}_m\varphi = \varphi - \frac{H_\varphi f}{f}$ (см. § 2, п. II). Из леммы 1 вытекает, что $f\in X$. Докажем сначала следующее утверждение.

Лемма 2. *Функция f не обращается в нуль на $\mathbb{T}$.*

Доказательство леммы. В работе [3] установлено, что $f = bh$, где h - внешняя функция, а b - произведение Бляшке, имеющее m нулей. Более того, в этом случае $H_\varphi f = c\overline{zbh}$, $c\in\mathbb{C}$ (см. [3]). Пусть h_1 - внешняя функция такая, что

$$\frac{\bar{b}}{b} = \bar{z}^{2m}\frac{\bar{h}_1}{h_1}.$$

Ясно, что $h_1\in C^\infty$ и h_1 не обращается в нуль на $\mathbb{T}$. Имеем

$$\frac{H_\varphi f}{f} = c\,\bar{z}^{2m+1}\frac{\bar{h}_1\bar{h}}{h_1 h}.$$

Положим $v = c\bar{z}^{2m+1}\frac{\overline{h_1 h}}{h_1 h}$. В п. III, § 2 отмечалось, что $\mathcal{A}_m X\subset X$ и, следовательно, $v\in X$. Далее, кратность s-числа $s_0(H_v)$ равна $2m+1$ (см. § 2, п. II) и, следовательно, $\operatorname{ind} T_v= 2m+1$ (см. § 2, п. II).

В работе [9] (см. доказательство теоремы 3.4) показано, что в этом случае внешняя функция $h_1 h$ не обращается в нуль на $\mathbb{T}$. Следовательно, h также не обращается в нуль на $\mathbb{T}$. ●

Продолжим теперь доказательство теоремы 6. Пусть Γ - контур, окружающий точку $(s_m(H_\varphi))^2$, не содержащий точек спектра оператора $H_\varphi^* H_\varphi$ на Γ и не содержащий внутри себя точек $(s_k(H_\varphi))^2$ при $k \neq m$. Из леммы 1 вытекает, что спектр оператора $H_\varphi^* H_\varphi$ в X_A внутри Γ также состоит из точки $(s_m(H_\varphi))^2$. Легко видеть, что в условиях теоремы операторы $H_{\varphi_n}^* H_{\varphi_n}$ сходятся к $H_\varphi^* H_\varphi$ в операторной норме как в H^2, так и в X_A. Следовательно, при больших значениях n спектр оператора $H_{\varphi_n}^* H_{\varphi_n}$ (неважно в X_A или в H^2) не имеет точек на Γ и состоит из одной точки внутри Γ.

Рассмотрим теперь в пространстве X_A спектральные проекторы $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}_n$, соответствующие операторам $H_\varphi^* H_\varphi$ и $H_{\varphi_n}^* H_{\varphi_n}$, полученные интегрированием резольвент по контуру Γ. Из этой формулы видно, что $\mathcal{P}_n\longrightarrow\mathcal{P}$ в операторной норме пространства X_A.

Предположим, что число n достаточно велико и что $\operatorname{rank} \mathcal{P}_n=1$. Положим $f_n=\mathcal{P}_n f$. Ясно, что

$$H^*_{\varphi_n} H_{\varphi_n} f_n = (s_m(H_{\varphi_n}))^2 f_n.$$

Из сходимости $\mathcal{P}_n$ к $\mathcal{P}$ вытекает, что $\lim\limits_n \|f_n - f\|_X = 0$, а следовательно, $\lim\limits_n \|f_n - f\|_{L^\infty} = 0$. Теперь из леммы 2 вытекает, что при больших n функция f_n также не обращается в нуль на $\mathbb{T}$. Отсюда ввиду аксиом (A_2), (A_4) получаем

$$\lim_n \|{}^1/f_n - {}^1/f\|_X = 0.$$

Теперь из равенства

$$\mathcal{A}_m \varphi_n = \varphi_n - \frac{H_{\varphi_n} f_n}{f_n}$$

вытекает, что $\lim\limits_n \|\mathcal{A}_m \varphi_n - \mathcal{A}_m \varphi\|_X = 0$. ●

Перейдем теперь к случаю кратного сингулярного числа $s_m(H_\varphi)$. Рассмотрим сначала случай, когда $m \neq k + \frac{\mu-1}{2}$, где

$$s_k(H_\varphi) = s_{k+1}(H_\varphi) = \ldots = s_{k+\mu-1}(H_\varphi),\ \mu = \mu_m(\varphi),\ k \le m \le k+\mu-1. \tag{9}$$

Т е о р е м а 7. *Пусть* $m \in \mathbb{Z}_+$, $\varphi \in VMO$, $s_m(H_\varphi) > 0$, $\mu_m(\varphi) > 1$ *и выполнено условие* (9). *Предположим, что* $m \neq k + \frac{\mu-1}{2}$, *и пусть* Λ – *множество в* $\mathbb{D}$, *состоящее из* $[\frac{\mu-1}{2}]$ *точек, не являющихся полюсами функции* $\mathbb{P}_- \mathcal{A}_k \varphi$. *Тогда существуют последовательности* $\{\zeta_\lambda^{(n)}\}_{n\ge 0}$, $\lambda \in \Lambda$, *ненулевых комплексных чисел такие, что* $\lim\limits_n \zeta_\lambda^{(n)} = 0$, $\lambda \in \Lambda$, *и для*

$$\varphi_n = \varphi + \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{\zeta_\lambda^{(n)}}{z - \lambda}$$

справедливо соотношение

$$\mathcal{A}_m \varphi_n \underset{n}{\not\to} \mathcal{A}_m \varphi$$

в норме пространства BMO.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу следствия к теореме 1 существуют стремящиеся к нулю последовательности $\{s_\lambda^{(n)}\}_{n\ge 0}$ такие, что кратность $\mu_m(\varphi_n)$ равна единице. Но тогда функция $\varphi_n - \mathcal{A}_m \varphi_n$ постоянна по модулю и $\operatorname{ind} T_{\varphi_n - \mathcal{A}_m \varphi_n} = 2m+1$ по теореме Адамяна-Арова-Крейна (см. § 2, п. II). По этой же теореме функция $\varphi - \mathcal{A}_m \varphi$ постоянна по модулю и $\operatorname{ind} T_{\varphi - \mathcal{A}_m \varphi} = 2k + \mu$. Поскольку $m \neq k + \frac{\mu-1}{2}$, то $2m+1 \neq 2k+\mu$.

Положим

$$v = \frac{1}{s_m(H_\varphi)} (\varphi - \mathcal{A}_m \varphi),$$

$$v_n = \frac{1}{s_m(H_{\varphi_n})} (\varphi_n - \mathcal{A}_m \varphi_n).$$

Ясно, что $\lim_n s_m(H_{\varphi_n})=s_m(H_\varphi)$ и что функции v, v_n унимодулярны. Поэтому для доказательства теоремы достаточно установить, что $v_n \not\to v$ в BMO. Утверждение теоремы вытекает теперь из следующей леммы.

Л е м м а 3. *Пусть* v, v_n *- унимодулярные функции такие, что операторы Тёплица* T_v *и* T_{v_n} *фредгольмовы. Тогда если* $\operatorname{ind} T_{v_n} \neq \operatorname{ind} T_v$, *то*

$$\|v_n - v\|_{BMO} \underset{n}{\not\to} 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножая функции v и v_n на $z^{\operatorname{ind} T_v}$, переходя в случае необходимости к комплексному сопряжению и к подпоследовательности, мы можем полагать, что $\operatorname{ind} T_v=0$, а $\operatorname{ind} T_{v_n}>0$. Тогда оператор Тёплица T_v обратим и, следовательно, $\|H_v\|<1$, а оператор Тёплица T_{v_n} не обратим слева и, следовательно, $\|H_{v_n}\|=1$ (см. § 2, п. II).

Тогда если $v_n \to v$ в BMO, то $\lim_n \|H_v - H_{v_n}\|=0$. Следовательно, $\lim_n \|H_{v_n}\|=\|H_v\|$, что приводит к противоречию. •

Перейдем теперь к случаю $m=k+\frac{\mu-1}{2}$, где $\mu=\mu_m(\varphi)>1$. Мы покажем, что в этом случае φ не является точкой непрерывности оператора $\mathcal{A}_m$ в норме пространства λ_α при нецелых $\alpha>0$. При доказательстве этого утверждения мы используем идею из работы [16]. Напомним, что в [16] показано, что при $\mu_m(\varphi)>1$ (см. (9)) функция φ не является точкой непрерывности оператора $\mathcal{A}_m$ в норме пространства $\mathcal{F}l^1$.

Т е о р е м а 8. *Пусть* $m\in\mathbb{Z}_+$, φ *- функция из* λ_α, $\alpha>0$, $\alpha\notin\mathbb{Z}$, *такая, что* $s_m(H_\varphi)>0$, $\mu_m(\varphi)>1$, *и выполнено условие* (9). *Тогда если* $m=k+\frac{\mu-1}{2}$, *то существует последовательность* φ_n *из* λ_α, *сходящаяся к* φ *в* λ_α, *такая, что*

$$\|\mathcal{A}_m\varphi_n - \mathcal{A}_m\varphi\|_{BMO} \underset{n}{\not\to} 0 .$$

Напомним, что при $m\neq k+\frac{\mu-1}{2}$ имеет место значительно более сильное утверждение (теорема 7).

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма.

Л е м м а 4. *Пусть* $\alpha>0$, $\alpha\notin\mathbb{Z}$, $d=[d]$, *и* φ *- функция из* λ_α *такая, что* $\varphi^{(s)}(1)=0$ *при целых* s, $0\le s\le d$. *Тогда*

$$\lim_{x\to 1} \|\varphi \bar{b}_x - \varphi\|_{\lambda_\alpha} = 0 ,$$

где $x\in(-1,1)$, *а фактор Бляшке* b_x *определен формулой* (8).

Выведем сначала теорему 8 из леммы 4.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Пусть q - такой полином из H^2, что $(\varphi-q)^{(s)}(1)=0$ при $0\le s\le d$. Ясно, что $\mathcal{A}_m(\varphi)=q+\mathcal{A}_m(\varphi-q)$. По лемме 4, примененной к функции $\varphi-q$, $\lim_{x\to 1} \|q +$

$+(\varphi-q)\bar{b}_x-\varphi\|_{\lambda_\alpha}=0$. Ясно также, что

$$\mathcal{A}_m(q + (\varphi-q)\bar{b}_x) = q + \mathcal{A}_m((\varphi-q)\bar{b}_x).$$

Поэтому для доказательства теоремы достаточно установить, что

$$\|\mathcal{A}_m((\varphi-q)\bar{b}_x) - \mathcal{A}_m(\varphi-q)\|_{\text{BMO}} \underset{x\to 1}{\not\longrightarrow} 0. \tag{10}$$

Положим $\psi=\varphi-q$. Тогда $H_\psi=H_\varphi$ и

$$s_k(H_\psi) = \ldots = s_{k+\mu}(H_\psi).$$

По теореме 4 $s=s_m(H_\varphi)$ - сингулярное число оператора $H_{\bar{b}_x\psi}$, причем

$$s = s_{k+1}(H_{\psi\bar{b}_x}) = \ldots = s_{k+\mu}(H_{\psi\bar{b}_x})$$

и $\mathcal{A}_{k+1}(\bar{b}_x\psi)=\bar{b}_x\mathcal{A}_k\psi$. Ясно также, что $\mathcal{A}_m(\bar{b}_x\psi)=\mathcal{A}_{k+1}(\bar{b}_x\psi)$, и $\mathcal{A}_m\psi=\mathcal{A}_k\psi$. Далее по лемме 4 $\lim\limits_{x\to 1}\psi\bar{b}_x=\psi$ в λ_α, и поэтому для доказательства (10) достаточно показать, что

$$\|\bar{b}_x(\psi-\mathcal{A}_k\psi) - (\psi - \mathcal{A}_k\psi)\|_{\text{BMO}} \underset{x\to 1}{\not\longrightarrow} 0.$$

Но функции $\psi-\mathcal{A}_k\psi$ и $\bar{b}_x(\psi-\mathcal{A}_k\psi)$ постоянны по модулю, входят в QC и

$$\operatorname{ind} T_{\psi-\mathcal{A}_k\psi} = 2k + \mu, \quad \operatorname{ind} T_{\bar{b}_x(\psi-\mathcal{A}_k\psi)} = 2k + \mu +1.$$

Результат теперь вытекает из леммы 3. ●

Для доказательства леммы 4 понадобятся три вспомогательных утверждения.

Сублемма 1. *Пусть* $f\in C^n(\mathbb{T})$, $f^{(k)}(1)=0$, $0\le k\le n$. *Тогда*

$$\lim_{x\to 1}\|f\bar{b}_x - f\|_{C^n(\mathbb{T})} = 0.$$

Сублемма 2. *Пусть* φ *удовлетворяет условиям леммы* 4. *Тогда*

$$\|\varphi\bar{b}_x\|_{\Lambda_\alpha} \le \text{const } \|\varphi\|_{\Lambda_\alpha}.$$

Сублемма 3. *Пусть* φ *удовлетворяет условиям леммы* 4. *Тогда существует последовательность* $\{\varphi_n\}_{n\ge 0}$, $\varphi_n \in C^{d+1}(\mathbb{T})$ *такая, что* $\varphi_n^{(s)}(1)=0$, $0\le s\le d+1$, *и*

$$\lim_n \|\varphi_n - \varphi\|_{\lambda_\alpha} = 0.$$

Доказательство сублеммы 1. Ясно, что достаточно доказать следующие утверждения.

1) Пусть $f\in C(\mathbb{T})$, $f(1)=0$. Тогда $\lim\limits_n \|f\bar{b}_x-f\|_{L^\infty}=0$.

2) Пусть $f\in C^k(\mathbb{T})$, $f^{(j)}(1)=0$, $0\le j\le k$. Тогда

$$\lim_{x\to 1}\left\|\frac{(1-x)f(z)}{(1-xz)^{k+1}}\right\|_{L^\infty}=0.$$

Первое утверждение доказывается совсем просто. Докажем второе. Легко видеть, что оно эквивалентно следующему утверждению.

Пусть $g\in C^k[-1,1]$, $g^{(j)}(0)=0$, $0\le j\le k$, и пусть

$$g_\delta(y)=\frac{\delta\, g(y)}{(y^2+\delta^2)^{\frac{k+1}{2}}}.$$

Тогда $\lim\limits_{\delta\to 0}\|g_\delta\|_{L^\infty[-1,1]}=0$. Но это утверждение очевидно, ибо $|g(y)=O(|g|^k)$ при $y\to 0$. ●

Сублемма 2 доказывается столь же элементарно, сколь сублемма 1, поэтому доказательство будет опущено. ●

Доказательство сублеммы 3. Пусть $\varphi\in\lambda_\alpha$. Рассматривая свертки функции φ с ядрами Фейера, мы можем аппроксимировать сначала функцию φ гладкими функциями ψ такими, что $\psi^{(k)}(1)=0$, $k=0,1,\dots,d$. Пусть теперь ψ - такая гладкая функция. Положим

$$\psi_n=\psi-c_nz^n,$$

где числа c_n подобраны так, что $\psi_n^{(d+1)}(0)=0$. Легко видеть, что $\|z^n\|_{\lambda_\alpha}\ n^\alpha$ и $|c_n|\le\mathrm{const}\cdot n^{-d-1}$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\|c_nz^n\|_{\lambda_\alpha}=0$. ●

Доказательство леммы 4. Пусть $\tilde\lambda_\alpha$ - подпространство пространства λ_α, состоящее из функций φ, для которых $\varphi^{(*)}(1)=0$, $k=0,\dots,d$. Обозначим символом $\mathcal{L}$ подмножество в $\tilde\lambda_\alpha$, состоящее из функций φ класса C^{d+1} таких, что $\varphi^{(*)}(1)=0$, $k=0,1,\dots,d+1$. Ввиду сублеммы 3 множество $\mathcal{L}$ плотно в $\tilde\lambda_\alpha$. Определим операторы L_x из $\tilde\lambda_\alpha$ в λ_α равенством

$$L_x\varphi=\varphi\bar{b}_x.$$

Тогда в силу сублеммы 2 $\|L_x\|\le\mathrm{const}$ и в силу сублеммы 1

$$\lim_{x\to 1}\|L_x\varphi-\varphi\|_{\lambda_\alpha}=0,\qquad \varphi\in\mathcal{L}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 1}L_x=L$$

в сильной операторной топологии, что доказывает лемму 4. ●

Следующее утверждение показывает, что сходимость $\mathcal{A}_m\varphi_n$ к $\mathcal{A}_m\varphi$ имеет место и в случае кратного s-числа $s_m(H_\varphi)$, если мы наложим одно дополнительное ограничение.

Теорема 9. *Пусть* $m\in\mathbb{Z}_+$, X *- пространство функций на* $\mathbb{T}$, *удовлетворяющее аксиомам* $(A_1)-(A_4)$. *Предположим, что* $\varphi\in X$, $s_m(H_\varphi)>0$, $\varphi_n\in X$, $n\geq 0$, $\lim_n \|\varphi_n-\varphi\|_X=0$, *и* $\mu_m(\varphi_n)=\mu_m(\varphi)$ *при всех* $n\geq 0$. *Тогда* $\lim_n\|\mathcal{A}_m\varphi_n-\mathcal{A}_m\varphi\|_X=0$.

Доказательство теоремы 9 аналогично доказательству теоремы 1. •

Теперь мы покажем, что существуют функции φ из $C(\mathbb{T})$ такие, что $\mu_0(\varphi)=1$, но оператор $\mathcal{A}$ разрывен в точке φ в равномерной норме.

Теорема 10. *Пусть* $\varphi\in C(\mathbb{T})$, *но* $\mathcal{A}\varphi\notin C(\mathbb{T})$. *Тогда* φ *не является точкой непрерывности оператора* $\mathcal{A}$ *в* L^∞.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ - последовательность функций из C^∞, сходящаяся к φ в L^∞. Поскольку $\mathcal{A}C^\infty\subset C^\infty$, то $\mathcal{A}\varphi_n\in C^\infty$. Следовательно, последовательность $\{\mathcal{A}\varphi_n\}_{n\geq 0}$ не может сходиться к $\mathcal{A}\varphi$ в L^∞, ибо в противном случае функция $\mathcal{A}\varphi$ была бы непрерывной. •

Примеры таких функций φ могут быть найдены в [1]. Покажем, как можно построить такую функцию φ, для которой $\mu_0(\varphi)=1$. Пусть β - вещественная функция из $C(\mathbb{T})$, для которой $\tilde{\beta}\notin C(\mathbb{T})$. Положим $u=\bar{z}e^{i\tilde{\beta}}$. Ясно, что $\operatorname{ind} T_u=1$, и поэтому $\operatorname{dist}_{L^\infty}(u,H^\infty)=1$ и $\mu_0(u)=1$ (см. § 2, п. II). Поскольку $u\in QC\subset H^\infty+C(\mathbb{T})$, имеем $u=\varphi+\psi$, где $\varphi\in C(\mathbb{T})$, $\psi\in H^\infty$. Ясно, что $H_\varphi=H_\psi$ и $\mathcal{A}\varphi=-\psi\notin C(\mathbb{T})$.

§ 5. Ослабленное свойство непрерывности

Рассмотрим теперь случай кратного сингулярного числа $s_m(H_\varphi)$. Возникает вопрос, как в этом случае можно приближенно вычислить $\mathcal{A}_m\varphi$. Для этого надо оценить отклонения $\mathcal{A}_m\varphi_n-\mathcal{A}_m\varphi$ при условии, что φ_n - малое возмущение функции φ. Следующее утверждение показывает, что в случае кратного сингулярного числа $s_m(H_\varphi)$ имеет место ослабленное свойство непрерывности.

Теорема 11. *Пусть* $m\in\mathbb{Z}_+$, X *- пространство функций на* $\mathbb{T}$, *удовлетворяющее аксиомам* $(A_1)-(A_4)$, $\varphi\in X$, $s_m(H_\varphi)>0$, *и* $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ *- последовательность функций, сходящаяся в* X *к* φ. *Тогда при всех* $q<\infty$

$$\lim_n \|\mathcal{A}_m\varphi_n-\mathcal{A}_m\varphi\|_{L^q}<\infty .$$

Доказательство. Пусть $s=s_m(H_\varphi)$, $\mu=\mu_m(\varphi)$, и пусть

$$s=s_k(H_\varphi)=s_{k+1}(H_\varphi)=\ldots=s_{k+\mu-1}(H_\varphi).$$

Рассмотрим контур Γ, окружающий точку $(s_m(H_\varphi))^2$, не содержащий точек спектра оператора $H_\varphi^*H_\varphi$ на Γ и не содержащий внутри себя других точек спектра. Тогда при больших n точки контура Γ лежат в резольвентном множестве оператора $H_{\varphi_n}^*H_{\varphi_n}$ и внутри Γ лежит μ точек спектра оператора $H_{\varphi_n}^*H_{\varphi_n}$ (с учетом кратности). Напомним, что по лемме 1 операторы $H_\varphi^* H_\varphi$ и $H_{\varphi_n}^* H_{\varphi_n}$ имеют одинаковый спектр в H^2 и X_A.

Пусть $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_n$ - спектральные проекторы операторов $H_\varphi^* H_\varphi$, $H_{\varphi_n}^* H_{\varphi_n}$ в X_A, полученные интегрированием резвольвент по контуру Г. Тогда $\lim_n \mathcal{P}_n = \mathcal{P}$ в операторной норме пространства X_A.

Пусть f_n - собственная функция оператора $H_{\varphi_n}^* H_{\varphi_n}$, соответствующая собственному значению $(s_m(H_{\varphi_n}))^2$. Нормируем ее условием $\|f_n\|_X=1$. Тогда $\mathcal{P}f_n$ - собственная функция оператора $H_\varphi^* H_\varphi$, соответствующая собственному числу $(s_m(H_\varphi^* H_\varphi))^2$.

Рассмотрим теперь собственное подпространство оператора $H_\varphi^* H_\varphi$, отвечающее собственному числу $(s_m(H_\varphi))^2$. Пусть $H_\varphi^* H_\varphi f = (s_m(H_\varphi))^2 f$, $f\neq 0$. Положим

$$v = \frac{1}{s_m(H_\varphi)} \frac{H_\varphi f}{f} .$$

Тогда v - унимодулярная функция, $\|H_v f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$ и размерность подпространства

$$E = \{g : \|H_v g\|_{L^2} = \|g\|_{L^2}\}$$

равна $2k+\mu$ (см. § 2, п. II). Опишем теперь пространство E.

Л е м м а 5. *Функция v представима в виде*

$$v = \bar{z}^{2k+\mu} \frac{\bar{h}}{h},$$

где h - внешняя функция из X, не обращающаяся в нуль на $\mathbb{T}$. При этом

$$E = \{ph: p \in \mathcal{P}_A,\ \deg p \le 2k + \mu - 1\}, \tag{11}$$

где $\mathcal{P}_A$ - множество всех аналитических полиномов.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Прежде всего поскольку $\varphi-\mathcal{A}_m\varphi = \frac{1}{s_m(H_\varphi)} v$ и $\mathcal{A}_m X\subset X$, то $v\in X$. Далее $\operatorname{ind} T_v = \dim E=2k+\mu$ (см. § 2, п. II). Поэтому, как показано в теореме 3.4 работы [9], $v = z^{2k+\mu}\bar{h}/h$, где h - внешняя функция из X, не обращающаяся в нуль на $\mathbb{T}$. Ясно, что $E=\operatorname{Ker} T_v$. Рассмотрим теперь правую часть равенства (11). Легко видеть, что это - подпространство размерности $2k+\mu$, содержащееся в $\operatorname{Ker} T_v$. Поскольку $\dim E = 2k+\mu$, то равенство (11) доказано. ●

Завершим теперь доказательство теоремы 11. Из леммы 5 вытекает, что для всякого числа n существует полином p_n из $\mathcal{P}_A$ такой, что $\mathcal{P}f_n = p_n h$.

Покажем, что $\varphi_n-\mathcal{A}_m\varphi_n \longrightarrow \varphi-\mathcal{A}_m\varphi$ в L^q. Имеем

$$\varphi - \mathcal{A}_m\varphi = \frac{H_\varphi p_n h}{p_n h};$$

$$\varphi_n - \mathcal{A}_m\varphi_n = \frac{H_{\varphi_n} f_n}{f_n}.$$

Из сходимости $\mathcal{P}_n$ к $\mathcal{P}$ вытекает, что

$$\|f_n - p_n h\|_X = \|\mathcal{P}_n f_n - \mathcal{P} f_n\|_X \longrightarrow 0.$$

Далее, поскольку $\lim\limits_n \|\varphi_n - \varphi\|_X = 0$, то

$$\lim_n \|H_\varphi p_n h - H_{\varphi_n} f_n\|_X = 0;$$

$$\lim_n \|(p_n h)\cdot(H_{\varphi_n} f_n) - f_n\cdot H_\varphi p_n h\|_X = 0.$$

Поскольку $C(\mathbb{T})\subset X$, то существует последовательность положительных чисел $\{\delta_n\}_{n\ge 0}$, стремящаяся к нулю, такая, что

$$\|f_n - p_n h\|_{L^\infty} \le \delta_n;$$

$$\|(p_n h)\cdot(H_{\varphi_n} f_n) - f_n\cdot H_{\varphi_n} p_n h\|_{L^\infty} \le \delta_n.$$

Выберем теперь последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n\ge 0}$ положительных чисел такую, что

$$\lim_n \varepsilon_n = 0, \qquad \lim_n \frac{\delta_n}{\varepsilon^2} = 0.$$

Положим

$$F_n = \{\zeta\in\mathbb{T} : |p_n(\zeta)h(\zeta)| \le \varepsilon_n\}.$$

Нам надо показать, что

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \left|\frac{(H_{\varphi_n} f_n)(\zeta)}{f_n(\zeta)} - \frac{(H_\varphi p_n h)(\zeta)}{(p_n h)(\zeta)}\right|^q |d\zeta| \underset{n}{\longrightarrow} 0.$$

Легко видеть, что из (12) следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{T}\setminus F_n} \left|\frac{(H_{\varphi_n} f_n)(\zeta)}{f_n(\zeta)} - \frac{(H_\varphi p_n h)(\zeta)}{(p_n h)(\zeta)}\right|^q |d\zeta| \underset{n}{\longrightarrow} 0.$$

Поскольку почти всюду

$$\left|\frac{H_\varphi p_n h}{p_n h}\right| = s_m(H_\varphi),$$

$$\left|\frac{H_{\varphi_n} f_n}{f_n}\right| = s_m(H_{\varphi_n}) \underset{n}{\longrightarrow} s_m(H_\varphi),$$

то доказательство будет завершено, если мы покажем, что $\lim\limits_n |F_n|=0$, где $|F_n|$ - мера Лебега множества F_n.

Положим $M=\min\{|h(\zeta)|:\zeta\in\mathbb{T}\}$. Легко видеть, что

$$|p_n(\zeta)| < \frac{\varepsilon_n}{M}, \quad \zeta\in F_n. \tag{13}$$

Далее, поскольку $\lim\limits_n \|p_n h-f_n\|_X=0$ и $\|f_n\|_X=1$, то при больших n

$$\|p_n\|_X \ge \frac{\text{const}}{\|h\|_X}.$$

Наконец, поскольку p_n пробегает конечномерное подпространство полиномов степени не выше, чем $2k+\mu-1$, то

$$\|p_n\|_{L^\infty} \ge \text{const} > 0 \tag{14}$$

при больших n.

Результат теперь вытекает из (13), (14) и следующего хорошо известного утверждения.

Пусть F – замкнутое подмножество единичной окружности меры ε и p – полином степени N. Тогда

$$\max_{\zeta\in\mathbb{T}}|p(\zeta)| \le C(N,\varepsilon)\max_{\zeta\in F}|p(\zeta)|,$$

где $C(N,\varepsilon)$ зависит только от N и ε (см. [14], где доказано более сильное утверждение). ●

§ 6. Случай классов Бесова

Классы Бесова $B_p^{1/p}$, $0<p<\infty$, не удовлетворяют аксиомам $(A_1)-(A_4)$ при $p\ne1$. Тем не менее эти классы интересны с точки зрения оператора наилучшего приближения $\mathcal{A}$ (см. [9]). Напомним, что при всех p оператор $\mathcal{A}$ отображает $B_p^{1/p}$ в себя (см. [9] при $p\ge1$ и [8] при $p<1$).

Поскольку $B_p^{1/p}\subset BMO$, то из теоремы 2 вытекает, что если кратность s-числа $s_0(H_\varphi)$ больше единицы, то φ не является точкой непрерывности оператора $\mathcal{A}$ в $B_p^{1/p}$. К сожалению, вопрос о непрерывности оператора $\mathcal{A}$ в точке φ в случае $\mu_0(\varphi)=1$ остается открытым при $p\ne1$. Тем не менее следующее утверждение позволяет дать ответ на вопрос о непрерывности функции $\varphi\longmapsto\|\mathcal{A}\varphi\|_{B_p^{1/p}}$, $\varphi\in\mathbb{P}\_B_p^{1/p}$.

Т е о р е м а 12. *Пусть $0<p<\infty$, $\varphi\in\mathbb{P}\_B_p^{1/p}$, $\varphi\ne0$, и $\mathcal{B}$ – функция на $\mathbb{P}\_B_p^{1/p}$, определенная равенством $\mathcal{B}\psi=\|\mathcal{A}\psi\|_{B_p^{1/p}}$. Тогда φ является точкой непрерывности функции $\mathcal{B}$ в том и только в том случае, когда $\mu_0(\varphi)=1$.*

При доказательстве этой теоремы мы будем рассматривать следующую норму (квазинорму при $p<1$) на $B_p^{1/p}$:

$$\|f\|_{B_p^{1/p}} = \|h_f\|_{S_p} + \|H_{\bar z\bar f}\|_{S_p}.$$

Описание операторов Ганкеля класса S_p, приведенное в § 2, показывает, что эта норма эквивалентна исходной.

Доказательство. Предположим, что $\mu_0(\varphi)=1$. Пусть $\{\varphi_n\}$ - последовательность функций, сходящаяся к φ в $B_p^{1/p}$. Тогда $H_{\varphi_n}\longrightarrow H_\varphi$ в S_p (см. § 2, п. II). Ясно, что при больших n кратность s-числа $s_0(H_{\varphi_n})$ оператора H_{φ_n} равна единице.

Положим

$$u = \frac{z(\varphi-\mathcal{A}\varphi)}{s_0(H_\varphi)}, \quad u_n= \frac{z(\varphi_n-\mathcal{A}\varphi_n)}{s_0(H_{\varphi_n})}. \tag{15}$$

Функции u и u_n унимодулярны. Ясно, что достаточно показать, что $\lim\limits_n \|H_{\bar u_n}\|_{S_p} = \|H_{\bar u}\|_{S_p}$.

Воспользуемся теоремой Б (см. § 2, п. II). Поскольку $\mu_0(\varphi)=\mu_0(\varphi_n)=1$, операторы Тёплица T_u и T_{u_n} обратимы в H^2. Следовательно, оператор $H_{\bar u}^* H_{\bar u}$ унитарно эквивалентен оператору $H_u^*H_u$, а оператор $H_{\bar u_n}^* H_{\bar u_n}$ унитарно эквивалентен оператору $H_{u_n}^*H_{u_n}$. Далее, $\lim\limits_n \|H_{u_n}-H_u\|_{S_p}=0$, откуда $\lim\limits_n \|H_{u_n}^* H_{u_n} - H_u^*H_u\|_{S_p}=0$. Следовательно, $\lim\limits_n \|H_{\bar u_n}^* H_{\bar u_n}\|_{S_{p/2}} = \|H_{\bar u}^*H_{\bar u}\|_{S_{p/2}}$, а стало быть, $\lim\limits_n \|H_{\bar u_n}\|_{S_p} = \|H_{\bar u}\|_{S_p}$.

Предположим теперь, что $\mu_0(\varphi)\neq1$. По следствию к теореме 1 существует последовательность функций $\{\varphi_n\}_{n\ge0}$ в $\mathbb{P}_-B_p^{1/p}$, сходящаяся к φ в $B_p^{1/p}$, и такая, что $\mu_0(\varphi_n)=1$ при всех n. Пусть u, u_n - функции, определенные равенствами (15). Покажем, что $\|H_{\bar u_n}\|_{S_p} \underset{n}{\not\longrightarrow} \||H_{\bar u}\||_{S_p}$, откуда будет следовать, что $\|\mathcal{A}\varphi_n\|_{B_p^{1/p}} \underset{n}{\not\longrightarrow} \|\mathcal{A}\varphi\|_{B_p^{1/p}}$.

Действительно, в этом случае $E = \{f\in H^2: H_u^*H_u f = f\}\neq\{0\}$, но $\{f\in H^2: H_{u_n}^* H_{u_n} f = f\}=\{0\}$ при всех n. Поэтому по теореме Б (см. § 2, п. II).

$$\|H_{\bar u_n}^* H_{\bar u_n}\|_{S_{p/2}} = \|H_{u_n}^* H_{u_n}\|_{S_{p/2}} \underset{n}{\longrightarrow} \|H_u^* H_u\|_{S_{p/2}},$$

в то время как

$$\|H_{\bar u}^* H_{\bar u}\|_{S_{p/2}} = \|H_u^* H_u|H^2\ominus E\|_{S_{p/2}} < \|H_u^* H_u\|_{S_{p/2}}.$$

Следовательно, $\|H_{\bar u_n}\|_{S_p} \underset{n}{\not\longrightarrow} \|H_{\bar u}\|_{S_p}$. ●

Замечание. Аналогичное утверждение справедливо и для других $\mathcal{R}$-пространств (см. определение в [9]), и в частности для VMO.

В случае пространств $B_p^{1/p}$, $0<p<\infty$, оператор $\mathcal{A}$ непрерывен в точке $\mathbb{O}$. Это вытекает из неравенства

$$\|\mathcal{A}\varphi\|_{B_p^{1/p}} \le \text{const}\ \|\varphi\|_{B_p^{1/p}}, \quad \varphi \in B_p^{1/p}$$

(см. [9] при $p\ge1$ и [8] при $p<1$).

§ 7. Открытые вопросы

В этом параграфе мы сформулируем нерешенные вопросы, некоторые из которых затрагивались в предыдущих параграфах.

Вопрос 1. *Существуют ли функции φ из $C(\mathbb{T})$, для которых $\mathbb{P}_-\neq\mathbb{O}$ и оператор $\mathcal{A}$ непрерывен в точке φ в L^∞?*

Ясно, что если такая функция φ существует, то $\mu_0(\varphi)=1$.

Пусть X - пространство функций, удовлетворяющее аксиомам $(A_1)-(A_4)$.

Вопрос 2. *Пусть $\varphi\in X$, $s_m(H_\varphi)>0$, $\mu=\mu_m(\varphi)>1$,*

$$s_k(H_\varphi)=s_{k+1}(H_\varphi)=\ldots=s_{k+\mu-1}(H_\varphi)$$

и $m=k+\frac{\mu-1}{2}$. Верно ли, что φ не является точкой непрерывности оператора $\mathcal{A}_m$ в X?

Напомним, что в [16] дается утвердительный ответ на этот вопрос для $X=\mathcal{F}l^1$, а в теореме 8 этой работы - для $X=\lambda_\alpha$, $\alpha>0$, $\alpha\notin\mathbb{Z}$.

В работе [9] рассматривается еще один класс функциональных пространств, которые могут не удовлетворять системе аксиом $(A_1)-(A_4)$, но являются инвариантными относительно оператора $\mathcal{A}$. Этот класс включает в себя несепарабельные пространства Гёльдера-Зигмунда Λ_α, $\alpha>0$ (см. § 2, п. III).

Вопрос 3. *Пусть $\varphi\in\Lambda_\alpha$. Предположим, что $\mu_0(\varphi)=1$. Верно ли, что оператор $\mathcal{A}$ непрерывен в точке φ в норме пространства Λ_α?*

Заметим, что $\Lambda_\alpha\subset\lambda_{\alpha-\varepsilon}$ при $\varepsilon>0$. Поэтому, если $\lim_n\|\varphi_n-\varphi\|_{\Lambda_\alpha}=0$, то $\lim_n\|\mathcal{A}\varphi_n-\mathcal{A}\varphi\|_{\lambda_{\alpha-\varepsilon}}=0$.

Вопрос 4. *Пусть X - функциональное пространство, удовлетворяющее системе аксиом $(A_1)-(A_4)$. Верно ли, что оператор $\mathcal{A}$ непрерывен в точке $\mathbb{O}$ в норме пространства X?*

Вопрос 5. *Пусть $0<p<\infty$, $\varphi\in B_p^{1/p}$. Предположим, что $\mu_0(\varphi)=1$. Верно ли, что φ - точка непрерывности оператора $\mathcal{A}$ в $B_p^{1/p}$?*

Отметим, что пространство B_1^1 удовлетворяет системе аксиом $(A_1)-(A_4)$. Следовательно, в случае пространства B_1^1 вопросы 3 и 4 имеют положительные ответы.

Список литературы

[1] Адамян В.М., Аров Д.З., Крейн М.Г. О бесконечных ганкелевых матрицах и обобщенных задачах Каратеодори-Фейера и Ф.Рисса // Функцион. анализ и его прил. 1968. Т.2, N1, С.1-19.

[2] Адамян В.М., Аров Д.З., Крейн М.Г. Бесконечные ганкелевы матрицы и обобщенные задачи Каратеодори-Фейера и И.Шура // Функцион. анализ и его прил. 1968. Т.2, N4. С.1-17.

[3] Адамян В.М., Аров Д.З., Крейн М.Г. Аналитические свойства пар Шмидта ганкелева оператора и обобщенная задача Шура-Такаги // Мат. сб. 1971. Т.86, N1. С.34-75.

[4] Васюнин В.И., Треиль С.Р. Обратная задача для модуля ганкелева оператора. Препринты ЛОМИ, Р-8-85. Л., 1985.

[5] Вольберг А.Л., Толоконников В.А. Ганкелевы операторы и задачи наилучшего приближения неограниченных функций // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1985. Т.141. С.5-18.

[6] Гарнет Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.

[7] Пеллер В.В. Операторы Ганкеля класса $\mathfrak{S}_p$ и их приложения (рациональная аппроксимация, гауссовские процессы, проблема мажорации операторов) // Мат. сб. 1980. Т.113, N4. С.538-581.

[8] Пеллер В.В. Описание операторов Ганкеля класса $\mathfrak{S}_p$ при $p>0$, исследование скорости рациональной аппроксимации и другие приложения // Мат. сб. 1983. Т.122, N4. С.481-510.

[9] Пеллер В.В., Хрущев С.В. Операторы Ганкеля, наилучшие приближения и стационарные гауссовские процессы // Успехи мат. наук. 1982. Т.37, N1. С.53-124.

[10] Толоконников В.А. Обобщение алгебры Дугласа и их приложения // Мат. сб. 1989.

[11] Bultheel A., Dewilde P. eds. Special Issue on Rational approximation for systems // Circuits, Systems, and Signal Processing. 1982. Vol.1, N 3-4.

[12] Douglas R.G. Banach algebra techniques in operator theory. New York; London: Acad. Press, 1972.

[13] Foias C., Tannenbaum A. On the Nehari problem for a certain class of L^∞-functions appearing in control theory // J. Funct. Anal. 1987. Vol.74, N 1. P.146-159.

[14] Gaier D. Bemerkungen zum Turanschen Lemma // Abh. Mathem. Semin. Univ. Hamburg. 1970. Vol.35. P.1-7.

[15] Gutknecht M.H., Smith J.O., Trefethen L.N. The Carathéodory-Fejér (CF) method for recursive digital filter disign // IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal

Processing ASSP-31. 1983. P.1417-1426.

[16] Hayashi E., Trefethen L.N., Gutknecht M.H. The CF table, Numerical Analysis Report 87-3 // Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology, 1987.

[17] Helton J.W. Operator theory, analytic functions, matrices, and electrical engineering // Amer. Math. Soc. CBMS 68. Providence, 1987.

[18] Helton J.W., Schwartz D.F. The best approximation to a vector-valued continuous function from the bounded analytic functions. Preprint, 1987.

[19] Helton J.W., Schwartz D.F. Computerized H^∞ approximation. Preprint, 1987.

[20] Khruschev S.V., Peller V.V. Moduli of Hankel operators, Past and Future // Lect. Notes Math., 1043. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1984. P.92-97.

[21] Nikol'skii N.K. Treatise on the Shift operator. Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer, 1985.

[22] Ober R. A note on a system theoretic approach to a conjecture by Peller-Khrushchev: The general case. Preprint, Cambridge Univ., 1987.

[23] Peller V.V. Smoothness of Schmidt functions of smooth Hankel operators // Lect. Notes Math., 1302. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1988. P.337-346.

[24] Peller V.V. Continuity properties of the operator of best approximation by analytic functions. LOMI Preprints, E-13-87, L., 1987.

[25] Power S.C. Hankel operators on Hilbert space // Pitman Adv. Publ. Progr. Boston; London; Melbourne, 1982.

[26] Sarason D. Function theory on the unit circle // Notes for Lect. at a Confer. at Virginia Polytechn. Inst. and State Univ. 1978.

[27] Semmes S. Trace ideal criteria for Hankel operators and applications to Besov Spaces // Int. Equat. Oper. Theory. 1984. Vol.7. P.241-281.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
АН СССР
191011, Ленинград, наб. р. Фонтанки, 27

Поступила 14 июня 1989 г.