V. P. Orevkov, The equivalence of the two definitions of recursive continuity, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1971, Volume 20, 145–159

В.П.Оревков

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДВУХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ*)

I. Понятие непрерывности оператора из одного метрического пространства в другое можно определить двумя способами: на языке "ε-δ" и на языке "последовательностей". В конструктивной математике первому варианту соответствут понятие непрерывного оператора (см.[1], стр. 178), второму варианту — понятие П-непрерывного оператора (см.[2], стр. 166). В классической математике оба эти варианта определения непрерывности эквивалентны (см., например, пункты 53 и 66 книги[3] или пункт III книги [4], § 20). Напротив, в работе[2], стр.183 построен пример конструктивного линейного везде определенного функционала, заданного на конструктивном полном нормированном пространстве, П-непрерывного, но не непрерывного. Понятие непрерывного оператора, определяемое на языке "последовательностей", является более слабым вариантом понятия "непрерывный оператор", поэтому это понятие иногда удобно использовать при построении продолжений операторов по непрерывности (иллюстрацией может служить пример 8 из пункта 54 книги[3]).

Цель настоящей заметки — указать условия, при которых будут эквивалентны понятия непрерывного и П-непрерывного оператора.

Все не разъясняемые специально термины и обозначения понимаются так же, как в[1], [2] и [5]. В дальнейшем прилагательное "конструктивный" перед словами "метрическое пространство", "оператор", "последовательность" и др.часто будет опускаться.

2. Пусть f - конструктивный оператор из конструктивного

*) Основные результаты этой заметки были доложены на Ленинградском семинаре по конструктивной математике 9 апреля 1970 г.

метрического пространства $\mathfrak{M}$ в конструктивное метрическое пространство $\mathfrak{M}'$. Метрическую функцию пространства $\mathfrak{M}$ будем обозначать через ρ, а метрическую функцию пространства $\mathfrak{M}'$ – через ρ'. Пусть $\mathfrak{N}$ – правильное подмножество*) пространства $\mathfrak{M}$. Будем говорить, что оператор $\mathfrak{f}$ П-продолжим на подмножество $\mathfrak{N}$ с точностью до рационального положительного числа a, если выполняются следующие условия:

1) подмножество $\mathfrak{N}$ содержится в замыкании**) области определения оператора $\mathfrak{f}$;

2) какова бы ни была регулярно сходящаяся***) конструктивная последовательность φ точек из области определения $\mathfrak{f}$, если квазиосуществима****) точка из $\mathfrak{N}$, к которой сходится φ, то можно построить такое натуральное число n, что при всех натуральных m, мажорирующих n,

$$\rho'(\mathfrak{f}(\varphi(m+1))\square\mathfrak{f}(\varphi(m)))<a.$$

Пусть X – точка пространства $\mathfrak{M}$. Будем говорить, что оператор $\mathfrak{f}$ П-продолжим на точку X с точностью до рационального положительного числа a, если он П-продолжим с точностью до рационального положительного a на подмножество точек пространства $\mathfrak{M}$, равных точке X. Будем говорить, что оператор $\mathfrak{f}$ П-продолжим на подмножество $\mathfrak{N}$ (на

---

*) См. [1], стр. 184.

**) См. [1], стр. 183.

***) Последовательность φ точек из $\mathfrak{M}$ называется регулярно сходящейся, если для любых натуральных n и m при $n\leq m$ выполняется неравенство $\rho(\varphi(n)\square\varphi(m))<2^{-n}$.

****) Выражение "квазиосуществимо слово P, удовлетворяющее условию $\mathfrak{L}$" является сокращением выражения "неверно, что нельзя построить слово P, удовлетворяющее условию $\mathfrak{L}$" (см. [1], стр. 56).

точку X), если он П-продолжим на подмножество $\mathfrak{N}$ (соответственно, на точку X) с точностью до любого рационального положительного числа.

Очевидно, что если оператор $\mathfrak{f}$ П-непрерывен в точке X, то оператор $\mathfrak{f}$ П-продолжим на X. Из теоремы 3, сформулированной ниже в пункте 3, вытекает обратное утверждение, а именно: если оператор $\mathfrak{f}$ применим к точке X и П-продолжим на X, то он П-непрерывен в X.

Заметим, что из П-продолжимости оператора $\mathfrak{f}$ на каждую точку из подмножества $\mathfrak{N}$, вообще говоря, не следует П-продолжимость оператора $\mathfrak{f}$ на подмножество $\mathfrak{N}$. Однако, нетрудно доказать следующую лемму.

Лемма I. Если подмножество $\mathfrak{N}$ является нормальным подмножеством [ж)], носитель пространства $\mathfrak{M}$ нормален и само $\mathfrak{M}$ L-правильно [жж)], то оператор тогда и только тогда П-продолжим на $\mathfrak{N}$ с точностью до рационального положительного числа a, когда он П-продолжим с точностью до a на каждую точку из $\mathfrak{N}$.

Обозначим посредством A объединение алфавитов пространств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$. Алгорифм $\mathfrak{h}$ над алфавитом $A \cup \{\square\}$ будем называть a-индексом оператора относительно точек из $\mathfrak{N}$, если каковы бы ни были точка X из $\mathfrak{N}$, точка X' пространства $\mathfrak{M}'$ и натуральное число n, алгорифм $\mathfrak{h}$ перерабатывает слово $X \square n \square X'$ в такую точку Y пространства $\mathfrak{M}$, что

$$!\mathfrak{f}(Y) \;\&\; \rho(Y \square X) < 2^{-n} \;\&\; \rho'(\mathfrak{f}(Y) \square X') > a,$$

если подобная точка квазиосуществима, и алгорифм $\mathfrak{h}$ перерабатывает слово $X \square n$ в такую точку Y из $\mathfrak{M}$, что

ж) Точнее говоря, условие, определяющее подмножество $\mathfrak{N}$, можно сформулировать в виде однопараметрической нормальной формулы, параметром которой является подчиненная переменная для точек пространства $\mathfrak{M}$ (см.[6]).

жж) Условие L -правильности совпадает с условием (A)работы[7].

$$! \, f(Y) \,\&\, \rho(Y \square X) < 2^{-n},$$

в том случае, когда квазиосуществима точка, удовлетворяющая этому условию.

Оператор будем называть S — р е г у л я р н ы м   о т н о с и т е л ь н о   т о ч е к   и з $\mathfrak{N}$ с   т о ч н о с т ь ю   д о   р а ц и о н а л ь н о г о   п о л о ж и т е л ь н о г о   ч и с л а a , если можно построить его a-индекс относительно точек из $\mathfrak{N}$. Оператор будем называть S -р е г у л я р н ы м   о т н о с и т е л ь н о   т о ч е к   и з $\mathfrak{N}$, если он S -регулярен относительно точек из $\mathfrak{N}$ с точностью до любого рационального положительного числа. Оператор будем называть S -р е г у л я р н ы м , если он S -регулярен относительно точек из $\mathfrak{M}$.

Подмножество $\mathfrak{N}$ пространства $\mathfrak{M}$ будем называть с е п а р а б е л ь н ы м , если сепарабельно подпространство, индуцированное пространством $\mathfrak{M}$ в множестве $\mathfrak{N}$. Подмножество $\mathfrak{N}$ называется   п е р е ч и с л и м ы м   п о   п р е д с т а в и т е л я м , если можно построить такое перечислимое множество $\mathcal{M}$, что любой элемент $\mathcal{M}$ принадлежит $\mathfrak{N}$ и для любой точки из $\mathfrak{N}$ можно построить равный ей элемент из $\mathcal{M}$.

Любой оператор из $\mathfrak{M}$ в произвольное метрическое пространство будет S-регулярен, если пространство $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условию (B) работы [7]. Сформулируем другие достаточные условия -регулярности оператора f .

<u>Лемма 2</u>. Оператор f S-регулярен, если выполняется по крайней мере одно из следующих условий:

I) область определения оператора f перечислима по представителям,

2) оператор f неразрывен [ж)] и его область определения сепарабельна,

3) пространство $\mathfrak{M}$ сепарабельно и L -правильно.

[ж)]см. [8] , стр. 525.

П е р е ч и с л и м ы м   п о к р ы т и е м   п о д м н о ж е с т в а $\mathfrak{N}$ пространства $\mathfrak{M}$ будем называть любое перечислимое множество открытых сфер с центрами в точках из $\mathfrak{N}$, такое что по каждой точке X из $\mathfrak{N}$ можно построить сферу из этого множества, которой принадлежит X.

Теорема I. К а к о в ы   б ы   н и   б ы л и   к о н с т р у к т и в н ы е   м е т р и ч е с к и е   п р о с т р а н с т в а $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$, п р а в и л ь н о е   с е п а р а б е л ь н о е   п о д м н о ж е с т в о $\mathfrak{N}$ п р о с т р а н с т в а $\mathfrak{M}$, о п е р а т о р $\mathfrak{f}$ и з $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}'$ и   р а ц и о н а л ь н о е   п о л о ж и т е л ь н о е   ч и с л о a, е с л и $\mathfrak{f}$ П-п р о д о л ж и м   н а $\mathfrak{N}$ с   т о ч н о с т ь ю   д о a и   о п е р а т о р $\mathfrak{f}$ S-р е г у л я р е н   о т н о с и т е л ь н о   т о ч е к   и з $\mathfrak{N}$ с   т о ч н о с т ь ю   д о a, т о   м о ж н о   п о с т р о и т ь   т а к о е   п е р е ч и с л и м о е   п о к р ы т и е   п о д м н о ж е с т в а $\mathfrak{N}$, ч т о   к о л е б а н и е   о п е р а т о р а $\mathfrak{f}$ в   к а ж д о й   с ф е р е   э т о г о   п о к р ы т и я   н е   п р е в о с х о д и т $2a$.

Доказательство этой теоремы приведено в пункте 4.

3. Сформулируем несколько следствий теоремы I. Прежде всего следует заметить, что теорема I позволяет указать условия, при которых понятие непрерывности конструктивного оператора, определяемое на языке "ε-δ", эквивалентно понятию непрерывности, определяемому на языке "последовательностей". Эти условия можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 2. К а к о в ы   б ы   н и   б ы л и   к о н с т р у к т и в н ы е   м е т р и ч е с к и е   п р о с т р а н с т в а $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$, т о ч к а X п р о с т р а н с т в а $\mathfrak{M}$, о п е р а т о р $\mathfrak{f}$ и з $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}'$, п р и м е н и м ы й   к   т о ч к е X, е с л и   о п е р а т о р $\mathfrak{f}$ S-р е г у л я р е н   о т н о с и т е л ь н о   т о ч е к ,   р а в н ы х X, т о   о п е р а т о р $\mathfrak{f}$ н е п р е р ы в е н   в   т о ч к е X т о г д а   и   т о л ь к о   т о г д а ,   к о г д а   о н   П-н е -

прерывен в этой точке.

Следствие. Каков бы ни был оператор $\mathfrak{f}$ из одного метрического пространства в другое, если область определения $\mathfrak{f}$ сепарабельна, то оператор $\mathfrak{f}$ тогда и только тогда непрерывен, когда он П-непрерывен.

Связь между понятием непрерывности оператора, сформулированным на языке "последовательностей", и понятием П-продолжимости оператора на точку устанавливается следующей теоремой.

Теорема 3. Каковы бы ни были конструктивные метрические пространства $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$, оператор $\mathfrak{f}$ из $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}'$ и точка X пространства $\mathfrak{M}$, следующие условия эквивалентны:

а) для любой конструктивной последовательности φ точек из области определения оператора $\mathfrak{f}$, сходящейся к точке X, композиция алгорифмов $\mathfrak{f}$ и φ является сходящейся в себе последовательностью точек пространства $\mathfrak{M}'$;

б) оператор $\mathfrak{f}$ П-продолжим на точку X.

Очевидно, что из а) следует б). Докажем, что из б) следует а). Пусть φ - последовательность точек из области определения оператора $\mathfrak{f}$, сходящаяся к X. Для доказательства теоремы следует рассмотреть ограничение оператора $\mathfrak{f}$ на подмножество точек Y пространства $\mathfrak{M}$, таких что

$$X = Y \vee \exists n (Y = \varphi(n)),$$

и применить теорему I.

Покажем, как теорему I можно использовать для продолжения конструктивных операторов. Пусть $\mathfrak{M}$ - конструктивное метрическое пространство. Посредством $\tilde{\mathfrak{M}}$ будем обозначать стандартное

FR-пополнение пространства $\mathfrak{M}$. Пусть $\mathfrak{f}_1$ - оператор из метрического пространства $\mathfrak{M}_1$ в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{f}_2$ - оператор из $\mathfrak{M}_1$ в $\tilde{\mathfrak{M}}$.

Говорят, что $\mathfrak{f}_2$ является продолжением оператора $\mathfrak{f}_1$ на все пространство $\mathfrak{M}_1$, если $\mathfrak{f}_2$ применим к каждой точке из $\mathfrak{M}_1$ и для всякой точки X из области определения $\mathfrak{f}_1$ точка $\mathfrak{f}_1(X)$ равна по метрике пространства $\tilde{\mathfrak{M}}$ точке $\mathfrak{f}_2(X)$.

Теорема 4. Каковы бы ни были конструктивные метрические пространства $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_1$, правильное сепарабельное подмножество $\mathfrak{N}$ пространства $\mathfrak{M}$, S-регулярный относительно точек из $\mathfrak{N}$ оператор $\mathfrak{f}$ из $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}_1$, если оператор $\mathfrak{f}$ — П-продолжим на $\mathfrak{N}$ и нет точек в $\mathfrak{M}$, которые не принадлежат ни $\mathfrak{N}$, ни области определения $\mathfrak{f}$, то можно построить оператор из $\mathfrak{M}$ в $\tilde{\mathfrak{M}}_1$, который является продолжением $\mathfrak{f}$ на все пространство $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Чтобы построить продолжение оператора $\mathfrak{f}$, достаточно для каждой точки X из $\mathfrak{M}$ построить регулярно сходящуюся последовательность точек из $\mathfrak{M}_1$, которая сходится к точке $\mathfrak{f}(X)$ в том случае, когда $\mathfrak{f}$ применим к X. Для этого надо по любому натуральному числу n построить перечислимое покрытие подмножества $\mathfrak{N}$, в каждой сфере которого колебание оператора не превосходит 2^{-n-1} (обозначим это покрытие посредством $\mathcal{U}_n$), и воспользоваться тем фактом, что какова бы ни была точка X пространства $\mathfrak{M}$, имеет место двойное отрицание следующего утверждения: точка X принадлежит области определения оператора $\mathfrak{f}$ или какой-нибудь сфере из $\mathcal{U}_n$.

Из теоремы 1 и леммы 2 вытекает следующее усиление основной теоремы работы [5].

Теорема 5. Каковы бы ни были конструктивные метрические пространства $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$, оператор $\mathfrak{f}$ из $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}'$ и рациональное положительное число a, если область определения оператора $\mathfrak{f}$ сепарабельна и оператор $\mathfrak{f}$ П-продолжим на свою область определения, то можно построить такое перечислимое покрытие области определения оператора $\mathfrak{f}$, что в каждой сфере этого покрытия колебания оператора не превосходит a.

Отсюда, из теоремы I.3 работы [2], леммы I и леммы § I главы III работы [5] вытекает следующее утверждение.

Следствие. Каковы бы ни были оператор $\mathfrak{f}$ из метрического пространства $\mathfrak{M}$ с нормальным носителем в произвольное метрическое пространство и рациональное положительное число a, если пространство $\mathfrak{M}$ сепарабельно и L-правильно, то можно построить такое перечислимое покрытие области определения оператора $\mathfrak{f}$, что в каждой сфере этого покрытия колебание оператора $\mathfrak{f}$ не превосходит a.

Это утверждение также вытекает из результатов работы [7]. Другое доказательство этого следствия можно получить из доказательства основной теоремы работы [5], если вместо алгорифма γ использовать слабый алгорифм предельного перехода.

4. Этот пункт посвящен доказательству теоремы I. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ - конструктивные метрические пространства; $\mathfrak{N}$ - правильное подмножество пространства $\mathfrak{M}$; $\mathcal{N}$ - перечисломое подмножество множества $\mathfrak{N}$, плотное в нем; a — рациональное положительное число; $\mathfrak{f}$ — оператор из $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}'$, П-продолжимый на $\mathfrak{N}$ с точностью до a; φ_η - a-индекс оператора $\mathfrak{f}$ относительно точек из $\mathfrak{N}$. Чтобы излишне не загромождать доказательство будем предполагать,

что носитель пространства $\mathfrak{M}$ является нормальным множеством*).

Обозначим через A объединение алфавита $Ч_3$ (см.[I], стр. 77) и алфавитов пространств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$. Будем предполагать, что буквы $\square$ и $*$ не принадлежат алфавиту A. Метрическую функцию пространства $\mathfrak{M}$ будем обозначать через ρ, а метрическую функцию пространства $\mathfrak{M}'$ - через ρ'.

Так как оператор $\mathfrak{f}$ П-продолжим на $\mathfrak{N}$, то можно построить алгорифм над алфавитом A, который всякую запись относительно алфавита A (см.[5], стр. 298) любой регулярно сходящейся последовательности φ точек из области определения $\mathfrak{f}$, для которой квазиосуществима точка из $\mathfrak{N}$, к которой сходится φ, перерабатывает в такое натуральное число n, что при всех натуральных m, мажорирующих n,

$$\rho'(\mathfrak{f}(\varphi(m+1))\square\mathfrak{f}(\varphi(m)))<a.$$

Пусть $\mathfrak{A}$ - такой алгорифм. Обозначим посредством $\mathfrak{U}$ алгорифм в алфавите алгорифма $\mathfrak{A}$, применимый только к натуральным числам и тождественный на них. Пусть T и V - алгорифмы, построенные в работе [5], стр. 307, и G — алгорифм, построенный в работе [5], стр. 315.

Построим алгорифмы $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{J}$ и $\mathfrak{K}$ над алфавитом $A\vee\{\square, *\}$ такие что для любых слов P и Q в алфавите $Ч_0$ и для любых натуральных чисел n, m **)

---

*) В противном случае вместо алгорифмов $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{f}$ следует рассматривать алгорифмы, являющиеся соответственно накрывающими для $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{f}$ (см., например, [I], стр. 139 или [9], стр. 92), и вместо введенного ниже алгорифма $\mathfrak{A}$, применяемого к записям последовательностей точек из $\mathfrak{M}$, — алгорифм с аналогичными свойствами, применяемый к записям алгорифмов, накрывающих для последовательностей точек из $\mathfrak{M}$.

**) Пусть Q - слово в алфавите $Ч_0$. Посредством $\langle Q\rangle$ обозначается алгорифм над алфавитом A, записью которого относительно A является слово Q. Если слово Q не является записью относительно A какого-либо алгорифма, то символом $\langle Q\rangle$ обозначается нигде не применимый алгорифм.

$$\mathcal{R}(Q\square m\square n)\simeq \mathfrak{h}(\langle Q\rangle(n)\square m+n+3),$$

$$\mathcal{R}'(Q\square m\square n)\simeq \mathfrak{h}(\langle Q\rangle(n)\square m+n+3\square \mathfrak{f}(\mathcal{R}(Q\square m\square n))),$$

$$\mathfrak{P}(P\square Q\square m\square n)\simeq\begin{cases}\mathcal{R}(Q\square m\square n), \text{если } T(P*n)\neq\Lambda,\\ \mathfrak{h}(\langle Q\rangle(V(P))\square m+n+2), \text{если } T(P*n)=\Lambda\ \&\ n>V(P),\\ \mathcal{R}'(Q\square m\square n), \text{если } T(P*n)=\Lambda\ \&\ n=V(P),\end{cases}$$

$$\mathfrak{k}(P\square Q\square m)\simeq \mathfrak{U}(\mathfrak{A}(\mathcal{E}\,\tilde{\mathfrak{P}}_{P\square Q\square m\square}, A3)).$$

Обозначим через $\mathcal{M}'$ перечислимое множество слов вида $P\square Q\square m$, где P и Q – такие слова в алфавите $Ч_0$, что выполнены следующие условия:

1) $!\,V(P)$,

2) $\forall n(n\leq V(P)\supset(!\langle Q\rangle(n)\ \&\ \langle Q\rangle(n)\in\mathcal{N}))$,

3) $\forall n(n<V(P)\supset\rho(\langle Q\rangle(n)\square\langle Q\rangle(n+1))<2^{-n-2})$.

Обозначим через $\mathcal{M}''$ перечислимое множество слов вида $P\square Q\square m$, где P и Q – слова в $Ч_0$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $!\,\mathfrak{k}(P\square Q\square m)$,

$$2)\forall n(n<\mathfrak{k}(P\square Q\square m)\supset !G(a\text{-}\rho'(f(\tilde{\mathfrak{k}}_{P\square Q\square m\square}(n))\square f(\tilde{\mathfrak{k}}_{P\square Q\square m\square}(n+1))))).$$

Обозначим через $\mathcal{M}$ перечислимое множество всех сфер, для которых найдется слово $P\square Q\square m$, принадлежащее $\mathcal{M}'\cap\mathcal{M}''$ и такое, что центром сферы является точка $\langle Q\rangle(V(P))$, а радиусом $-2^{-V(P)-m-3}$.

Покажем, что $\mathcal{M}$ является перечислимым покрытием подмножества $\mathfrak{N}$. Пусть X - точка из $\mathfrak{N}$. Построим, учитывая, что подмножество $\mathcal{N}$ плотно в $\mathfrak{N}$, такую последовательность точек из $\mathcal{N}$, что для любого натурального n

$$\rho(X\square\varphi(n))<2^{-n-3}.$$

Так как множество $\mathfrak{N}$ содержится в замыкании области определения оператора f, то алгорифм $\tilde{\mathcal{R}}_{\varepsilon\varphi,A3\square\square\square}$ - регулярно сходящаяся последовательность точек из области определения f и точка X - ее предел. Пусть m_0 - результат применения алгорифма $\mathfrak{A}$ к записи относительно A алгорифма $\tilde{\mathcal{R}}_{\varepsilon\varphi,A3\square\square\square}$.
Обозначим через ψ такую последовательность, что при каждом натуральном числе n

$$\psi(n)=\varphi(n+m_0).$$

Обозначим посредством Q_0 слово $\varepsilon\psi,A3$. Ясно, что, каково бы ни было натуральное число n,

$$!\langle Q_0\rangle(n)\ \&\ \langle Q_0\rangle(n)\in\mathcal{N},$$

$$\rho(\langle Q_0\rangle(n)\square\langle Q_0\rangle(n+1))<2^{-n-2},$$

$$!G(a-\rho'(\mathfrak{f}(\mathcal{R}(Q_0\square m_0\square n))\square\mathfrak{f}(\mathcal{R}(Q_0\square m_0\square n+1)))).$$

Пусть P - предельное слово (см.[5], стр.306). Тогда, каково бы ни было натуральное число n,

$$\mathcal{R}(Q_0\square m_0\square n)=\mathfrak{F}(P\square Q_0\square m_0\square n).$$

Отсюда вытекает, что алгорифм $\tilde{\mathfrak{F}}_{P\square Q_0\square m_0\square}$ является регулярно сходящейся последовательностью точек из области определения оператора $\mathfrak{f}$ и что последовательность $\tilde{\mathfrak{F}}_{P\square Q_0\square m_0\square}$ сходится к точке X. Следовательно, алгорифм $\mathfrak{k}$ применим к слову $P\square Q_0\square m_0$.

Таким образом, для всякого предельного слова P, слово $P\square Q_0\square m_0$ принадлежит $\mathcal{M}''$. Построим, используя леммы $\{6\}$, $\{II\}$ и $\{I2\}$ из главы II работы [5], такое непредельное слово P_0, что слово $P_0\square Q_0\square m_0$ принадлежит $\mathcal{M}''$. Ясно, что $P_0\square Q_0\square m_0$ принадлежит $\mathcal{M}'$ и выполняется неравенство

$$\rho(<Q_0>(V(P_0))\square X)<2^{-V(P_0)-m_0-3}$$

Покажем, что колебание оператора $\mathfrak{f}$ в каждой сфере из $\mathcal{M}$ не превосходит $2a$. Пусть слово $P\square Q\square m$ принадлежит $\mathcal{M}'\cap\mathcal{M}''$. Тогда алгорифм $\mathcal{R}$ перерабатывает слово $Q\square m\square V(P)$ в точку из области определения оператора $\mathfrak{f}$. Обозначим эту точку посредством Y.

Предположим, что можно построить такую точку X из $\mathfrak{M}$, что

$$!\mathfrak{f}(X)\ \&\ \rho(X\square<Q>(V(P)))<2^{-V(P)-m-3} \qquad (I)$$

Допустим, что

$$\rho'(\mathfrak{f}(X)\square\mathfrak{f}(Y))>a.$$

Тогда алгорифм $\tilde{\mathfrak{F}}_{P\square Q\square m\square}$ является регулярно сходящейся последовательностью точек из области определения $\mathfrak{f}$, точка $<Q>(V(P))$-

предел этой последовательности и выполняется неравенство

$$\rho'(\mathfrak{f}(\mathfrak{F}(P\square Q\square m\square V(P)))\square\mathfrak{f}(Y))>a. \qquad (2)$$

С другой стороны, так как слово $P\square Q\square m$ принадлежит $\mathfrak{U}''$, для каждого натурального n

$$\rho'(\mathfrak{f}(\tilde{\mathfrak{F}}_{P\square Q\square m\square}(n))\square\mathfrak{f}(\tilde{\mathfrak{F}}_{P\square Q\square m\square}(n+1)))<a.$$

Заметим, что

$$Y=\mathfrak{F}(P\square Q\square m\square V(P)+1).$$

Мы получили противоречие с (2). Следовательно, какова бы ни была точка X из $\mathfrak{M}$, если выполняется (I), то

$$\rho'(\mathfrak{f}(X)\square\mathfrak{f}(Y))\leq a.$$

Таким образом, колебание оператора $\mathfrak{f}$ в сфере с центром в точке $\langle Q\rangle(V(P))$ и с радиусом $2^{-V(P)-m-3}$ не превосходит $2a$. Теорема I доказана.

5. В заключение, укажем одно условие сходимости в себе последовательности точек метрического пространства. Используя это условие, можно легко доказать теорему 3, оно представляет также и некоторый самостоятельный интерес.

Пусть $\mathfrak{M}$ - метрическое пространство, φ - последовательность точек этого пространства. Будем говорить, что последовательность ψ точек пространства $\mathfrak{M}$ является п о д п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь ю последовательности φ, если можно построить такую строго возрастающую последовательность γ натуральных чисел, что для любого натурального числа n

$$\psi(n)=\varphi(\gamma(n)).$$

<u>Теорема 6.</u> К а к о в ы б ы н и б ы л и к о н с т р у к т и в н о е м е т р и ч е с к о е п р о с т р а н с т в о $\mathfrak{M}$ и п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь φ т о ч е к э т о г о п р о с т р а н с т в а , д л я т о г о , ч т о б ы п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь φ с х о д и -

лась в себе, необходимо и достаточно, чтобы при любом рациональном положительном a и при любой подпоследовательности ψ последовательности φ можно было построить такое натуральное число n, что при всех натуральных m, мажорирующих n,

$$\rho(\psi(m) \square \psi(m+1)) < a.$$

Здесь ρ – метрическая функция пространства $\mathfrak{M}$.

Необходимость очевидна. Достаточность доказывается аналогично теореме I.

<u>Замечание</u>. Нетрудно доказать, что последовательность φ точек метрического пространства $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда псевдосходится в себе (см. [2], стр. I66), когда, каковы бы ни были рациональное положительное число a и подпоследовательность ψ последовательности φ, можно построить такое натуральное число n, что

$$\rho(\psi(n) \square \psi(n+1)) < a,$$

где ρ – метрическая функция пространства $\mathfrak{M}$.

ЛИТЕРАТУРА

I. Шанин Н.А. Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства. "Тр.Матем.ин-та АН СССР", I962, 67, I5-294.

2. Оревков В.П. О некоторых типах непрерывности конструктивных операторов. "Тр. Матем. ин-та АН СССР", I967, 93, I64-I86.

3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том I. "Физматгиз", М.-Л., I958.

4. Куратовский К. Топология, том I, "Мир", М., I966.

5. Цейтин Г.С. Алгорифмические операторы в конструктивных метрических пространствах. "Тр. Матем. ин-та АН СССР", I962, 67, 295-36I.

6. Шанин Н.А. О конструктивном понимании математических суждений. "Тр. Матем. ин-та АН СССР", I958, 52, 226-3II.

7. Moschovakis Y.N. Recursive metric spaces. "Fund. math.", I964, 55, № 3 , 2I5-238.

8. Слисенко А.О. Пример неразрывного, но не непрерывного конструктивного оператора в метрическом пространстве. "Тр. Матем. ин-та АН СССР", I964, 72, 524-532.

9. Идельсон А.В. Об алгорифмах, накрывающих данный алгорифм. "Тр. Матем. ин-та АН СССР", I967,93,89-I05.