



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Ветохин, Точный бэровский класс асимптотической топологической энтропии семейства неавтономных динамических систем, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, 2023, выпуск 33, 41–53

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.83

21 января 2025 г., 11:34:54



А. Н. Ветохин*

ТОЧНЫЙ БЭРОВСКИЙ КЛАСС АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ЭНТРОПИИ СЕМЕЙСТВА НЕАВТОНОМНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается параметрическое семейство неавтономных динамических систем, определенных на компактном метрическом пространстве и непрерывно зависящих от параметра из некоторого топологического пространства. Для любого такого семейства асимптотическая топологическая энтропия входящих в него динамических систем изучается как функция параметра с точки зрения бэровской классификации функций.

Напомним определение асимптотической топологической энтропии неавтономной динамической системы, введенное в [1].

Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство, $\mathcal{F} \equiv (f_1, f_2, \dots)$ — последовательность непрерывных отображений из X в X . Для любого натурального числа n обозначим через F_n подпоследовательность (f_n, f_{n+1}, \dots) последовательности \mathcal{F} . Наряду с исходной метрикой d определим на X дополнительную систему метрик

$$d_k^{F_n}(x, y) = \max_{0 \leq i \leq k-1} d(f_n^{\circ i}(x), f_n^{\circ i}(y)),$$

$$(f_n^{\circ i} \equiv f_{n+(i-1)} \circ \dots \circ f_n, f_n^{\circ 0} \equiv \text{id}_X), \quad x, y \in X, \quad k, n \in \mathbb{N}.$$

Для всяких $k \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ обозначим через $N_d(F_n, \varepsilon, k)$ максимальное количество точек в X , попарные $d_k^{F_n}$ -расстояния между которыми больше, чем ε . Такой набор точек назовем (F_n, ε, k) -отделенным. Тогда *топологическая энтропия* неавтономной динамической системы

*© Ветохин А. Н., 2023 г.

(X, \mathcal{F}) определяется равенством

$$h_{\text{top}}(\mathcal{F}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln N_d(F_1, \varepsilon, k), \quad (1)$$

а *асимптотическая топологическая энтропия* — равенством

$$h_{\text{top}}^*(\mathcal{F}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln N_d(F_n, \varepsilon, k). \quad (2)$$

Отметим, что величины (1) и (2) не зависят от выбора метрики, порождающей на X данную топологию, поэтому формулы (1) и (2) корректны.

Для того чтобы получить классическое определение топологической энтропии автономной динамической системы [2], нужно в качестве последовательности \mathcal{F} взять стационарную последовательность (f, f, \dots) . В этом случае величины (1) и (2) совпадают между собой, а их общее значение равно топологической энтропии отображения f .

В случае произвольной последовательности \mathcal{F} непосредственно из формул (1) и (2) вытекает неравенство

$$h_{\text{top}}(\mathcal{F}) \leq h_{\text{top}}^*(\mathcal{F}).$$

Как показывает следующий пример, величины (1) и (2) могут не совпадать.

На множестве Ω_2 двусторонних последовательностей

$$x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots), \quad x_k \in \{0, 1\},$$

введем метрику

$$d_{\Omega_2}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 2^{-\min\{|i|: x_i \neq y_i\}}, & \text{если } x \neq y. \end{cases}$$

Отметим, что полученное метрическое пространство (Ω_2, d_{Ω_2}) компактно и гомеоморфно множеству Кантора на отрезке $[0, 1]$ с метрикой, индуцированной стандартной метрикой вещественной прямой. Пусть отображение $\sigma: \Omega_2 \rightarrow \Omega_2$ — сдвиг влево на один элемент:

$$\sigma((\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)) = (\dots, x_0, x_1, x_2, \dots),$$

а отображение $\chi: \Omega_2 \rightarrow \Omega_2$ переводит любой элемент из Ω_2 в последовательность из нулей:

$$\chi((\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)) = (\dots, 0, 0, 0, \dots).$$

Тогда для последовательности $\mathcal{F} \equiv (\chi, \sigma, \sigma, \dots)$ имеем

$$h_{\text{top}}(\mathcal{F}) = 0 < \ln 2 = h_{\text{top}}^*(\mathcal{F}).$$

Отметим, что в данном примере выполнено равенство

$$h_{\text{top}}^*(\mathcal{F}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln N_d(F_2, \varepsilon, k),$$

из которого получаем

$$h_{\text{top}}^*(\mathcal{F}) = \max_{n \in \mathbb{N}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln N_d(F_n, \varepsilon, k).$$

В общем случае, как показывает следующий пример, в формуле (2) супремум по n нельзя заменить на максимум. В качестве пространства Λ_2 рассмотрим множество бесконечных матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где $a_{ij} \in \{0, 1\}$. На этом множестве введем метрику

$$d_{\Lambda_2}(A, B) = \begin{cases} 0, & \text{если } A = B, \\ 2^{-\min\{\max\{i,j\} : a_{ij} \neq b_{ij}\}}, & \text{если } A \neq B. \end{cases}$$

Рассмотрим отображение $\varphi: \Omega_2 \rightarrow \Lambda_2$, определяемое формулой

$$\begin{aligned} \varphi((\dots, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, \dots)) &= \\ &= \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_{-4} & x_5 & \dots \\ x_2 & x_{-1} & x_4 & x_{-5} & \dots \\ x_{-2} & x_3 & x_{-3} & x_6 & \dots \\ x_8 & x_{-7} & x_7 & x_{-6} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В силу определения отображение φ является гомеоморфизмом, а следовательно, пространство $(\Lambda_2, d_{\Lambda_2})$ является компактным метрическим пространством.

Рассмотрим последовательность $\mathcal{F} \equiv (f_1, f_2, \dots)$ непрерывных отображений из $\Lambda_2 \rightarrow \Lambda_2$, определяемых равенствами

$$f_1 \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11+1} & a_{12+1} & a_{13+1} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$f_2 \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11+1} & a_{12+1} & a_{13+1} & \dots \\ a_{21+1} & a_{22+1} & a_{23+1} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \dots$$

Для $m, n, k \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество точек

$$\mathcal{N} = \{A \in \Lambda_2: d_{\Lambda_2}(0, A) \geq 2^{-(k+m-n)} \text{ и } a_{ij} = 0, i \geq n, j \in \mathbb{N}\}.$$

Для любых двух точек A_1 и A_2 из \mathcal{N} имеем $d_k^{F_n}(A_1, A_2) > 2^{-m}$. Мощность множества \mathcal{N} равна $2^{(k+m-n)n}$, а следовательно, получаем неравенство

$$N_d(F_n, 2^{-m}, k) \geq 2^{(k+m-n)n}.$$

С другой стороны, имеем

$$N_d(F_n, 2^{-m}, k) \leq 2^{(k+m)n},$$

откуда получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln N_d(F_n, \varepsilon, k) = \lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln N_d(F_n, 2^{-m}, k) = n \ln 2,$$

а следовательно,

$$h_{\text{top}}^*(\mathcal{F}) = +\infty.$$

Таким образом, для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$h_{\text{top}}^*(\mathcal{F}) > \max_{1 \leq m \leq n} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln N_d(F_m, \varepsilon, k).$$

Как показывают примеры, даже в случае стационарной последовательности (f, f, \dots) функция $f \mapsto h_{\text{top}}(f)$ может быть всюду разрывной на пространстве функций, удовлетворяющих условию Липшица,

с заданной константой Липшица, превосходящей единицу, наделенном топологией равномерной сходимости на пространстве X [4]. Для описания таких функций Р. Бэр предложил использовать следующую классификацию [5]. Функциями нулевого бэровского класса на топологическом пространстве \mathcal{M} называются непрерывные функции, и для всякого натурального числа p функциями p -го бэровского класса называются функции, являющиеся поточечными пределами последовательностей функций $(p - 1)$ -го класса.

Пусть \mathcal{M} — топологическое пространство, а X — компактное метрическое пространство. По последовательности непрерывных по совокупности переменных отображений

$$\mathcal{F} \equiv (f_1, f_2, \dots), \quad f_i: \mathcal{M} \times X \rightarrow X, \quad (3)$$

образуем функции

$$\mu \mapsto h_{\text{top}}(\mathcal{F}(\mu, \cdot)), \quad (4)$$

$$\mu \mapsto h_{\text{top}}^*(\mathcal{F}(\mu, \cdot)). \quad (5)$$

Для стационарной последовательности \mathcal{F} в [3] установлено, что в случае пространства $X = [0, 1]$ для любого отображения (3) функция (4) полунепрерывна снизу, а следовательно, принадлежит первому бэровскому классу. Вообще же говоря, (при произвольных метрическом пространстве \mathcal{M} и компактном метрическом пространстве X) функция (4) принадлежит второму бэровскому классу [6]. В случае когда пространства \mathcal{M} и X являются множествами Кантора на отрезке $[0, 1]$ с метрикой, индуцированной стандартной метрикой вещественной прямой, найдется стационарная последовательность (3), для которой функция (4) всюду разрывна и не принадлежит первому бэровскому классу [7].

Для нестационарной последовательности (3) в [8] доказано, что для произвольных метрического пространства \mathcal{M} , компактного метрического пространства X и последовательности отображений (3) функция (4) принадлежит третьему бэровскому классу. В [9] для $X = [0, 1]$ и \mathcal{M} — множества иррациональных чисел (с метрикой, индуцированной естественной метрикой вещественной прямой) — построена такая последовательность отображений (3), что функция (4) не принадлежит второму бэровскому классу на пространстве \mathcal{M} . В данной работе получены аналогичные результаты для функции (5).

ТЕОРЕМА 1. *Для любой последовательности отображений (3) функция (5) принадлежит третьему классу Бэра на пространстве \mathcal{M} .*

Отметим, что из теоремы 1 в силу теоремы Бэра (см. [10, гл. IX, § 39, VI]) вытекает, что для любой последовательности отображений (3) в полном метрическом пространстве \mathcal{M} найдется всюду плотное множество G типа G_δ , такое что сужение функции $\mu \mapsto h_{\text{top}}^*(\mathcal{F}(\mu, \cdot))$ на множество G непрерывно.

Как будет показано ниже, функция (5), вообще говоря, может не принадлежать второму бэровскому классу.

Построим метрическое пространство \mathcal{B} следующим образом: точками пространства \mathcal{B} являются, по определению, всевозможные (счетные) последовательности $\mu = (\mu_k)_{k=1}^\infty$ натуральных чисел. Расстояние между двумя точками μ и ν определяется формулой

$$d_{\mathcal{B}}(\mu, \nu) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu = \nu, \\ \frac{1}{\min\{k: \mu_k \neq \nu_k\}}, & \text{если } \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Отметим, что пространство \mathcal{B} гомеоморфно множеству иррациональных чисел на отрезке $[0, 1]$ с метрикой, индуцированной естественной метрикой вещественной прямой.

ТЕОРЕМА 2. *Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}$ и $X = \Omega_2$, то найдется последовательность непрерывных отображений (3), для которой функция (5) всюду разрывна и не принадлежит второму бэровскому классу на пространстве \mathcal{M} .*

§ 2. О ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ТРЕТЬЕМУ БЭРОВСКОМУ КЛАССУ

Предварительно докажем несколько лемм, которые будут использованы для доказательства теоремы 1. Пусть $f: \mathcal{M} \times X \rightarrow X$ — непрерывное по совокупности переменных отображение.

ЛЕММА 1. *Для произвольных $\mu_0 \in \mathcal{M}$ и положительного числа ε найдется такая окрестность $\mathcal{U}_{\mu_0}^f(\varepsilon)$ точки μ_0 , что для любого $\mu \in \mathcal{U}_{\mu_0}^f(\varepsilon)$ выполнено неравенство*

$$\sup_{x \in X} d(f(\mu_0, x), f(\mu, x)) \leq \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задано положительное число ε . В силу непрерывности отображения $f(\cdot, \cdot)$ для каждой точки $x \in X$ найдется ее окрестность $\mathcal{V}_x^f(\varepsilon)$ в пространстве X и окрестность $\mathcal{U}_{\mu_0, x}^f(\varepsilon)$ точки μ_0 в пространстве \mathcal{M} , такие что для любой точки $(\mu, y) \in \mathcal{U}_{\mu_0, x}^f(\varepsilon) \times \mathcal{V}_x^f(\varepsilon)$

выполнено неравенство

$$d(f(\mu_0, x), f(\mu, y)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из компактности пространства X следует существование конечного набора точек $(x_l)_{l=1}^n \subset X$, такого что

$$X \subset \bigcup_{l=1}^n \mathcal{V}_{x_l}^f(\varepsilon).$$

Положим

$$\mathcal{U}_{\mu_0}^f(\varepsilon) = \bigcap_{l=1}^n \mathcal{U}_{\mu_0, x_l}^f(\varepsilon).$$

Тогда для любого $\mu \in \mathcal{U}_{\mu_0}^f(\varepsilon)$ выполнено неравенство

$$\sup_{x \in X} d(f(\mu_0, x), f(\mu, x)) \leq \varepsilon.$$

Лемма 1 доказана. \square

Лемма 2. Для произвольных $\mu_0 \in \mathcal{M}$ и положительного числа ε найдутся такие окрестность $\mathcal{U}_{\mu_0}^f(\varepsilon)$ точки μ_0 и число $\delta_{\mu_0}^f(\varepsilon) \in (0, \varepsilon)$, что для любого $\mu \in \mathcal{U}_{\mu_0}^f(\varepsilon)$ из условия $d(x, y) < \delta_{\mu_0}^f(\varepsilon)$ вытекает неравенство

$$d(f(\mu, x), f(\mu, y)) < \varepsilon.$$

Доказательство. В силу компактности пространства X отображение $f(\mu_0, \cdot)$ является равномерно непрерывным на X , т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta_{\mu_0}(\varepsilon) \in (0, \varepsilon)$, что из неравенства $d(x, y) < \delta_{\mu_0}(\varepsilon)$ вытекает неравенство

$$d(f(\mu_0, x), f(\mu_0, y)) < \varepsilon.$$

Для любых $\mu \in \mathcal{U}_{\mu_0}^f(\varepsilon/3)$, где $\mathcal{U}_{\mu_0}^f(\varepsilon)$ — окрестность, найденная в лемме 1, и $x, y \in X$, удовлетворяющих условию $d(x, y) < \delta_{\mu_0}(\varepsilon/3)$, выполнена цепочка неравенств

$$\begin{aligned} d(f(\mu, x), f(\mu, y)) &\leq d(f(\mu, x), f(\mu_0, x)) + d(f(\mu_0, x), f(\mu_0, y)) + \\ &+ d(f(\mu_0, y), f(\mu, y)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана. \square

ЛЕММА 3. Для произвольных $\mu_0 \in \mathcal{M}$, $\varepsilon > 0$ и $n, k \in \mathbb{N}$ найдутся такие окрестность $\mathcal{U}_{\mu_0, n, k}(\varepsilon)$ точки μ_0 и число $\alpha_{\mu_0, n, k}(\varepsilon) \in (0, \varepsilon)$, что для каждого $\mu \in \mathcal{U}_{\mu_0, n, k}(\varepsilon)$ и любых $x, y \in X$ выполнено неравенство

$$d_k^{F_n(\mu_0, \cdot)}(x, y) - 2\varepsilon \leq d_k^{F_n(\mu, \cdot)}(x, y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем натуральные числа n и k . Положим

$$\delta_{\mu_0}(\varepsilon) = \min_{n \leq m \leq n+k-2} \delta_{\mu_0}^{f_m}(\varepsilon), \quad \alpha_{\mu_0, n, k}(\varepsilon) = \left(\frac{1}{2}\delta_{\mu_0}\right)^{\circ k} \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right),$$

$$\mathcal{U}_{\mu_0, n, k}(\varepsilon) = \bigcap_{m=n}^{n+(k-2)} \mathcal{U}_{\mu_0}^{f_m}(\alpha_{\mu_0, n, k}(\varepsilon)),$$

где $\mathcal{U}_{\mu_0}^{f_m}(\varepsilon)$ и $\delta_{\mu_0}^{f_m}(\varepsilon) \in (0, \varepsilon)$, $m = n, \dots, n+k-2$, найдены в лемме 2. Для любого $x \in X$ и $\mu \in \mathcal{U}_{\mu_0, n, k}(\varepsilon)$ в силу леммы 1 получаем

$$\begin{aligned} d(f_n^{\circ 1}(\mu, x), f_n^{\circ 1}(\mu_0, x)) &= d(f_n(\mu, x), f_n(\mu_0, x)) \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\delta_{\mu_0}\right)^{\circ(k-1)} \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right) < \varepsilon. \end{aligned} \quad (6)$$

Для любого $i = 2, \dots, k-2$ выполнена оценка

$$\begin{aligned} &d(f_n^{\circ i}(\mu_0, x), f_n^{\circ i}(\mu, x)) \leq \\ &\leq d\left(f_{n+(i-1)}(\mu_0, f_n^{\circ(i-1)}(\mu_0, x)), f_{n+(i-1)}(\mu_0, f_n^{\circ(i-1)}(\mu, x))\right) + \\ &+ d\left(f_{n+(i-1)}(\mu_0, f_n^{\circ(i-1)}(\mu, x)), f_{n+(i-1)}(\mu, f_n^{\circ(i-1)}(\mu, x))\right) \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\delta_{\mu_0}\right)^{\circ(k-i)} \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right) + \left(\frac{1}{2}\delta_{\mu_0}\right)^{\circ(k-1)} \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right) \leq \\ &\leq 2 \left(\frac{1}{2}\delta_{\mu_0}\right)^{\circ(k-i)} \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right) \leq \left(\frac{1}{2}\delta_{\mu_0}\right)^{\circ(k-i-1)} \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right) < \varepsilon. \end{aligned} \quad (7)$$

Для $i = k-1$ выполнена оценка

$$\begin{aligned} &d(f_n^{\circ(k-1)}(\mu, x), f_n^{\circ(k-1)}(\mu_0, x)) \leq \\ &\leq d\left(f_{n+(k-2)}(\mu_0, f_n^{\circ(n-2)_n}(\mu_0, x)), f_{n+(k-2)}(\mu_0, f_n^{\circ(n-2)}(\mu, x))\right) + \\ &+ d\left(f_{n+(k-2)}(\mu_0, f_n^{\circ(n-2)_n}(\mu, x)), f_{n+(k-2)}(\mu, f_n^{\circ(n-2)}(\mu, x))\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\varepsilon + \left(\frac{1}{2}\delta_{\mu_0}\right)^{\circ(k-1)} \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right) < \varepsilon. \end{aligned} \quad (8)$$

Из неравенств (6)–(8) следует

$$\begin{aligned} d_k^{F_n(\mu_0, \cdot)}(x, y) &= \max_{0 \leq i \leq k-1} d(f_n^{\circ i}(\mu_0, x), f_n^{\circ i}(\mu_0, y)) \leq \\ &\leq \max_{0 \leq i \leq k-1} \left(d(f_n^{\circ i}(\mu_0, x), f_n^{\circ i}(\mu, x)) + d(f_n^{\circ i}(\mu, x), f_n^{\circ i}(\mu, y)) + \right. \\ &\quad \left. + d(f_n^{\circ i}(\mu, y), f_n^{\circ i}(\mu_0, y)) \right) \leq \\ &\leq \varepsilon + \max_{0 \leq i \leq k-1} d(f_n^{\circ i}(\mu, x), f_n^{\circ i}(\mu, y)) + \varepsilon = 2\varepsilon + d_k^{F_n(\mu, \cdot)}(x, y). \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана. \square

ЛЕММА 4. Для любых натуральных чисел n , k и каждого положительного числа ε функция $\mu \mapsto \ln N_d(F_n(\mu, \cdot), \varepsilon, k)$ полунепрерывна снизу в каждой точке пространства \mathcal{M} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольную точку $\mu_0 \in \mathcal{M}$. Пусть множество $E_{\mu_0} \subset X$ является $(F_n(\mu_0, \cdot), \varepsilon, k)$ -отделенным. Тогда найдется такое натуральное число m , что множество E_{μ_0} является $(F_n(\mu_0, \cdot), \varepsilon + 1/m, k)$ -отделенным. Пусть $\mu \in \mathcal{M}$ удовлетворяет условию $\mu \in \mathcal{U}_{\mu_0, n, k}(1/(2m))$, где окрестность $\mathcal{U}_{\mu_0, n, k}(\varepsilon)$ найдена в лемме 2. Тогда в силу леммы 2 для любых двух точек $x, y \in E_{\mu_0}$ выполнены неравенства

$$d_k^{F_n(\mu, \cdot)}(x, y) \geq d_k^{F_n(\mu_0, \cdot)}(x, y) - 2\frac{1}{2m} > \varepsilon.$$

Таким образом, множество $E_{\mu_0} \subset X$ является $(F_n(\mu, \cdot), \varepsilon, k)$ -отделенным, и следовательно, выполнено неравенство

$$N_d(F_n(\mu, \cdot), \varepsilon, k) \geq N_d(F_n(\mu_0, \cdot), \varepsilon, k).$$

Лемма 4 доказана. \square

ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1. По лемме 4 для всяких $\varepsilon > 0$ и $n, k \in \mathbb{N}$ функция $\mu \mapsto \ln N_d(F_n(\mu, \cdot), \varepsilon, k)$ полунепрерывна снизу. Следовательно, по [10, гл. IX, § 37, XI] существует последовательность непрерывных функций $\mu \mapsto g_{n, \varepsilon, k}^m(\mu)$ на пространстве \mathcal{M} , такая что

$$\frac{1}{n} \ln N_d(F_n(\mu, \cdot), \varepsilon, n) = \sup_{m \in \mathbb{N}} g_{n, \varepsilon, k}^m(\mu), \quad \mu \in \mathcal{M}.$$

Отсюда в силу формулы (2) получаем

$$h_{\text{top}}^*(\mathcal{F}(\mu, \cdot)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln N_d(F_n(\mu, \cdot), \varepsilon, k) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{r \in \mathbb{N}} \limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{m \in \mathbb{N}} g_{n,1/r,k}^m(\mu) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{r \in \mathbb{N}} \inf_{s \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq s} \sup_{m \in \mathbb{N}} g_{n,1/r,k}^m(\mu) = \\
&= \lim_{p \rightarrow \infty} \max_{1 \leq n \leq p} \max_{1 \leq r \leq p} \lim_{t \rightarrow \infty} \min_{1 \leq s \leq t} \lim_{q \rightarrow \infty} \max_{s \leq k \leq q} \max_{1 \leq m \leq q} g_{n,1/r,k}^m(\mu).
\end{aligned}$$

Так как максимум и минимум конечного множества функций из некоторого бэровского класса принадлежит тому же классу [10, гл. IX, § 37, III], функция $\mu \mapsto h_{\text{top}}^*(\mathcal{F}(\mu, \cdot))$ принадлежит третьему классу Бэра на пространстве \mathcal{M} . Теорема 1 доказана. \square

§ 3. О НЕПРИНАДЛЕЖНОСТИ ВТОРОМУ БЭРОВСКОМУ КЛАССУ

Для доказательства теоремы 2 напомним еще одну формулу для вычисления асимптотической топологической энтропии неавтономной динамической системы [1].

Для всяких $\varepsilon > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ обозначим через $B_{F_n}(x, \varepsilon, k)$ открытый шар

$$B_{F_n}(x, \varepsilon, k) = \{y \in X : d_k^{F_n}(x, y) < \varepsilon\}.$$

Множество $E \subset X$ называется (F_n, ε, k) -покрытием, если

$$X \subset \bigcup_{x \in E} B_{F_n}(x, \varepsilon, k).$$

Пусть $S_d(F_n, \varepsilon, k)$ обозначает минимальное количество элементов (F_n, ε, k) -покрытия. Тогда асимптотическая топологическая энтропия может быть вычислена по формуле

$$h_{\text{top}}^*(\mathcal{F}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln S_d(F_n, \varepsilon, k).$$

Рассмотрим семейство неавтономных динамических систем из [8]. Каждому элементу $\mu = (\mu_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{B}$ поставим в соответствие последовательность натуральных чисел $(q_k(\mu)_{k=1}^{\infty})$, определяемую равенством

$$q_k(\mu) = \begin{cases} 1 & \text{при } 1 \leq k < 4, \\ \min\{\mu_{\lfloor \log_2(\log_2 k) \rfloor}, \lfloor \log_2(\log_2 k) \rfloor\} & \text{при } k \geq 4. \end{cases}$$

Рассмотрим последовательность отображений

$$F(\cdot, \cdot) = (\sigma_1(\cdot, \cdot), \sigma_2(\cdot, \cdot), \dots)$$

из $\mathcal{B} \times \Omega_2$ в Ω_2 , где

$$\sigma_k(\mu, x) = (\dots, x'_{-1}, x'_0, x'_1, \dots), \quad x'_i = \begin{cases} x_i & \text{при } |i| < q_k(\mu), \\ x_{i+1} & \text{при } i \geq q_k(\mu), \\ x_{-i} & \text{при } i = -q_k(\mu), \\ x_{i+1} & \text{при } i < -q_k(\mu). \end{cases}$$

Непосредственно из определения вытекает, что для любого натурального k функция $\sigma_k(\cdot, \cdot)$ является непрерывной и гомеоморфизмом из Ω_2 на Ω_2 при всяком фиксированном значении $\mu \in \mathcal{B}$.

Для любого натурального числа l обозначим через P_l множество тех последовательностей из \mathcal{B} , у которых все члены, кроме, быть может, конечного числа, больше l . Обозначим через \mathcal{E} пересечение всех множеств P_l , т. е. множество тех последовательностей, которые стремятся к бесконечности.

Пусть $\mu \notin \mathcal{E}$. Тогда существуют подпоследовательность

$$(\mu_{k_j})_{j=1}^{\infty} \subset (\mu_k)_{k=1}^{\infty}$$

и натуральное число $q(\mu)$, такие что $\mu_{k_j} = q_\mu$ при всех $j \in \mathbb{N}$. Обозначим $N_j = 2^{2^{k_j}}$. Тогда для всех $j \in \mathbb{N}$, $k \in \{N_j, \dots, N_j^2 - 1\}$ и $x \in \Omega_2$ выполнено равенство $\sigma_k(\mu, x) = \sigma_{N_j}(\mu, x)$. Отображение $\sigma_{N_j}(\mu, \cdot)$ имеет вид

$$\sigma_{N_j}(\mu, x) = (\dots, x'_{-1}, x'_0, x'_1, \dots), \quad x'_i = \begin{cases} x_i & \text{при } |i| < q_\mu, \\ x_{i+1} & \text{при } i \geq q_\mu, \\ x_{-i} & \text{при } i = -q_\mu, \\ x_{i+1} & \text{при } i < -q_\mu, \end{cases}$$

т. е. является сдвигом последовательности $x \in \Omega_2$ на один элемент влево начиная с номера $q_\mu + 1$.

Пусть заданы натуральные числа n и $m > q_\mu$. Для каждого j такого, что $N_j > n$ и $N_j^2 - N_j > m$, рассмотрим множество $\mathcal{S}_{j,m}$ точек $x \in \Omega_2$, которые под действием отображения $\sigma_{N_j}(\mu, \cdot) \circ \dots \circ \sigma_n(\mu, \cdot)$ переходят в точки $y = (\dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots) \in \Omega_2$ вида

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{при } i \leq m, \\ 0 \text{ или } 1 & \text{при } m+1 \leq i \leq N_j^2 - N_j - 1, \\ 0 & \text{при } i \geq N_j^2 - N_j. \end{cases}$$

Таким образом, для любых двух точек $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ из $\mathcal{S}_{j,m}$ имеем

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq i \leq N_j^2 - 1} d(\sigma_n^{oi}(\mu, x^{(1)}), \sigma_n^{oi}(\mu, x^{(2)})) \geq \\ & \geq \max_{N_j + 1 \leq i \leq N_j^2 - 1} d(\sigma_n^{oi}(\mu, x^{(1)}), \sigma_n^{oi}(\mu, x^{(2)})) \geq 2^{-m}. \end{aligned}$$

Мощность множества $\mathcal{S}_{j,m}$ не меньше чем $2^{N_j^2 - 1 - N_j - m}$. Отсюда получаем

$$S_{d_{\Omega_2}}(\mathcal{F}_n(\mu, \cdot), 2^{-m}, N_j^2) \geq 2^{N_j^2 - 1 - N_j - m},$$

а следовательно,

$$h_{\text{top}}^*(\mathcal{F}(\mu, \cdot)) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{N_j^2} \ln(2^{N_j^2 - 1 - N_j - m}) = \ln 2. \quad (9)$$

Для фиксированного $\varepsilon > 0$ возьмем такое натуральное m , что $2^{-m} < \varepsilon$. Пусть $\mu \in \mathcal{E}$. Тогда найдется такой номер k_0 , что для любого $k \geq k_0$ выполнено неравенство $q_k > m$. Следовательно, для любых $x, y \in \Omega_2$, удовлетворяющих условию $d(x, y) < 2^{-m}$, для всех $k \geq k_0$ выполнено неравенство $d(\sigma_k(\mu, x), \sigma_k(\mu, y)) < 2^{-m}$. Отсюда получаем, что если $d_{k_0}^{F_n}(x, y) < 2^{-m}$, то при всех $k \geq k_0$ выполнено неравенство $d_k^{F_n}(x, y) < 2^{-m}$. Таким образом, при $k \geq k_0$ справедлива оценка

$$S_{d_{\Omega_2}}(F_n(\mu, \cdot), \varepsilon, k) \leq S_{d_{\Omega_2}}(F_n(\mu, \cdot), 2^{-m}, k_0) \leq 2^{k_0 + 1 + 2m},$$

из которой получаем

$$h_{\text{top}}^*(\mathcal{F}(\mu, \cdot)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln 2^{k_0 + 1 + 2m} = 0. \quad (10)$$

Воспользуемся следующим утверждением, установленным в [11]: если функционал $\mu \mapsto h_{\text{top}}^*(\mathcal{F}(\mu, \cdot))$ принадлежит второму классу Бэра, то пересечение замыканий множеств $h_{\text{top}}^*(\mathcal{F}(\mathcal{E}, \cdot))$ и $h_{\text{top}}^*(\mathcal{F}(\mathcal{B} \setminus \mathcal{E}, \cdot))$ непусто. В силу неравенств (9) и (10)

$$h_{\text{top}}^*(\mathcal{F}(\mathcal{E}, \cdot)) = 0 < \ln 2 \leq h_{\text{top}}^*(\mathcal{F}(\mathcal{B} \setminus \mathcal{E}, \cdot)),$$

следовательно, функция $\mu \mapsto h_{\text{top}}^*(\mathcal{F}(\mu, \cdot))$ не принадлежит второму бэровскому классу, а так как множества \mathcal{E} и $\mathcal{B} \setminus \mathcal{E}$ всюду плотны в пространстве \mathcal{B} , то функция $\mu \mapsto h_{\text{top}}^*(\mathcal{F}(\mu, \cdot))$ всюду разрывна на пространстве \mathcal{B} . Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kolyada S., Snoha L.* Topological entropy of nonautonomous dynamical systems // *Random Comput. Dynamics*. 1996. V. 4, N 2-3. P. 205–233.
2. *Adler R. L., Konheim A. G., McAndrew M.H.* Topological entropy // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1965. V. 114, N 2. P. 309–319.
3. *Misiurewicz M. T.* Horseshoes for mappings of the interval // *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. Astron. Phys.* 1979. V. 27. P. 167–169.
4. *Ветохин А. Н.* О некоторых свойствах топологической энтропии динамических систем // *Матем. заметки*. 2013. Т. 93, № 3. С. 347–356.
5. *Бэр Р.* Теория разрывных функций. М.; Л., 1932.
6. *Ветохин А. Н.* Типичное свойство топологической энтропии непрерывных отображений компактов // *Дифференц. уравн.* 2017. Т. 53, № 4. С. 448–453.
7. *Ветохин А. Н.* Неприводимость первого класса Бэра топологической энтропии на пространстве гомеоморфизмов // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.* 2016. № 2. С. 44–48.
8. *Ветохин А. Н.* Точный бэровский класс топологической энтропии неавтономных динамических систем // *Матем. заметки*. 2019. Т. 106, № 3. С. 341–348.
9. *Ветохин А. Н.* О неприводимости второму бэровскому классу топологической энтропии одного семейства гладких неавтономных динамических систем на отрезке, непрерывно зависящих от параметра // *Дифференц. уравн.* 2020. Т. 56, № 1. С. 133–136.
10. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.: ОНТИ, 1937.
11. *Ветохин А. Н.* Класс Бэра максимальных полунепрерывных снизу минорант показателей Ляпунова // *Дифференц. уравн.* 1998. Т. 34, № 10. С. 1313–1317.