В. И. Питербарг, В. Р. Фаталов, Метод Лапласа для вероятностных мер в банаховых пространствах, *УМН*, 1995, том 50, выпуск 6, 57–150

1995 г. ноябрь — декабрь *т. 50, вып. 6(306)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 519.2

МЕТОД ЛАПЛАСА ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В.И. Питербарг, В.Р. Фаталов

СОДЕРЖАНИЕ

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-01-01232).

1. Введение

Метод Лапласа был одним из первых асимптотических методов, позволивших вычислить точную асимптотику при $u \to \infty$ интеграла

$$\int_a^b f(x) \exp\{-uF(x)\}\, dx \tag{1.1}$$

(называемого теперь интегралом Лапласа). Основное условие при этом заключалось в предположении, что функция $F(x)$ имеет конечное число точек минимума x_i на $[a, b]$. Тогда при некоторых допущениях гладкости основной вклад в асимптотику интеграла (1.1) дают интегралы по достаточно малым окрестностям точек x_i [59], [91].

Уже в такой одномерной постановке метод Лапласа нашел многочисленные применения как в самой математике (математический анализ, теория специальных функций, теория функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения и т. д.) так и в других разделах естествознания – механике, статистической физике, радиотехнике, теории колебаний, ядерной физике. Однако ограничение области интегрирования отрезком действительной оси носило искусственный характер и сдерживало использование данного метода в многочисленных задачах, где нужно было найти асимптотику кратных интегралов типа

$$\int_D f(x)\exp\{-uF(x)\}\,dx, \tag{1.2}$$

где D – область в $\mathbb{R}^k$, $k>1$, f и F – действительные функции k-мерного аргумента. Строгое обоснование метода Лапласа на случай интегралов (1.2) оказалось далеко нетривиальным и потребовало привлечения более сложного математического аппарата, включающего некоторые понятия дифференциальной геометрии [91, гл. 2] (некоторые приложения имеются в [51, гл. 9], [143]). Здесь стоит отметить четыре особенности, отличающие метод Лапласа в $\mathbb{R}^k$, $k>1$, от одномерного случая. Во-первых, при $k>1$ предполагают, как правило, что функция F дважды дифференцируема в окрестности U своих точек минимума, в то время как при $k=1$ достаточно требовать липшицевости функции F на U. Во-вторых, подход и результат, присущие многомерному методу Лапласа существенно отличаются при рассмотрении внутренних и граничных точек минимума. В-третьих, в $\mathbb{R}^k$ при $k>1$ приходится выделять в соответствии с видом гессиана функции F вырожденные и невырожденные точки минимума. И, наконец, в-четвертых, в многомерном случае часто приходится иметь дело с многообразием точек минимума функции F. Все эти вопросы достаточно полно освещены в монографической литературе [91], и мы на них в этом обзоре останавливаться не будем. Четыре перечисленных особенности присущи и методу Лапласа в бесконечномерных пространствах.

Бурное развитие разделов современной математической физики, связанных с функциональным интегрированием [47], [85], [180], [190] потребовало создания эффективного метода приближенного (асимптотического) вычисления интегралов (называемых континуальными, или интегралами по траекториям) типа

$$J_u(D)=\int_D f(x)\exp\{-u^2F(x)\}\,d\mathsf{P}(ux) \tag{1.3}$$

при больших значениях u, где теперь D – борелевское подмножество некоторого банахова пространства B, f и F – действительные функции, определенные на B, $\mathsf{P}(\,\cdot\,)$ – вероятностная мера, определенная на борелевских подмножествах B. Оказалось, что для достаточно гладких f, F и ∂D (границы D) точную асимптотику интегралов (1.3) можно находить с помощью асимптотического метода в функциональном пространстве, который аналогичен методу Лапласа в $\mathbb{R}^k$. Впервые на возможность создания такого метода указал Р. Фейнман в своих работах по квантовой механике [92], [180]. Первоначальное становление метода Лапласа в бесконечномерных пространствах произошло в семидесятых годах в связи с появлением и развитием принципа больших уклонений в теории вероятностей (см. [17, гл. 3], [154] и гл. 2 ниже). В такой форме метод Лапласа давал возможность находить логарифмические асимптотики интегралов $J_u(B)$, взятых по всему пространству B. В восьмидесятых годах в работах Р. Эллиса, Дж. Розен, Р. Азенкотта, Ж. Бен Ару, Э. Больтхаузена был обоснован в окончательной форме асимптотический метод Лапласа в банаховых пространствах, позволивший вычислять точные асимптотики $J_u(B)$ для дважды дифференцируемых по

Фреше функций $F(x)$. Систематическому изложению этих результатов, отсутствующему в монографической литературе (см. [85, с. 146], [7, с. 64, 65]) и посвящена первая глава настоящего обзора. Кроме того, здесь приведены результаты одного из авторов о структуре метода Лапласа для нахождения точных асимптотик интегралов $J_u(D)$ в случае гауссовских мер P, а также дана сводка утверждений об асимптотиках распределений больших уклонений для норм в таких банаховых пространствах, как гильбертово, ℓ_k^p, ℓ^p, $L^p[0,1]$, $C[0,1]$.

Построение метода Лапласа в традиционной форме для интегралов (1.3) с недифференцируемыми F и (или) ∂D на сегодняшний день не осуществлено и является, по-видимому, сложной задачей. Тем не менее, в пространстве $C(T)$, T – компакт в $\mathbb{R}^n$ или в ℓ^2, имеется нетрадиционный вариант метода Лапласа для вычисления асимптотик гауссовских вероятностей

$$\mathsf{P}(uD), \qquad D = \Big\{x(t) : \sup_{t\in T} x(t) > 1\Big\}, \tag{1.4}$$

– метод двойных сумм. Представим вероятность (1.4) в виде

$$\mathsf{P}(uD) = \int_B \exp\{-u^2 I_D(x)\}\, d\mathsf{P}(ux), \tag{1.5}$$

где

$$I_D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in D, \\ +\infty, & \text{если } x \notin D. \end{cases}$$

Отсюда видно, что исследование асимптотики интеграла (1.5) (где $F(x) \equiv I_D(x)$) напрямую связано с изучением структуры множества D, которое имеет недифференцируемую границу. Как и в классическом методе Лапласа основной вклад в асимптотику интеграла (1.5) вносит "бесконечно малое" подмножество множества D. Способы выделения этого подмножества являются чисто вероятностными и существенно зависят от ковариационной структуры гауссовской меры P. Важную роль при этом играет наличие или отсутствие свойства стационарности меры P, что является аналогом условия, определяющего размерность многообразия точек минимума функционала действия в классическом методе Лапласа. Метод двойных сумм берет свое начало с работ Дж. Пикандса [246] (стационарные гауссовские меры) и В.И. Питербарга, В.П. Присяжнюка [66] (нестационарные меры). Дальнейшее развитие метода было осуществлено в работах [3], [72], [74], [132], [175], [248], [250], [252], исследования в этом направлении продолжаются.

Вторая глава настоящего обзора посвящена изложению метода двойных сумм и результатов, полученных с его помощью.

ГЛАВА I

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КОНТИНУАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ БОЛЬШОГО ПАРАМЕТРА

2. Принцип больших уклонений и логарифмические асимптотики континуальных интегралов

В данном разделе мы изложим некоторые положения принципа больших уклонений (ПБУ) для вероятностных мер в абстрактных пространствах. ПБУ является мощным средством изучения предельных значений последовательности мер и логарифмических асимптотик функциональных интегралов. Метод Лапласа в банаховых пространствах, рассмотренный ниже в разделах 3–5, включает как составную часть результат о логарифмической асимптотике, доставляемый ПБУ. При этом логарифмические асимптотики континуальных интегралов (1.3) справедливы при гораздо меньших ограничениях на гладкость функции $F(x)$, чем в случае точных асимптотик. Кроме того, функционал действия, играющий фундаментальную роль в теории больших уклонений, является центральным объектом и в методе Лапласа. Из сказанного видно, что ПБУ, очень важный и сам по себе, не может быть обойден молчанием при описании метода Лапласа.

ПБУ, берущий свое начало с работы Варадана [278], был затем развит многими авторами. Продвинутое изложение теории больших уклонений вместе с разнообразными приложениями можно найти в книгах [51, гл. 9], [17], [18], [81], [133], [153], [154], [168], [183], [271], [280] и ряде статей, из которых мы упомянем обзоры [48], [55], [82], [93], [107], [115], [184], [207], [281], [303] и фундаментальные работы [9], [16], [112], [157]. Дальнейшие литературные ссылки будут даны ниже при рассмотрении различных примеров применения ПБУ к конкретным последовательностям мер.

Определение 2.1 (принципа больших уклонений, по [278]). Пусть $\mathbb{S}$ – польское (т.е. полное сепарабельное метрическое) пространство и $\mathscr{S}$ – его борелевская σ-алгебра. Говорят, что семейство вероятностных мер $\{\mu_u,\ u>0\}$ на $[\mathbb{S},\mathscr{S}]$ удовлетворяет принципу больших уклонений с функционалом действия $I(x)$, если:

1) отображение $I\colon \mathbb{S}\to[0,\infty]$ полунепрерывно снизу и отлично от функционала, равного тождественно $+\infty$;
2) для любого фиксированного $t<\infty$ множество $\bigl\{x\in\mathbb{S}: I(x)\leqslant t\bigr\}$ компактно;
3) для любого замкнутого множества F из $\mathbb{S}$ имеет место неравенство
$$\limsup_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log\{\mu_u(F)\}\leqslant-\inf_{x\in F}I(x);$$
4) для любого открытого множества G из $\mathbb{S}$ имеет место неравенство
$$\liminf_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log\{\mu_u(G)\}\geqslant-\inf_{x\in G}I(x).$$

Часто рассматривают семейство мер, зависящих от малого параметра $\varepsilon>0$. Тогда естественно положить в вышеприведенном определении $u=1/\varepsilon$.

Замечание 2.1. Пусть ПБУ верен для последовательности вероятностных мер $\{\mu_u\}$, которая, к тому же, слабо сходится при $u \to \infty$ к вероятностной мере δ_y, сосредоточенной в точке y. Тогда для множества A, не пересекающегося с некоторой окрестностью точки y, в силу пунктов 3), 4) определения 2.1 $\mu_u(A) \to 0$ экспоненциально быстро при $u \to \infty$ и функционал действия I определяет постоянную в показателе экспоненты при u.

Замечание 2.2. Если для некоторого $C \in \mathscr{S}$ окажется, что

$$\inf_{x \in C^0} I(x) = \inf_{x \in \overline{C}} I(x) = r \tag{2.1}$$

(здесь и ниже C^0 и $\overline{C}$ – внутренность и замыкание множества C соответственно), то комбинация 3) и 4) дает

$$\lim_{u \to \infty} \frac{1}{u} \log \mu_u(C) = -r. \tag{2.2}$$

К сожалению, проверка условия (2.1) в случае произвольных семейств мер является сложной задачей. Однако для распределений нормированных сумм независимых одинаково распределенных случайных элементов, диффузионных процессов, а также, гауссовских мер в банаховых пространствах, (2.1) выполнено, если множество C открыто и выпукло – см. примеры 2.1, 2.4 и 2.5.

Замечание 2.3. Принцип больших уклонений представляет интерес и для задачи нахождения логарифмической асимптотики континуального интеграла типа (1.3), когда $D = \mathbb{S}$. Именно, справедлива следующая важная теорема.

Теорема 2.1 (Варадан, [278]). *Пусть последовательность вероятностных мер μ_u на $[\mathbb{S}, \mathscr{S}]$ удовлетворяет ПБУ с функционалом действия I. Тогда для любой ограниченной непрерывной функции $F\colon \mathbb{S} \to \mathbb{R}^1$ имеет место равенство*

$$\lim_{u \to \infty} \frac{1}{u} \log \int_{\mathbb{S}} \exp\{-uF(x)\}\, d\mu_u(x) = -\inf_{x \in \mathbb{S}} [F(x) + I(x)]. \tag{2.3}$$

Отметим, что в некоторых случаях условия, налагаемые в теореме 2.1 на F, могут быть ослаблены (см. [303, § 6]).

Как правило, функционал действия I выписывается с помощью преобразования Лежандра–Фенхеля, вводимого в выпуклом анализе (см. [77]).

Для каких же конкретных последовательностей мер верен ПБУ? Каков при этом вид функционала действия? Ниже мы приводим соответствующие примеры, указывая в некоторых из них на возможность нахождения точных асимптотик функциональных интегралов.

На протяжении всей статьи символ E (с индексами или без индексов) используется для обозначения оператора математического ожидания по соответствующей вероятностной мере.

Пример 2.1. *Принцип больших уклонений для нормированной суммы независимых одинаково распределенных случайных элементов со значениями в банаховом пространстве* [157, III, § 5], [9, I]. Пусть B – действительное сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и $(X_n)_{n\geqslant 1}$ – последовательность независимых одинаково распределенных B-значных случайных элементов с распределением μ. Обозначим

$$S_n := X_1 + \dots + X_n. \tag{2.4}$$

Предположим, что

$$\int x\,\mu(dx) = 0 \tag{2.5}$$

и выполнено условие Крамера:

$$\int \exp\{t\|x\|\}\,\mu(dx) < \infty \quad \text{для всех} \quad t > 0. \tag{2.6}$$

Определим преобразование Крамера–Лежандра–Фенхеля меры μ:

$$I(x) = \sup_{x^*\in B^*}\biggl\{\langle x, x^*\rangle - \log\int \exp\bigl(\langle y, x^*\rangle\bigr)\,\mu(dy)\biggr\}, \tag{2.7}$$

где B^* – сопряженное к B пространство, $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ – линейная форма, устанавливающая двойственность между B и B^*.

Тогда *последовательность распределений μ_n случайных элементов S_n/n удовлетворяет ПБУ с функционалом действия $I(x)$.*

Доказательство имеется в [157, III], [271]. В [157, III] из ПБУ выведен также такой результат.

Пусть F – непрерывная числовая функция на B и существуют константы $c, d > 0$ такие, что

$$F(x) \geqslant -c - d\|x\|.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log \mathsf{E}\exp\bigl\{-nF(S_n/n)\bigr\} = -\inf_{x\in B}[F(x) + I(x)]. \tag{2.8}$$

Точная асимптотика среднего в левой части (2.8) при некоторых дополнительных ограничениях вычислена в статьях [137] на основе метода Лапласа, см. раздел 4 настоящего обзора. Дальнейшие сведения о ПБУ для распределений сумм независимых случайных величин содержатся в [60], [96], [151], [193], [239], см. также [5], [36], [62], [124], [125], [197], [259].

Следующий результат дополняет замечание 2.2.

ТЕОРЕМА 2.2 [9, I, теорема 1.1]. *Пусть* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ – *последовательность независимых одинаково распределенных случайных элементов со значениями в измеримом пространстве* $[V,\mathscr{V}]$. *Пусть* V – *полное локально выпуклое хаусдорфово топологическое векторное пространство и распределение* μ *элемента* X_1 *плотно в* V, *т.е. для любого* $\varepsilon>0$ *найдется компакт* K_ε *в* V *такой, что* $\mu(K_\varepsilon)\geqslant 1-\varepsilon$.

Тогда для любого открытого выпуклого множества U *в* V *имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log \mathsf{P}\{S_n/n\in U\} = -\inf_{x\in U} I(x), \tag{2.9}$$

где S_n *определено в* (2.4), $I(x)$ – *в* (2.7) *с заменой* B, B^* *на* V, V^*.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Очевидно, теорема 2.2 верна и для множества U, представимого в виде конечного объединения открытых выпуклых множеств.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Отметим, что теорема 2.2 верна, когда V – банахово пространство (см. [15, гл. 1, теорема 3.1]), при этом выполнение условий (2.5), (2.6) не предполагается (и, следовательно, ПБУ может не иметь места). Условие выпуклости для справедливости равенств типа (2.2) рассматривалось также в [112], [146]. В [9, I] приведен также пример открытого, но невыпуклого множества $U=\{x: I(x)>s\}$, $s>0$, в пространстве $C[0,1]$. Для такого U нарушено равенство (2.9), если в качестве X_1 взять стандартный винеровский процесс.

ПРИМЕР 2.2. *Принцип больших уклонений для марковских случайных процессов.* Эта тема наиболее полно освещена в работах [16]–[18], [107], [157], [164], [195], [271], [278], [280], [289]. В [18, введение, п. 4] имеется обзор результатов о больших уклонениях для различных классов марковских случайных процессов. Отметим, что развитие ПБУ (сделавшее его близким методу Лапласа), осуществленное в [27], [28], [18, гл. 5, 6], позволило вычислить точные асимптотики математических ожиданий гладких функционалов от некоторых марковских процессов, см. также [136].

В качестве иллюстрации приведем следующий результат А.Д. Вентцеля о больших уклонениях марковского процесса с непрерывным временем [18, теоремы 3.2.1–3.2.3].

Пусть $(\xi^u(t),\mathsf{P}^u_{t,x})$, $0\leqslant t\leqslant T$, при каждом $u\geqslant 0$ – локально безгранично делимый [7, § 1.3], строго марковский процесс в $\mathbb{R}^k$ с траекториями в пространстве $\boldsymbol{D}[0,T]$ (пространство функций на $[0,T]$, непрерывных справа и имеющих пределы слева). Пусть $G^u(t,x;z)$, $z=(z_1,\dots,z_k)\in\mathbb{R}^k$, – кумулянта [18, § 2.1] процесса $\xi^u(t)$, причем существуют пределы

$$\lim_{u\to\infty}\frac{1}{u}G^u(t,x;uz)=G_0(t,x;z),$$
$$\lim_{u\to\infty}\nabla_z\frac{1}{u}G^u(t,x;uz)=\nabla_z G_0(t,x;z)$$

равномерно по всем t, x и по каждому ограниченному множеству значений z. Здесь ∇_z – оператор градиента. Пусть

$$H_0(t,x;y)=\sup_{z\in\mathbb{R}^k}\bigl\{\langle z,y\rangle - G_0(t,x;z)\bigr\}$$

– преобразование Лежандра функции $G_0(t,x;z)$ по третьему аргументу, где $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^k$. Зададим функционал

$$I(\varphi)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^T H_0\bigl(t,\varphi(t);\dot\varphi(t)\bigr)\,dt, & \text{если } \varphi \text{ абсолютно непрерывна},\\ +\infty & \text{иначе}.\end{cases}$$

При сделанных предположениях и некоторых дополнительных условиях ограниченности и регулярности на функции G_0, H_0 (*см. условия* А–Д *в* [18, § 3.1, 3.2]) *семейство распределений* $\mathsf{P}^u_{t,x}(\xi^u(t)\in\cdot\,)$ *в* $\mathbb{R}^k$ *при* $u\to\infty$ *удовлетворяет ПБУ с функционалом действия* $I(\varphi)$.

Для непрерывного ограниченного на $\boldsymbol{D}[0,T]$ *функционала* F *имеет место равенство*

$$\lim_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log\mathsf{E}^u_{t,x}\exp\bigl\{-uF(\xi^u_{t,x})\bigr\}=-\inf_{\varphi\in\boldsymbol{D}[0,T]}[F(\varphi)+I(\varphi)].$$

Отметим, что в приведенном результате марковские процессы ξ^u могут быть определены на различных вероятностных пространствах, зависящих от большого параметра u. В [18] доказан также ПБУ для безгранично делимых марковских процессов с дискретным временем. Там же используемый метод доказательства развит для нахождения точных асимптотик средних от гладких функционалов для k-мерного винеровского процесса и для двух классов скачкообразных марковских процессов: с малыми частыми скачками и большими скачками (см. также [300]).

Пример 2.3. *Принцип больших уклонений для функционала локального времени от марковских процессов с непрерывным временем* [157, III], [216], [217]. Пусть S – польское пространство и $\mathsf{p}(t,x,dy)$ – феллеровская переходная вероятность некоторого марковского процесса с непрерывным параметром и со значениями в пространстве S. Пусть L обозначает производящий оператор полугруппы, порожденной вероятностями $\mathsf{p}(t,x,dy)$, $\mathscr{D}^+$ есть множество положительных функций v в области определения L. Обозначим через $\mathscr{M}$ пространство вероятностных мер на S, через Ω – пространство непрерывных справа функций $\omega(t)$, $0\leqslant t<\infty$, со значениями в S. Для каждого $t>0$, $\omega\in\Omega$ и борелевского C из S обозначим

$$\mathscr{L}_t(\omega,C)=\frac{1}{t}\int_0^t\chi_C(\omega(s))\,ds$$

– часть времени из $[0,t]$, которую фиксированная траектория $\omega=\omega(\,\cdot\,)$ проводит в множестве C (здесь $\chi_C(\,\cdot\,)$ – индикатор множества C).

Определим для борелевского $G\subset\mathscr{M}$

$$\mathsf{R}_{x,t}(G):=\mathsf{P}_x\bigl\{\omega\in\Omega:\mathscr{L}_t(\omega,\,\cdot\,)\in G\bigr\},$$

где P_x – вероятностная мера на Ω, индуцированная переходной вероятностью $\mathsf{p}(t,x,dy)$.

При сделанных предположениях и некоторых дополнительных условиях на L *и* $\mathsf{p}(t,x,dy)$ (*см.* [157, III, с. 392, 393]) *семейство вероятностных мер* $\mathsf{R}_{x,t}$ *удовлетворяет при* $t\to\infty$ *ПБУ с функционалом действия*

$$I(\mu)=-\inf_{v\in\mathscr{D}^+}\int_S\Big(\frac{Lv}{v}\Big)(x)\,\mu(dx).$$

Для слабо непрерывного функционала F *на* $\mathscr{M}$ *имеет место равенство*

$$\lim_{t\to\infty}\log\mathsf{E}_x\big\{\exp[-tF(\mathscr{L}_t(\omega,\cdot))]\big\}=-\inf_{\mu\in\mathscr{M}}[F(\mu)+I(\mu)]. \tag{2.10}$$

Вид точной асимптотики для среднего в левой части (2.10) найден совсем недавно в работах [140], [217] и приведен в § 5.1. Дальнейшие результаты об асимптотиках распределений локальных времен для марковских процессов имеются в [22], [138], [216], [236], [237], [296].

Пример 2.4. *Принцип больших уклонений для гауссовских мер.* Эта проблема хорошо изучена, более того, именно для гауссовских мер в банаховых пространствах построена довольно обширная и стройная теория больших уклонений, включающая точные асимптотики, см. раздел 3 и вторую главу данного обзора. ПБУ для гауссовских мер и логарифмические асимптотики гауссовских интегралов изучались во многих работах, см., например, [17, гл. 3, § 4], [56], [107, гл. II], [112], [130], [142], [146], [157, III, § 6], [159], [166], [192], [207, § 2], [208], [226, § 4], [267]. Эти вопросы, важные сами по себе, нашли разнообразные приложения в математической физике [8], [100], [145], [148], [166], [172], [190], [243], [265]. Задачи последней, в свою очередь, стимулировали развитие теории континуальных интегралов [6], [29], [47], [79], [85], [92], [99], [180], [220]. Здесь уместно будет напомнить, что исторически первой мерой, по которой был построен и изучен континуальный интеграл, была гауссовская мера – винеровская мера в пространстве $C[0,1]$ [288]. Наконец, отметим, что для гауссовских мер константы в асимптотиках во многих случаях можно явно вычислить.

Приведем один из наиболее общих результатов о больших уклонениях гауссовских мер, следуя [146]. Необходимые сведения о последних можно найти, например, в [15], [23], [301].

Пусть гауссовская мера μ, определенная на борелевской σ-алгебре действительного сепарабельного банахова пространства $(B,\|\cdot\|)$ имеет среднее нуль и ковариационный оператор A. Напомним, что по определению A – линейный оператор, отображающий сопряженное пространство B^* в B, такой, что выполнено равенство

$$\langle Ax^*,y^*\rangle=\int_B\langle x,x^*\rangle\,\langle x,y^*\rangle\;d\mu(x)$$

для всех $x^*,y^*\in B^*$. Из этого определения следует, что A – положительный, симметричный [15, с. 120], ядерный [15, с. 143] оператор. Пусть $(H_A,\|\cdot\|_A)$ обозначает гильбертово пространство, ассоциированное с A, т.е. пополнение области значений $\{Ax^*\,:\,x^*\in B^*\}$ оператора A относительно предгильбертовой нормы $\|Ax^*\|_A:=\sqrt{\langle Ax^*,x^*\rangle}$, $x^*\in B^*$ (см. [15, с. 126]). Зададим функционал действия меры μ следующим образом:

$$I(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\|x\|_A^2, & \text{если } x\in H_A,\\ +\infty & \text{иначе.}\end{cases} \tag{2.11}$$

ТЕОРЕМА 2.3 [146, теорема 2]. *Пусть* $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ – *последовательность гауссовских радоновых мер на банаховом пространстве* B *со средним нуль. Пусть* (μ_n) *слабо сходится при* $n \to \infty$ *к гауссовской мере* μ *со средним нуль и ковариационным оператором* A. *Тогда для любой последовательности действительных чисел* $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$, *стремящейся к* $+\infty$ *при* $n \to \infty$, *имеет место ПБУ с функционалом действия* (2.11) *в следующей форме*:

для любого замкнутого множества F *из* B *верно*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} \log\bigl\{\mu_n(\alpha_n F)\bigr\} \leqslant -\inf_{x\in F} I(x);$$

для любого открытого множества G *из* B *верно*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} \log\bigl\{\mu_n(\alpha_n G)\bigr\} \geqslant -\inf_{x\in G} I(x).$$

Взяв в теореме 2.2 в качестве X_n независимые одинаково распределенные гауссовские случайные элементы в банаховом пространстве B с распределением μ, получаем такое

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Пусть* (μ_n), μ *и* (α_n) – *такие же, как в теореме* 2.3. *Тогда для любого открытого выпуклого множества* C *в* B *имеет место*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} \log\bigl\{\mu_n(\alpha_n C)\bigr\} = -\inf_{x\in C} I(x).$$

Прямое доказательство следствия, использующее (2.11), имеется также в [146, с. 34], правда при дополнительном ограничении $\mu(C) > 0$. Аналог следствия 2.1 доказан также в [142, теорема 5.2] посредством геометрического подхода, совершенно отличного от ПБУ и основанного на эффективном неравенстве Брунна–Минковского в гауссовском пространстве (о последнем подходе см. подробнее в [225], [226, §4]).

В интегральной форме ПБУ для гауссовских мер в банаховом пространстве при наиболее общих ограничениях доказан в [146], см. также [166].

ТЕОРЕМА 2.4 [146, следствие 6]. *Пусть* (μ_n), μ *и* (α_n) – *такие же, как в теореме* 2.3. *Пусть* F, $(F_n)_{n\geqslant 1}$ – *последовательность измеримых функций из* B *в* $(-\infty, \infty]$ *таких, что*:

(i) *для каждого* $x \in H_A$ *и каждой последовательности* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *в* B, *сходящейся к* x *в* B, *последовательность* $F_n(x_n)$ *сходится к* $F(x)$;

(ii) *найдутся* $c \geqslant 0$, $0 \leqslant b < 1/(2\|A\|)$ *и* n_0 *такие, что для всех* $n \geqslant n_0$ *и всех* $x \in B$ *имеет место* $F_n(x) \geqslant -b\|x\| - c$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} \log\biggl\{\int \exp\biggl[-\alpha_n^2 F_n\Bigl(\frac{x}{\alpha_n}\Bigr)\biggr]\mu_n(dx)\biggr\} = -\inf_{x\in B}[F(x)+I(x)]. \tag{2.12}$$

Уточнение этой теоремы для пространства $C([0,1]^k)$, $k > 1$, имеется также в [146, следствие 7] в случае, когда $F_n \equiv F$, $n \geqslant 1$.

Приложения теорем типа 2.4 к "круговой модели" ("circle model") статистической механики даны в [166]. О приближенном вычислении гауссовских интегралов см. [20], [21], [29].

Пример 2.5. *Принцип больших уклонений для винеровской меры в пространстве $\boldsymbol{C}_r[0,T]$ непрерывных на $[0,T]$ вектор-функций.* Пусть $w(t) = (w_1(t), \ldots, w_r(t))$ – r-мерный винеровский процесс, где $w_i(t)$, $i = 1, \ldots, r$, – стандартные независимые одномерные винеровские процессы. Через W обозначим распределение процесса w в $\boldsymbol{C}_r[0,T]$ – банаховом пространстве непрерывных на $[0,T]$ функций со значениями в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^r$ и нормой

$$\|\varphi\|_{\mathrm{C}} = \max_{t\in[0,T]} \|\varphi(t)\|_r,$$

где

$$\|x\|_r := \left(\sum_{i=1}^r x_i^2\right)^{1/2}$$

– обычная евклидова норма вектора $x = (x_1, \ldots, x_r)$.

Гильбертово пространство H_A для меры W описано в [17], [23] и состоит из абсолютно непрерывных на $[0,T]$ функций, равных нулю в нуле и с производной, интегрируемой в квадрате. Соответственно, функционал действия для меры W задается в виде:

$$I(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T \|\dot\varphi(t)\|_r^2\,dt, & \text{если } \varphi \in H_A,\\ +\infty & \text{иначе.}\end{cases}$$

Имеет место следующее утверждение.

Для семейства мер $\{\mathsf{W}(uD)\}$, $u > 0$, D – борелевское множество в $\boldsymbol{C}_r[0,T]$, верен ПБУ.

Асимптотики (в том числе и точные) для винеровских интегралов исследовались с разных точек зрения во многих работах, см., например, [18, §5.1], [130], [158], [218], [219], [261], [283], [284]. Результаты о точных асимптотиках некоторых функционалов для винеровской меры приведены также ниже в §3.4, 5.3, 7.4.

Пример 2.6. *Принцип больших уклонений для диффузионных процессов.* Этой теме посвящены многочисленные исследования, в том числе, связанные с малыми случайными возмущениями динамических систем, см. [17], [19], [37], [55], [84], [93], [107]–[111], [116]–[120], [157], [162], [169], [181]–[185], [195], [209], [222], [223], [279], [282], [293].

Сформулируем, следуя работе [116], ПБУ для одного класса диффузионных процессов.

Пусть X^ε – решение стохастического дифференциального уравнения на $\mathbb{R}^d$

$$X_t^\varepsilon = x + \varepsilon\int_0^t \sigma(X_s^\varepsilon)\,dw_s + \int_0^t b(\varepsilon, X_s^\varepsilon)\,ds, \tag{2.13}$$

где $t \in [0,1]$, w по-прежнему обозначает r-мерный винеровский процесс, σ – векторное поле матриц размера $d \times r$ класса C_b^{N+3} и $b(\,\cdot\,,\cdot\,)$ – отображение класса C^{N+3} из $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}^d$ такое, что для каждого $\varepsilon \in \mathbb{R}$ $b(\varepsilon,\,\cdot\,)$ ограничено вместе со своими производными.

Для произвольного $x \in \mathbb{R}^d$ определим квадратичную форму на $\mathbb{R}^d$ следующим образом:

$$Q_x(v) := \langle v, \sigma\sigma^*(x)v\rangle\,, \qquad v \in \mathbb{R}^d,$$

где σ^* – транспонированная матрица. Введем также двойственную форму с помощью преобразования Лежандра–Фенхеля:

$$\frac{1}{2}Q_x^*(v) := \sup_{y\in\mathbb{R}^d}\Big[\langle y,v\rangle - \frac{1}{2}Q_x(y)\Big].$$

Зададим функционал

$$I(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 Q^*_{\varphi_s}\big(\dot\varphi_s - b(0,\varphi_s)\big)\,ds, & \text{если } \varphi \text{ абсолютно непрерывна},\\ +\infty & \text{иначе}. \end{cases} \tag{2.14}$$

Если квадратичная форма Q_x вырождена, то $I(\varphi)$ может принимать бесконечные значения и для абсолютно непрерывных φ.

Обозначим $\boldsymbol{C}_d^x[0,1] := \big\{\varphi \in \boldsymbol{C}_d[0,1] : \varphi(0) = x\big\}$.

Распределения семейства диффузионных процессов $\{X^\varepsilon\}_{\varepsilon\geqslant 0}$ удовлетворяют при $\varepsilon \to 0$ ПБУ на $\boldsymbol{C}_d^x[0,1]$ с функционалом действия $I(\varphi)$.

Доказательство имеется, например, в [107, гл. 3, теорема 2.13], [17, гл. 5, § 3], [157]. В работах [107], [110], [111], [157] установлен ПБУ для более общих диффузий, когда коэффициенты имеют вид $\sigma(t,X_t^\varepsilon)$, $b(t,\varepsilon,X_t^\varepsilon)$, но при условии невырожденности Q_x. В статье [111, с. 302] доказано такое утверждение, аналогичное теореме 2.2 и следствию 2.1.

Теорема 2.5. *Пусть X^ε – диффузионный процесс, удовлетворяющий (2.13), причем квадратичная форма Q_x невырождена. Тогда для любого открытого выпуклого множества G в пространстве $\boldsymbol{C}_d^x[0,1]$ имеет место равенство*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\log\mathsf{P}\{X^\varepsilon \in G\} = -\inf_{\varphi\in G} I(\varphi).$$

Точные асимптотики континуальных интегралов для диффузионных процессов исследованы в работах [34], [109]–[111], [116], [119], [123], [133]. Мы остановимся подробнее на этих результатах в § 5.2.

Укажем еще несколько содержательных разделов (среди других) теории вероятностных мер, где ПБУ играет важную роль.

Принцип больших уклонений для эмпирических мер (и, вообще, в статистике). См. теорему 4.1 в [207, § 4], где выписан вид функционала действия, а также [12], [13], [36], [52], [57], [58], [80], [112], [147], [170], [194].

Принцип больших уклонений для распределений статистической физики. См. [76], [123], [145], [150], [168], [172], [188], [189], [297], [303].

Принцип больших уклонений для граничных задач теории случайных блужданий. См. [10], [33], [50], [54].

Принцип больших уклонений для винеровского хаоса. См. [225], [226, § 5].

Принцип больших уклонений, исчисление Маллявена и асимптотики осциллирующих интегралов. См. [101], [133], [187], [253], [283].

Дальнейшее развитие теории Вентцеля–Фрейдлина, [17], осуществлено в работах [122], [162], [181]–[185], [209], [245].

Другие примеры и направления исследований могут быть найдены в [17], [51], [63], [82], [115], [121], [138], [144], [153], [154], [200], [221], [238], [260], [271], [280], [303].

3. Точные асимптотики гауссовских интегралов в банаховых пространствах: Метод Лапласа

Здесь мы займемся рассмотрением асимптотик континуальных интегралов (1.3) для гауссовских мер P. Метод Лапласа для нахождения точной асимптотики интегралов (1.3) с $D = H$ – гильбертовым пространством и гауссовской мерой P впервые математически точно в достаточно общей форме разработан в статьях [167]. Пионерскими работами в этой области являются публикации [158], [261], [247], где к исследованию интегралов по винеровской и гауссовской мерам в пространстве $C[0,1]$ был применен непосредственный асимптотический анализ, включающий в неявной форме основные положения метода Лапласа. Далее метод Лапласа был развит в статьях [90], [174], [176] для нахождения точной асимптотики гауссовских мер $\mathsf{P}(uD)$, определенных на банаховом пространстве при $u \to \infty$ и некоторых ограничениях на P и D. Как оказалось, подход статей [167, I] и [176] позволяет найти точные асимптотики широкого класса интегралов $J_u(D)$ (см. § 3.3 ниже).

Сейчас мы перейдем к изложению результатов работ [167], [174], [176] (и некоторых обобщений) имея целью демонстрацию принципов и эффективности метода Лапласа для гауссовских интегралов в банаховом пространстве. Отметим, что изложенные ниже в этом разделе утверждения допускают обобщения на негауссовские меры, см. § 4.1, 4.2, 5.1, 5.2.

Итак, пусть $\mathsf{P} \equiv \mathsf{P}_A$ – гауссовская мера, определенная на борелевской σ-алгебре действительного сепарабельного банахова пространства $(B, \|\cdot\|)$ со средним нуль и ковариационным оператором A, см. пример 2.4.

Нижеследующие эвристические рассуждения хотя и лишены строгости, тем не менее объясняют природу вводимых далее понятий.

Представим формально, по аналогии с конечномерным случаем, элемент интегрирования $d\mathsf{P}_A(ux)$ в интеграле (1.3) в виде

$$d\mathsf{P}_A(ux) = \exp\biggl\{-\frac{u^2}{2}\,\langle x, A^{-1}x\rangle\biggr\}dx,$$

где A^{-1} – обратный оператор к A (определение которого из-за возможной многозначности A нуждается в уточнении), а dx – несуществующая трансляционно-инвариантная мера в B. Тогда интеграл $J_u(D)$, $D \subset B$, запишется в следующей форме:

$$J_u(D) = \int_D f(x)\exp\biggl\{-u^2\Bigl(F(x) + \frac{1}{2}\,\langle x, A^{-1}x\rangle\Bigr)\biggr\}dx,$$

где функционал

$$G(x) := F(x) + \frac{1}{2}\left\langle x, A^{-1}x \right\rangle, \tag{3.1}$$

называемый (евклидовым) действием, имеет уже неформальный смысл. Оказывается, что, как и для интегралов Лапласа в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$, точная асимптотика интеграла $J_u(D)$ при $u \to \infty$ определяется поведением функционала G вблизи его точек минимума на D. Данное утверждение конкретизируется в рассмотренных ниже ситуациях.

§ 3.1. Метод Лапласа для гауссовских интегралов, взятых по всему гильбертову пространству: Изолированные точки минимума [167, I]

Рассмотрим интеграл $J_u = J_u(H)$, где областью интегрирования является действительное сепарабельное гильбертово пространство H со скалярным произведением $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ и нормой $\|\cdot\|$. Сформулируем условия, при которых верен наш результат.

(A1) *Пусть ковариационный оператор A гауссовской меры P_A инъективен.*

Тогда гильбертово пространство H_A, ассоциированное с оператором A (см. пример 2.4) может быть задано так (см. [146, с. 32]): $H_A = \sqrt{A}\,H = \left\{\sqrt{A}\,x : x \in H\right\}$ со скалярным произведением

$$\langle x, y\rangle_A := \left\langle A^{-1/2}x, A^{-1/2}y\right\rangle$$

и нормой $\|x\|_A := \langle x, x\rangle_A^{1/2}$, где $\sqrt{A}$ – квадратный корень из оператора A, $A^{-1/2}$ – обратный оператор к $\sqrt{A}$. Функционал действия $I(x)$ гауссовской меры P_A задается как в (2.11):

$$I(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\|x\|_A^2, & \text{если } x \in H_A, \\ +\infty, & \text{если } x \in H \setminus H_A. \end{cases}$$

Определим теперь функционал G следующим образом:

$$G(x) := F(x) + I(x). \tag{3.2}$$

Если $x \in \operatorname{Dom}(A^{-1})$ (здесь и далее $\operatorname{Dom}(A)$ – область определения оператора A), то $G(x)$ примет вид (3.1).

(A2) *Пусть функционалы f и F из* (1.3) *бесконечно дифференцируемы по Фреше на всем H, и существуют такие константы $b_1 > 0$, $b_2 \geqslant 0$, $0 \leqslant b_3 < 1/(2\|A\|)$, $b_4 \geqslant 0$, что*

$$\text{(a)}\quad |f(x)| \leqslant b_1 \exp(b_2\|x\|^2), \quad \text{(b)}\quad F(x) \geqslant -b_3\|x\|^2 - b_4, \qquad x \in H. \tag{3.3}$$

(A3) *Предположим, что функционал $G(x)$, определенный в* (3.2), *имеет на H единственную точку минимума x_0.*

Ниже G' и G'' обозначают первую и вторую производные по Фреше функционала G, при этом мы рассматриваем G' как элемент H, а G'' – как непрерывный линейный оператор из H в H.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* (A1)–(A3), *и точка* x_0 *невырождена в том смысле, что* $\mathscr{K} := \ker(G''(x_0)) = \{0\}$. *Тогда оператор* $C := [G''(x_0)]^{-1}$ *существует и является ковариационным оператором некоторой гауссовой меры* P_C *на* H *со средним нуль. Имеет место следующее асимптотическое разложение при* $u \to \infty$:

$$\exp\{u^2\, G(x_0)\}\, J_u \sim \sum_{j\geqslant 0} \biggl(\int a_j(x)\, d\mathsf{P}_C(x)\biggr) u^{-2j}, \tag{3.4}$$

где $a_j(x)$ – *некоторые функционалы, явно вычислимые в терминах* A *и производных по Фреше функций* f *и* F *в точке* x_0.

В частности, главный член разложения (3.4) *равен*

$$\Delta^{-1/2} f(x_0),$$

где $\Delta := \det(I + AF''(x_0))$ – *детерминант, корректно определенный для ядерного оператора* $AF''(x_0)$ [24], *причем* $\Delta > 0$.

Если $f \equiv 1$, *то*

$$\exp\{u^2\, G(x_0)\}\, J_u = \Delta^{-1/2}\biggl[1 + \frac{1}{u^2}\biggl\{\frac{1}{2(3!)^2} d_3^2 - \frac{1}{4!} d_4\biggr\} + O\biggl(\frac{1}{u^4}\biggr)\biggr],$$

где $d_j := \displaystyle\int D^j F(x_0) x^j\, d\mathsf{P}_C(x)$, D^j – *оператор взятия* j*-й производной по Фреше.*

В статье [167, I] рассмотрены также случаи вырождения оператора $G''(x)$ различая при этом *"просто вырожденный"* случай, когда нуль-пространство $\mathscr{K}$ одномерно, $\dim \mathscr{K} = 1$, и случай *"кратного вырождения"*, когда $\dim \mathscr{K} > 1$. (В [167, I] доказано, что подпространство $\mathscr{K}$ всегда конечномерно.) Приведем соответствующее утверждение для просто вырожденного случая.

Пусть x_0 – просто вырожденная точка минимума. Пусть $\mathscr{K}^\perp$ обозначает подпространство, перпендикулярное к $\mathscr{K}$, и τ – оператор ортогонального проектирования на $\mathscr{K}^\perp$, $e \in \mathscr{K}$ – единичный вектор. Определим функционал $F_3\colon H \to H$ следующим соотношением:

$$F_3(x) := F(x + x_0) - F(x_0) - \bigl\langle F'(x_0), x\bigr\rangle - \frac{1}{2}\bigl\langle F''(x_0)x, x\bigr\rangle. \tag{3.5}$$

По причине простой вырожденности точки x_0 оператор $\tau G''(x_0)\tau$ обратим на $\mathscr{K}^\perp$ с обратным оператором, обозначенным через $C_\perp$. По теореме о неявной функции соотношение

$$\Phi = -C_\perp\, \tau F_3'(v + \Phi)$$

определяет для всех $v \in H$ с достаточно малой нормой единственную C^∞-дифференцируемую $\mathscr{K}^\perp$-значную функцию $\Phi(v)$.

Далее, представим произвольный элемент $x \in H$ в виде

$$x = ze + \Phi(ze) + y,$$

где $z := \langle x, e\rangle$, $y \in \mathscr{K}^{\perp}$. Введем еще одно условие.

(A4) *Пусть для некоторого целого $k = k(x_0) \geqslant 4$ и достаточно малых z выполнено*

$$G\bigl(x_0 + ze + \Phi(ze)\bigr) = G(x_0) + \lambda z^k + O(z^{k-1}),$$

где $\lambda = \lambda(x_0) > 0$.

(Показатель k указывает на степень вырождения точки x_0 и в действительности является четным числом.)

Теорема 3.2. *Пусть точка x_0 – просто вырожденная и выполнены условия* (A1)–(A4) *с $k < \infty$. Тогда оператор $\tau G''(x_0)\tau$ обратим на $\mathscr{K}^{\perp}$ с обратным оператором $C_{\perp}$, являющимся ковариационным оператором некоторой гауссовой меры $\mathsf{P}_{C_\perp}$ на $\mathscr{K}^{\perp}$ со средним нуль. Имеет место асимптотическое разложение при $u \to \infty$:*

(3.6)

$$\exp\{u^2\, G(x_0)\}\, J_u \sim u^{1-2/k} \sum_{j\geqslant 0} \biggl\{ \int_{\mathbb{R}\times\mathscr{K}^{\perp}} a_j(z,x) \exp\{-\lambda z^k\}\, dz\, d\mathsf{P}_{C_\perp}(x) \biggr\} u^{-2j/k},$$

где $a_j(z,x)$ – некоторые функционалы.

В частности, главный член разложения (3.6) *равен*

$$u^{1-2/k}[2\pi\,\langle Ae, e\rangle\, \Delta_1]^{-1/2} f(x_0) \int_{\mathbb{R}} \exp(-\lambda z^k)\, dz,$$

где $\Delta_1 := \det\bigl(I + \tau\rho A\rho\tau F''(x_0)\tau\bigr)$ и ρ – ограниченный оператор на H, определяемый таким образом: $\rho x := x - \bigl[\langle Ae, x\rangle \,/\, \langle Ae, e\rangle\bigr] e$; Δ_1 корректно определено и $\Delta_1 > 0$.

В статье [167, I] приведен также (довольно громоздкий) вид двух первых членов разложения (3.6), когда $f \equiv 1$ и $k = 4$. Там же указано, как следует трактовать случай кратного вырождения точки минимума x_0, и отмечена связь теоремы 3.2 с одной задачей вычисления точной асимптотики фейнмановского интеграла, рассмотренной в работе [263, § 15, Notes]. В [167, I] теоремы 3.1 и 3.2 использованы для вывода результатов типа закона больших чисел и центральной предельной теоремы для последовательности вероятностных мер

$$\mu_n(C) := J_{\sqrt{n}}(C)/J_{\sqrt{n}}(H), \qquad f \equiv 1, \quad C \text{ – борелевское в } H, \quad n = 1, 2, \dots,$$

важных в статистической механике.

Замечание 3.1. Если вместо требований, наложенных в условии (A2), функционалы f и F ограничены, непрерывны на H, дифференцируемы по Фреше в точке x_0, соответственно, $s-2$ и s раз, то (при выполнении остальных условий) разложения (3.4), (3.6) останутся справедливыми, если суммирование в них ведется по j от $j = 0$ до $j = s - 2$.

Замечание 3.2. Если минимум функционала G на H достигается в конечном числе точек $x_1, \dots, x_m$, невырожденных или просто вырожденных, то асимптотическое разложение для $\exp\{u^2 \min_{x\in H} G(x)\} J_u$ выписывается как сумма правых частей формул (3.4) и (3.6), вычисленных для точек x_i, $i = 1, \dots, m$, согласно типу вырождения x_i.

Замечание 3.3. Результат для винеровской меры на пространстве $C[0,1]$, аналогичный теореме 3.1, получен в работе [18, § 5.1] на основе принципа больших уклонений для марковских случайных процессов (см. пример 2.2 в разделе 2), имеющего, как отмечалось выше, много общего с методом Лапласа. Вообще, утверждение теоремы 3.1 может быть почти дословно переформулировано для общих гауссовских мер в банаховых пространствах. Доказательство здесь проводится по тому же методу (Лапласа), что и в [167, I] (ср. с [167, II, § 6] и § 3.3 ниже).

Приведем теперь некоторые утверждения, являющиеся базисными для метода Лапласа для гауссовских мер в гильбертовом пространстве. Эти утверждения доказаны в статье [167, I] и допускают обобщение на случай сепарабельного банахова пространства, о чем будет сказано ниже в § 3.3.

Лемма 3.1 (о точках минимума и логарифмической асимптотике). *Пусть F удовлетворяет неравенству* (3.3) (b). *Тогда множество $\mathscr{M}$ точек минимума функционала G на H не пусто. Если x_0 – точка минимума, то $x_0 \in \mathrm{Dom}(A^{-1})$,*

$$G'(x_0) = F'(x_0) + A^{-1}x_0 = 0,$$

и

$$\lim_{u\to\infty} \frac{1}{u^2} \log \int \exp\{-u^2 F(x)\}\, d\mathsf{P}_A(ux) = -G(x_0).$$

Кроме того, множество $\mathscr{M}$ компактно.

Следующие ниже две леммы сформулированы для единственной невырожденной точки минимума.

Обозначим $S(a,\delta) := \{x \in H : \|x - a\| < \delta\}$.

Лемма 3.2 (о выделении малой окрестности точки минимума). *Пусть выполнены условия* (A1), (A3), *и функционалы f и F удовлетворяют неравенствам* (3.3). *Тогда для любого $\delta > 0$ найдется такое $c = c(\delta) > 0$, что*

$$\exp(u^2 G(x_0)) \int_{H\setminus S(x_0,\delta)} f(x) \exp\{-u^2 F(x)\}\, d\mathsf{P}_A(ux) = O(e^{-u^2 c}).$$

Лемма 3.3 (об абсолютно непрерывном сдвиге). *Для любого $\delta > 0$ имеет место равенство*

$$\exp(u^2 G(x_0)) \int_{S(x_0,\delta)} f(x) \exp\{-u^2 F(x)\}\, d\mathsf{P}_A(ux) = \Delta^{-1/2} \int_{S(0,\delta)} f(x + x_0) \exp\{-u^2 F_3(x)\}\, d\mathsf{P}_C(ux), \tag{3.7}$$

где Δ *и* C *определены в теореме* 3.1, *а* F_3 – *в равенстве* (3.5).

Дальнейший асимптотический анализ интеграла в правой части (3.7) для вывода разложения (3.4) носит технический характер. Этот анализ основан на разложениях Тейлора функций f и F_3, оценке остаточных членов и аккуратно выполнен в [167, I]. Доказательство разложения (3.6) базируется на представлении H в виде $H = \mathscr{K} \oplus \mathscr{K}^\perp$ и условии (A4) и проводится по схеме доказательства теоремы 3.1 с $\mathscr{K}^\perp$ в роли H.

§ 3.2. Метод Лапласа для гауссовских интегралов в гильбертовом пространстве: Многообразие точек минимума [167, II]

Пусть теперь множество точек минимума функционала G на гильбертовом пространстве H является гладким многообразием M (компактным по лемме 3.1). Такая постановка задачи в асимптотическом анализе гауссовских континуальных интегралов возникает в теоретической физике в связи с "проблемой нулевого уровня" ("zero mode problem") [287]. При исследовании этой проблемы приходится сталкиваться с ситуацией, когда для любой точки $x \in M$ имеет место:

$$G''(x)v = 0 \quad \text{для всех} \quad v \in M_x, \tag{3.8}$$

где M_x обозначает касательное пространство к M в точке x.

Мы будем предполагать, по-прежнему, что

(A1) *Ковариационный оператор* A *инъективен*;

(B1) *Функции* f *и* F C^∞*-дифференцируемы по Фреше на* H, f *ограничена, а* F *удовлетворяет неравенству* (3.3) (b).

Обозначим через $N_x := (M_x)^\perp$ ортогональное дополнение к M_x. Для преодоления эффекта вырождения (3.8) введем условие

Пусть многообразие M *невырождено в том смысле, что*

$$G''(x) > 0 \ \text{на}\ N_x \ \text{для всех}\ x \in M.$$

(*Знак ">0", примененный к оператору, указывает на строгую положительность данного оператора.*)

Нам понадобятся также следующие обозначения. Если V – подпространство H, а L – линейный оператор на H, то через L_V и L^V обозначим следующие линейные операторы на V:

$$L_V := \pi_V L \pi_V,$$
$$L^V := (\pi_V L^{-1} \pi_V)^{-1},$$

где π_V обозначает оператор ортогонального проектирования на V.

Ниже в качестве V будут выступать M_x и N_x.

Теорема 3.3. *Пусть M – множество точек минимума функционала G на H – является гладким невырожденным многообразием в H, и выполнены условия* (A1), (B1). *Тогда M конечномерно,* $\dim M = k < \infty$, *и верно следующее асимптотическое разложение при $u \to \infty$:*

$$\exp\Bigl\{u^2 \min_{x\in H} G(x)\Bigr\} J_u \sim u^k \sum_{j\geqslant 0}\biggl[\int_M \biggl\{\int_{N_x} d_j(x,z)\, d\mathsf{P}_{B(x)}(z)\biggr\} c(x)\, dV_M(x)\biggr] u^{-2j}, \tag{3.9}$$

где $\{d_j(x,z)\}$ являются некоторыми функционалами, $B(x) := (G''(x)_{N_x})^{-1}$ – ковариационный оператор гауссовой меры $\mathsf{P}_{B(x)}$ на N_x со средним нуль,

$$c(x) := \bigl[\det(2\pi A_{M_x}) \det\bigl(I + A^{N_x}(F''(x)_{N_x})\bigr)\bigr]^{-1/2},$$

и dV_M – k-мерный элемент объема на M.

Главный член разложения (3.9) *равен*

$$u^k \int_M f(x)c(x)\, dV_M(x).$$

Доказательство теоремы 3.3 проводится в духе доказательств теорем 3.1 и 3.2 и содержится в статье [167, II]. Там же рассмотрены частные случаи, когда M является однопараметрической кривой в H или многообразием, инвариантным относительно некоторой группы унитарных преобразований в H. В [167, II] также доказано, что разложение (3.9) справедливо и для некоторых гауссовских мер в пространстве $C[0,1]$, при этом метод доказательства незначительно отличается от примененного для вывода (3.9) и использует привлечение вспомогательного гильбертова пространства $L^2[0,1]$ (как, кстати, и в статье [166]).

§ 3.3. Метод Лапласа для гауссовских интегралов в банаховом пространстве [90], [174], [176]

Вернемся к случаю общего сепарабельного банахова пространства B и к обозначениям, введенным в начале раздела 3. Мы изложим результаты о точной асимптотике интегралов

$$J_u(D) := \int_D f(x) \exp\{-u^2 F(x)\}\, d\mathsf{P}_A(ux), \qquad u \to \infty, \tag{3.10}$$

при некоторых условиях гладкости на ∂D, f и F.

Интегралы подобного вида возникают в задачах статистической физики при исследовании последовательности мер

$$\mu_n(C) := J_{\sqrt{n}}(C)/J_{\sqrt{n}}(B), \qquad f \equiv 1, \quad C - \text{борелевское в } B$$

(см., например, [166, теорема 1.3], [167, I, теорема 2.5]).

Определим функционал действия $I(x)$ гауссовской меры P_A как в (2.11) и введем функционал $G(x) := F(x) + I(x)$ как в (3.2); напомним, что, если $x \in \mathrm{Dom}(A^{-1})$, то $I(x) = \frac{1}{2}\langle x, A^{-1}x\rangle$. Будем обозначать первую и вторую производные по Фреше числовой функции $S\colon B \to \mathbb{R}^1$ в точке x через $S'(x)$ и $S''(x)$, рассматривая эти производные как ограниченные линейные операторы из B в $\mathbb{R}^1$ и из B в B^* соответственно.

Введем в рассмотрение следующие условия.

(C1) *Ковариационный оператор A инъективен.*

(C2) *Функции f и F непрерывны и ограничены на D.*

(C3) *Борелевское множество D замкнуто и допускает представление $D = \{x \in B : Q(x) \geqslant 0\}$, где $Q(x)$ – непрерывная действительная функция такая, что или D или множество $B \setminus D$ представимо в виде конечного объединения непересекающихся выпуклых множеств из B. Пусть D имеет непустую внутренность и D не содержит нулевого элемента в B.*

(C4) *Функционал $G(x)$ достигает своего минимума на D в конечном числе точек $x^1, x^2, \dots, x^m$ из границы множества D, причем $f(x^i) \neq 0$, $i = 1, \dots, m$.*

(C5) *Функции F, Q дважды дифференцируемы по Фреше в окрестностях точек $x^1, x^2, \dots, x^m$, причем $\langle x^i, Q'(x^i)\rangle \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$. Пусть операторы $F''(x^i)$, $Q''(x^i)$, $i = 1, \dots, m$, инъективны. Пусть для каждого $i = 1, \dots, m$ собственные значения μ_k^i, $k = 1, 2, \dots, M_i$, $M_i \leqslant \infty$, оператора $\mathscr{C}_i := A[F''(x^i) - \lambda_i Q''(x^i)]\colon B \to B$ таковы, что конечен детерминант*

$$0 < \det \mathscr{B}_i := \prod_{k=1}^{M_i} (1 + \mu_k^i), \tag{3.11}$$

где

$$\lambda_i := \langle x^i, A^{-1}x^i + F'(x^i)\rangle \,/\, \langle x^i, Q'(x^i)\rangle, \qquad \mathscr{B}_i := I + \mathscr{C}_i,$$

I – тождественный оператор из B в B.

Замечание 3.4. Поскольку множество всех ядерных операторов, действующих на всем классе банаховых пространств, является операторным идеалом [75, с. 99], то оператор $\mathscr{C}_i$ – ядерный, отображающий B в B. Следовательно, $\mathscr{C}_i$ имеет не более, чем счетное множество собственных значений μ_k^i. Однако, в отличие от случая гильбертова пространства (ср. теоремы 3.1 и 3.2 выше), одной ядерности оператора $\mathscr{C}_i$ для конечности детерминанта (3.11), вообще говоря, недостаточно (см. [75, с. 445]), нужно требовать чуть большее, например, принадлежность $\mathscr{C}_i$ классу $\mathfrak{N}_{(1,2,1)}(B, B)$ [75, с. 445] (см. также [266]).

Теорема 3.4. *Пусть выполнены условия* (C1)–(C5). *Тогда $x^i \in \mathrm{Dom}(A^{-1})$, $i = 1, \dots, m$, и верно следующее асимптотическое соотношение при $u \to \infty$:*

$$\begin{aligned} J_u(D) &= \exp\{-u^2 G(x^1)\} \frac{1}{u\sqrt{2\pi}} \\ &\times \sum_{i=1}^m f(x^i) \bigl|\det \mathscr{B}_i \,\langle \mathscr{B}_i^{-1}(x^i + AF'(x^i)), A^{-1}x^i + F'(x^i)\rangle\bigr|^{-1/2} \bigl(1 + o(1)\bigr), \end{aligned} \tag{3.12}$$

где $\mathscr{B}_i^{-1}$ – обратный оператор к $\mathscr{B}_i$.

Следствие 3.1. *Пусть выполнены условия* (C1), (C3)–(C5) *с* $f \equiv 1$ *и* $F \equiv 0$. *Тогда* $x^i \in \mathrm{Dom}(A^{-1})$, $i = 1, \dots, m$, *и справедливо равенство при* $u \to \infty$:

$$\mathsf{P}_A(uD) = \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\left\langle x^1, A^{-1}x^1\right\rangle\right\}\frac{1}{u\sqrt{2\pi}} \times \sum_{i=1}^{m}\left|\det \mathscr{B}_i \left\langle \mathscr{B}_i^{-1}x^i, A^{-1}x^i\right\rangle\right|^{-1/2}\big(1+o(1)\big),$$

где $\mathscr{B}_i := I - \lambda_i AQ''(x^i)$, $\lambda_i := \left\langle x^1, A^{-1}x^1\right\rangle \big/ \left\langle x^i, Q'(x^i)\right\rangle$, $\det \mathscr{B}_i$ *определен в* (3.11) *с* μ_k^i *– собственными значениями оператора* $-\lambda_i AQ''(x^i)$.

Замечание 3.5. Теорема 3.4 и следствие 3.1 могут быть очевидным образом сформулированы и для гауссовской меры P_A^α с ненулевым средним $\alpha \in B$, поскольку $\mathsf{P}_A^\alpha(C) = \mathsf{P}_A(C - \alpha)$ для любого борелевского C. В частности, для множества D из условия (C3) имеем $\mathsf{P}_A^\alpha(uD) = \mathsf{P}_A(uD_1)$, где $D_1 = \left\{x \in B : Q_1(x) \geqslant 0\right\}$ с $Q_1(x) := Q(x+\alpha)$.

Теорема 3.4 доказана в [176] в предположении, что $f \equiv 1$ и $F \equiv 0$. Доказательство из [176] легко переносится на случай произвольных допустимых f, F и основано на методе Лапласа для гауссовских интегралов в банаховом пространстве. Сформулируем основные утверждения этого метода. В силу аддитивности интеграла и условия (C3) мы вправе предполагать, что у нас одна точка минимума x^1.

Лемма 3.4 (решение экстремальной задачи в D). *Точка минимума* x^1 *принадлежит* $\mathrm{Dom}(A^{-1})$ *и удовлетворяет равенству*

$$A^{-1}x^1 + F'(x^1) - \lambda_1 Q'(x^1) = 0.$$

Доказательство леммы проводится при помощи метода множителей Лагранжа [1, с. 252], дающего необходимые условия минимума функции $G(x)$ при ограничении $Q(x) \geqslant 0$ (подробности см. в [176]).

Лемма 3.5 (о логарифмической асимптотике гауссовского интеграла). *Имеет место соотношение*

$$\lim_{u\to\infty} u^{-2}\log\int_D \exp\{-u^2F(x)\}\,d\mathsf{P}_A(ux) = -\inf_{x\in D} G(x) = -\Big(F(x^1) + \frac{1}{2}\left\langle x^1, A^{-1}x^1\right\rangle\Big). \tag{3.13}$$

Доказательство. Определим семейство мер на B следующим образом:

$$\Lambda_u(C) := \int_C \exp\{-u^2F(x)\}\,d\mathsf{P}_A(ux).$$

Тогда, рассуждая как в [278, § 3], можно показать, что семейство мер Λ_u удовлетворяет принципу больших уклонений с функционалом действия $G(x)$ (свойство 3) в определении 2.1 доказано в [278]). Далее, первое равенство в (3.13) доказывается, как и следствие 2.1, с использованием выпуклости D (см. [146, утверждение (iv), с. 34]).

Отметим, что для $D = B$ соотношение (3.13) совпадает с (2.12), в котором нужно положить $F_n = F$, $\mu_n = \mu = \mathsf{P}_A$, $\alpha_n = n$, $n = u^2$.

Обозначим

$$\mathscr{V} = \mathscr{V}(x^1, \delta) := \{x \in D : \|x - x^1\| < \delta\}.$$

Лемма 3.6 (о выделении малой полуокрестности точки минимума). *Для любого $\delta > 0$ найдется такое $c = c(\delta) > 0$, что при $u \to \infty$ имеет место*

$$J_u(D) = J_u(\mathscr{V})\big(1 + O(e^{-u^2 c})\big).$$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 3.2.

Совершая в интеграле $J_u(\mathscr{V})$ преобразование $y = x - x^1$, получаем следующее утверждение (напомним, что $x^1 \in \mathrm{Dom}(A^{-1})$).

Лемма 3.7 (об абсолютно непрерывном сдвиге). *Имеет место равенство*

$$J_u(\mathscr{V}) = \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\left\langle x^1, A^{-1}(x^1)\right\rangle\right\} J_u^1,$$

где

$$J_u^1 := \int_{\mathscr{V}'(u)} f(y/u + x^1)\exp\big\{-u^2[F(y/u + x^1) + \langle y/u, A^{-1}x^1\rangle]\big\}\, d\mathsf{P}_A(y), \tag{3.14}$$
$$\mathscr{V}'(u) := \big\{z : \|z/u\| < \delta,\ z/u + x^1 \in D\big\}.$$

Доказательство леммы следует из теоремы 1.2 в [23, гл. 2], поскольку наша гауссовская мера P_A совпадает в силу леммы 4.7 из [23, гл. 1] с (абстрактной) винеровской мерой p_1, введенной в [23, гл. 1, §4].

Разлагая функции f и F в (3.14) по теореме Тейлора [1] в окрестности $\mathscr{V}'(u)$ и оценивая интегралы, содержащие остаточные члены, в духе работы [167, I, с. 460], убеждаемся в справедливости следующей леммы.

Лемма 3.8 (об оценивании остаточных членов). *Справедливо равенство*

$$J_u(\mathscr{V}) = \exp\{-u^2\, G(x^1)\} f(x^1) J_u^2\big(1 + o(1)\big),$$

где

$$J_u^2 := \int_{\mathscr{V}'(1)} \exp\left\{-u^2\big[\langle y, A^{-1}x^1 + F'(x^1)\rangle\big] - \frac{u^2}{2}\left\langle y, F''(x^1)y\right\rangle\right\} d\mathsf{P}_A(uy). \tag{3.15}$$

Привлечение вспомогательного банахова пространства последовательностей. Следующий шаг в доказательстве теоремы 3.4 связан с переходом в вспомогательное банахово пространство последовательностей, как это описано в [23, с. 114]. Возможность такого перехода позволила нам не предполагать наличия базисов Шаудера в пространствах B и B^* и уклониться от обсуждения сложного вопроса о представимости оператора A в диагональном виде (ср. с рассуждениями в [174] в случае гильбертова пространства B).

Итак, пусть $H_A \subset B$ – гильбертово пространство, ассоциированное с A (см. пример 2.4). Отождествляя по теореме Рисса сопряженное пространство H_A^* с H_A, получаем непрерывное вложение $B^* \subset H_A$. Выберем в H_A ортонормированный базис

$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, содержащийся в B^*, и определим линейное отображение $\theta\colon B\to\mathbb{R}^N$ (множество всех числовых последовательностей) равенством

$$\theta x = (\langle x, e_1\rangle, \dots, \langle x, e_n\rangle, \dots), \qquad x\in B.$$

Тогда сужение θ на H_A унитарно отображает H_A на стандартное гильбертово пространство последовательностей ℓ^2. Обозначим $\widehat{B} := \theta(B)$ и введем норму в $\widehat{B}$ равенством $\|\theta x\|_{\widehat{B}} = \|x\|$, $\theta x\in\widehat{B}$. Тогда θ – изометрическое отображение банахова пространства $(B, \|\cdot\|)$ на банахово пространство последовательностей $(\widehat{B}, \|\cdot\|_{\widehat{B}})$. Гауссовская мера $\mathsf{P}_A \equiv p_1$ на B при отображении θ перейдет в гауссовскую меру $\mathsf{P}_{\widehat{A}} = \mathsf{P}_A\circ\theta^{-1}$ на $\widehat{B}$ со средним нуль и ковариационным оператором $\widehat{A} = \theta A\theta^*$, где θ^* – сопряженный к θ оператор. Легко видеть (см. [23, с. 115]], что гауссова мера $\mathsf{P}_{\widehat{A}}$ совпадает с мерой-произведением $\nu = \prod_{k=1}^{\infty}\nu_k$ на банаховом пространстве $\widehat{B}$, где $\nu_k(dt) = (2\pi)^{-1/2}\exp(-t^2/2)\,dt$ – одномерные стандартные гауссовские меры. Под совпадением мер мы понимаем, что для любого борелевского множества C из $(\widehat{B}, \|\cdot\|_{\widehat{B}})$ имеет место равенство

$$\mathsf{P}_{\widehat{A}}(C) = \nu(C) = \int_{(z_1, z_2, \dots)\in C}\prod_{k=1}^{\infty}\nu_k(dz_k).$$

Далее, в силу отмеченной унитарности отображения θ, инъективности оператора A и всюду плотности H_A в $(B, \|\cdot\|)$ (см. замечание на с. 68 перед леммой 4.7 в [23, гл. 2]) имеем для любых $y\in B$, $x\in B^*$:

$$\langle y, x\rangle = \langle y, A^{-1}Ax\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} z_i v_i,$$

где

$$z = \theta y = (z_1, z_2, \dots), \qquad v = \theta Ax = (v_1, v_2, \dots).$$

Поэтому интеграл J_u^2 из (3.15) в результате замены переменной $z = \theta y$ примет вид

$$J_u^2 = \int_{\widehat{\mathscr{V}}}\exp\biggl\{-u^2\biggl[\sum_{i=1}^{\infty} z_i(z_i^1 + v_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{\infty} h_{ij} z_i z_j\biggr]\biggr\}\prod_{k=1}^{\infty} d\nu_k(u z_k), \tag{3.16}$$

где

$$z = (z_1, z_2, \dots), \qquad z^1 = \theta x^1 = (z_1^1, z_2^1, \dots),$$
$$\widehat{\mathscr{V}} = \bigl\{z\in\widehat{B} : \|z\|_{\widehat{B}} < \delta,\ \widetilde{Q}(z)\geqslant 0\bigr\}, \qquad \widetilde{Q}(z) := Q(\theta^{-1}z + x^1),$$
$$v := \theta AF'(x^1) = (v_1, v_2, \dots),$$
$$\mathscr{H} := \theta AF''(x^1)\theta^{-1} = (h_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$$

– непрерывный линейный оператор из $\widehat{B}$ в $\widehat{B}$. В силу того, что $\mathscr{H}$ действует в сепарабельном банаховом пространстве последовательностей, мы задаем его бесконечной матрицей.

Применение теоремы о неявной функции. Записывая переменную интегрирования $z = (z_1, z_2, \dots)$ в интеграле (3.16) в виде $z = (z_1, \widetilde{z})$, $\widetilde{z} = (z_2, z_3, \dots)$, получаем представление $\widehat{B}$ в виде декартова произведения $\widehat{B} = B_1 \times \widetilde{B}$, $z_1 \in B_1$, $\widetilde{z} \in \widetilde{B}$, где $\widetilde{B} = \{\widetilde{z} : (0, z_2, z_3, \dots) \in \widehat{B}\}$, $B_1 = \mathbb{R}^1$ (тривиальный случай $B_1 = \{0\}$ мы исключаем из рассмотрения). По теореме о неявной функции в банаховом пространстве (см., например, [1, с. 166]) найдутся такие окрестность $\widetilde{\mathscr{V}}$ нуля $\widetilde{0}$ в пространстве $\widetilde{B}$ (норма в последнем индуцирована нормой в $\widehat{B}$) и числовая функция $\varphi(\widetilde{z})$, заданная на $\widetilde{\mathscr{V}}$, что

$$\widehat{\mathscr{V}} = \{\widetilde{z} \in \widetilde{\mathscr{V}},\ \varphi(\widetilde{z}) \leqslant z_1 \leqslant \delta_1\}$$

для некоторого $\delta_1 > 0$, причем $\varphi(\widetilde{0}) = 0$ и $\widetilde{Q}(\varphi(\widetilde{z}), \widetilde{z}) \equiv 0$ при $\widetilde{z} \in \widetilde{\mathscr{V}}$.

Поэтому интеграл (3.16) можно записать в виде

(3.17)
$$J_u^2 = \int_{\widetilde{\mathscr{V}}} \left[\int_{\varphi(\widetilde{z})}^{\delta_1} \exp\left\{-u^2\left(\sum_{i=1}^{\infty} z_i(z_i^1 + v_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{\infty} h_{ij} z_i z_j\right)\right\} d\nu_1(uz_1)\right] \prod_{k=2}^{\infty} d\nu_k(uz_k).$$

Интегрирование по переменной z_1 в интеграле (3.17). Пусть $\Phi(t)$ обозначает стандартную одномерную гауссовскую функцию распределения. Следующие оценки хорошо известны:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,t}\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}(1 - t^{-2}) \leqslant 1 - \Phi(t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,t}\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}, \qquad t > 0.$$

Использование этих неравенств позволяет заменить внутренний интеграл в (3.17) по переменной z_1 асимптотически точными оценками сверху и снизу. Так мы приходим к следующему утверждению.

Лемма 3.9. *Имеет место асимптотическое равенство при $u \to \infty$:*

$$J_u^2 = \left(\sqrt{2\pi}u\right)^{-1} J_u^3\left(1 + O(u^{-2})\right),$$

где

$$(3.18)\quad J_u^3 := \int_{\widetilde{\mathscr{V}}} \psi(\widetilde{z}) \exp\{-u^2 S(\widetilde{z})\} \prod_{k=2}^{\infty} d\nu_k(uz_k),$$

$$\psi(\widetilde{z}) := \left[z_1^1 + v_1 + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{\infty} h_{1j} z_j + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{\infty} h_{i1} z_i + (h_{11} + 1)\varphi(\widetilde{z})\right]^{-1}, \quad \widetilde{z} \in \widetilde{\mathscr{V}},$$

$$S(\widetilde{z}) := \sum_{i=2}^{\infty} z_i(z_i^1 + v_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=2}^{\infty} h_{ij} z_i z_j$$
$$+ \left[z_1^1 + v_1 + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{\infty} h_{1j} z_j + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{\infty} h_{i1} z_i\right]\varphi(\widetilde{z}) + \frac{1}{2}(h_{11} + 1)\varphi^2(\widetilde{z}).$$

Применение результата типа теоремы 3.1 *к интегралу* (3.18). Как отмечалось в замечании 3.3 (и легко теперь понять почему), асимптотические формулы типа (3.4) справедливы и для гауссовских мер в сепарабельных банаховых пространствах. При этом изменения в формулировках необходимы самые незначительные. Поэтому мы вправе применить аналог теоремы 3.1 с учетом леммы 3.2 и замечания 3.1 к гауссовскому интегралу J_u^3 по малой окрестности нуля $\widetilde{0}$ в банаховом пространстве $\widetilde{B}$. Отметим, что функция $S(\widetilde{z})$ в показателе экспоненты достигает своего минимума на замыкании $\widetilde{\mathscr{V}}$ в одной точке $\widetilde{0}$. Из сказанного вытекает справедливость такой леммы (ради простоты обозначений считаем $z_1^1 + v_1 > 0$).

Лемма 3.10. *Имеет место асимптотическое равенство*

$$J_u^3 = (z_1^1 + v_1)^{-1} \big\| \det[\widetilde{I} + \widetilde{A} S''(\widetilde{0})] \big\|^{-1/2} \big(1 + o(1)\big),$$

где $\widetilde{I}$ – тождественный оператор в $\widetilde{B}$, $\widetilde{A}$ – сужение оператора $\widehat{A}$ на $\widetilde{B}$.

Применяя теперь формулу (3) из [1, с. 166] и равенство $\widetilde{Q}'(\widehat{0}) = (\theta^{-1})^* Q'(x^1)$ ($\widehat{0}$ – нуль пространства $\widehat{B}$) и преобразовывая определитель так же, как в аналогичной ситуации в [176], получаем в силу лемм 3.6–3.10 результат (3.12) сначала в пространстве $\widehat{B}$, а затем и в пространстве B, поскольку

$$\widehat{A} = \theta A \theta^*, \qquad z^1 = \theta x^1, \qquad \widetilde{Q}''(\widehat{0}) = (\theta^{-1})^* Q''(x^1) \theta^{-1}$$

(см. [1, с. 145]), умножение операторов везде означает суперпозицию.

§ 3.4. Точные асимптотики больших уклонений гауссовских норм

Для гауссовской меры P_A в банаховом пространстве $(B, \|\cdot\|)$ точная асимптотика $\mathsf{P}_A(\|x\| > u)$ при $u \to \infty$ исследовалась во многих работах [30], [44], [45], [53], [72], [90], [103], [156], [173]–[175], [196], [199], [202], [214], [233], [234], [254], [255], [273]. Среди методов, примененных для решения этой задачи, можно выделить следующие: метод преобразования Лапласа [30], [44], [196], [199], [202]; метод конечномерных аппроксимаций [254], [255]; метод, основанный на распределении супремума гауссовского процесса с бесконечномерным параметрическим множеством [156], [273]; метод двойной суммы [3], [72], [74], [175], и ряд других. Однако, оказалось, что для дважды дифференцируемой по Фреше нормы наиболее эффективным является метод Лапласа в форме, представленной в § 3.3 (следствие 3.1) [90], [173], [174].

Эффективность метода Лапласа заключается, во-первых, в том, что он указывает путь к относительно несложному вычислению констант в выражении для точной асимптотики гауссовской нормы, во-вторых, метод Лапласа применим и к гауссовским мерам с ненулевым средним (см. замечание 3.5), и, наконец, этот метод одинаково хорошо работает для диагональных и недиагональных ковариационных операторов. Отметим здесь, что требование независимости координат гауссовского вектора почти постоянно присутствует в работах по точным асимптотикам норм даже в конечномерных негильбертовых пространствах [30], [44], [156], [196], [199], [202], [233], [234], [254], [255].

Ниже мы приводим результаты о точных асимптотиках гауссовских норм в пространствах ℓ_k^p, ℓ^p, L^p. Что же касается пространства $C(K)$, K – компакт (возможно бесконечномерный), то sup-норма в нем только субдифференцируема, поэтому метод

Лапласа для $C(K)$ нуждается в дальнейшем развитии. Одной из возможных модификаций метода Лапласа здесь является метод двойной суммы, которому посвящена вторая глава данного обзора.

Разнообразная информация о свойствах распределений гауссовских норм содержится в работах [25], [42], [94], [134], [165], [203], [230], [285], [301]. Малые уклонения гауссовских распределений исследованы в работах [11], [23], [31], [32], [43], [86], [87], [211]–[214], [226, §7], [227]–[229], [241], [242], [269], [273], [274], [292]. Мы их здесь рассматривать не будем.

Точные асимптотики больших уклонений нормы гауссовского вектора в пространстве ℓ_k^p [173], [174]. Напомним, что ℓ_k^p – конечномерное банахово пространство с нормой

$$\|x\|_{p,k} := \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{1/p}, \qquad x = (x_1, \dots, x_k), \tag{3.19}$$

когда $p \geqslant 1$. При $1 > p > 0$ выражение (3.19) нормой не является.

Через $\operatorname{diag}(\dots)$ будем обозначать диагональную матрицу (возможно, бесконечную), по главной диагонали которой стоят числа, указанные в скобках.

Применение следствия 3.1 дает такой результат.

Теорема 3.5 [174]. *Пусть $(X_1, \dots, X_k)$ – гауссовский вектор со средним нуль и невырожденной ковариационной матрицей $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,k}}$. Пусть $z^1, z^2, \dots, z^m$ – точки из множества $Z := \{x : \|x\|_{p,k} = 1\}$, в которых достигается минимум:*

$$\min\{\langle x, A^{-1}x\rangle : x \in Z\} =: \sigma^{-2} > 0, \tag{3.20}$$

где $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ есть обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}^k$ и $z^i = (z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{ik})$.

(i) *Если $p > 2$, то мы имеем асимптотическое соотношение*

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}\left\{\left(\sum_{i=1}^{k} |X_i|^p\right)^{1/p} > u\right\} \\ &\quad= \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\,u}\sqrt{|p-2|}\sum_{i=1}^{k} |\det B_i|^{-1/2}\bigl(1 + O(u^{-2})\bigr), \qquad u \to \infty, \end{aligned} \tag{3.21}$$

где

$$B_i = I - (p-1)\sigma^{-2}\operatorname{diag}\bigl(|z_{i1}|^{p-2}, \dots, |z_{ik}|^{p-2}\bigr)A,$$

I – единичная матрица размера $k \times k$.

(ii) *Если $2 > p \geqslant 1$ и все координаты z_{ij} точки z^i ненулевые, то справедливо* (3.21).

(iii) *Если $1 > p > 0$, то $z_{ij} \neq 0$ и справедливо* (3.21).

Замечание 3.6. Из соображений двойственности (см. [78, гл. 3, §1, предложение 1.2]) имеем в обозначениях теоремы 3.5:

$$\sigma^2 = \sup\big\{\langle Ay, y\rangle : \|y\|_{q,k} \leqslant 1\big\} = \|A\|, \tag{3.22}$$

где $1/p+1/q=1$ и $\|A\|$ – норма A как линейного оператора из ℓ_k^q в ℓ_k^p. Переход в сопряженное пространство ℓ_k^q и метод двойных сумм в нем, использованные в [175, II, теорема 4.1], дают результат типа теоремы 3.5 в терминах точек, доставляющих максимум в (3.22), см. теорему 8.1 в главе II настоящего обзора.

Случай $p=2$ рассмотрен ниже в теореме 3.6 и замечании 3.8 к ней.

Утверждение, аналогичное теореме 3.5, может быть сформулировано и доказано на основе следствия 3.1 и для вероятности

$$\mathsf{P}\bigg\{\bigg(\sum_{i=1}^k |X_i+\alpha_i|^p\bigg)^{1/p} > u\bigg\},$$

с произвольными α_i, $i=1,\dots,k$ (см. замечание 3.5). Экстремальная задача с ограничением (3.20) в формулировке теоремы 3.5 допускает решение численными методами. Для диагональной ковариационной матрицы A эта задача на минимум решается просто. В нижеследующее утверждение случай $p=2$ включен ради полноты изложения.

Теорема 3.6 [173]. *Пусть в условиях теоремы* 3.5 $A=\operatorname{diag}(\sigma_1^2,\dots,\sigma_k^2)$, $\sigma_i \geqslant 0$, *и для некоторого* r, $1\leqslant r\leqslant k$,

$$\sigma_1^2 = \dots = \sigma_r^2 > \sigma_{r+1}^2 \geqslant \dots \geqslant \sigma_k^2 > 0. \tag{3.23}$$

Тогда в обозначениях теоремы 3.5 *имеем*:

(i) *Если* $p>2$, *то* $m=2r$, $\sigma=\sigma_1$, z^i *имеют вид* $(0,\dots,0,\pm1,0,\dots,0)$, *где* 1 *или* -1 *расположены на* j*-м месте*, $j=1,\dots,r$. *Справедливо соотношение*

$$\mathsf{P}\bigg\{\bigg(\sum_{i=1}^k |X_i|^p\bigg)^{1/p} > u\bigg\} = \exp\bigg(-\frac{u^2}{2\sigma_1^2}\bigg)\frac{2r\sigma_1}{\sqrt{2\pi}\,u}\big(1+O(u^{-2})\big), \qquad u\to\infty.$$

(ii) *Если* $p=2$, *то* $\sigma=\sigma_1$ *и минимум в задаче* (3.20) *достигается на* r*-мерном многообразии* $\big\{y\in\mathbb{R}^k : \sum_{i=1}^r y_i^2=1\big\}$. *Справедливо соотношение*

$$\mathsf{P}\bigg\{\bigg(\sum_{i=1}^k |X_i|^2\bigg)^{1/2} > u\bigg\} = \exp\bigg(-\frac{u^2}{2\sigma_1^2}\bigg)u^{r-2}\sigma_1^{2-r}2^{1-r/2}\Big[\Gamma\Big(\frac{r}{2}\Big)\Big]^{-1} \times \prod_{i=r+1}^k\bigg(1-\frac{\sigma_i^2}{\sigma_1^2}\bigg)^{-1/2}\big(1+O(u^{-2})\big), \qquad u\to\infty, \tag{3.24}$$

где $\Gamma(\,\cdot\,)$ – *гамма-функция.*

(iii) *Если* $2 > p > 0$, *то*

$$\sigma = \left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^{2p/(2-p)} \right)^{(2-p)/(2p)},$$

$m = 2^k$, *точки минимума* $z = (z_1, \dots, z_k)$ *в* (3.20) *имеют координаты* $z_i = \pm(\sigma/\sigma_i)^{-2/(2-p)}$, $i = 1, \dots, k$. *Имеет место соотношение*

$$\mathsf{P}\left\{ \left(\sum_{i=1}^{k} |X_i|^p \right)^{1/p} > u \right\} = \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2} \right) \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\, u}\, 2^k (2-p)^{(1-k)/2} \bigl(1 + O(u^{-2})\bigr), \qquad u \to \infty.$$

Замечание 3.7. Доказательство теоремы 3.6, приведенное в [173], основано на конечномерном варианте следствия 3.1, который, по существу, совпадает с теоремой 4.5 из [91, гл. 2] (где излагается метод Лапласа в $\mathbb{R}^k$, случай граничной точки минимума). Для доказательства утверждения (ii) теоремы 3.6 потребовалось преобразовать соответствующий k-мерный интеграл в $(k - r + 1)$-мерный, к которому уже применимо следствие 3.1.

Замечание 3.8. Вследствие возможности приведения ортогональным преобразованием в $\ell_k^2 = \mathbb{R}^k$ ковариационной матрицы A к диагональной форме, утверждение (ii) теоремы 3.6 допускает такое обобщение:

Пусть в условиях теоремы 3.5 *матрица* A *имеет собственные значения* (3.23). *Тогда верно* (3.24) (*см.* [173]).

Точные асимптотики больших уклонений нормы гауссовского элемента в пространстве ℓ^p [44], [90]. Пусть теперь

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}, \qquad x = (x_1, \dots, x_k, \dots).$$

Тогда $\ell^p := \bigl\{x : \|x\|_p < \infty\bigr\}$ – банахово пространство при $p \geqslant 1$ с нормой $\|\cdot\|_p$, которая дважды дифференцируема по Фреше при $p \geqslant 2$ [141]. Применим следствие 3.1 к множеству D с функцией $Q(x) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p - 1$, которая имеет такие производные по Фреше при $p > 2$ [141, с. 887]:

$$Q'(x) = \bigl(p|x_k|^{p-1} \operatorname{sign} x_k\bigr)_{k=1}^{\infty} \in \ell^q,$$
$$Q''(x) = p(p-1)\operatorname{diag}\bigl(|x_1|^{p-2}, |x_2|^{p-2}, \dots\bigr) \colon \ell^p \to \ell^q, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Теорема 3.7 [90]. *Пусть* $X = (X_1, X_2, \ldots)$ – *гауссовский элемент в* ℓ^p, $p > 2$, *имеющий среднее нуль и невырожденный ковариационный оператор* $A\colon \ell^q \to \ell^p$, $1/p + 1/q = 1$, *представимый в виде матрицы*

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \mathsf{E} X_i X_j, \qquad i, j = 1, 2, \ldots$$

(*см.* [15, с. 261]). *Пусть* $z^1, z^2, \ldots, z^m$ – *точки из множества* $Z := \{x : \|x\|_p = 1\}$, *в которых достигается минимум*:

$$\min\bigl\{\langle x, A^{-1}x\rangle : x \in Z\bigr\} =: \sigma^{-2} > 0,$$

где $z^i = (z_{i1}, z_{i2}, \ldots)$.

Тогда имеет место асимптотическое соотношение

$$\mathsf{P}\bigl\{\|X\|_p > u\bigr\} = \exp\biggl(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\biggr)\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\,u}\sqrt{p-2}\sum_{i=1}^{k} |\det B_i|^{-1/2}\bigl(1 + o(1)\bigr), \qquad u \to \infty,$$

при условии, что $0 < |\det B_i| < \infty$, *где*

$$B_i = I - (p-1)\sigma^{-2} A \operatorname{diag}\bigl(|z_{i1}|^{p-2}, |z_{i2}|^{p-2}, \ldots\bigr), \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

I – *единичная бесконечная матрица.*

Доказательство теоремы 3.7 просто выводится с помощью следствия 3.1, в обозначениях которого $\lambda_i = p/\sigma^2$,

$$\bigl\langle B_i^{-1} z^i, A^{-1} z^i\bigr\rangle = \sigma^{-2}/(2-p), \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Отметим, что здесь также справедливы равенство типа (3.22) и замечания, приведенные после теоремы 3.5.

Теорема 3.8. (i) *Пусть* $\mathrm{X} = (X_1, X_2, \ldots)$ – *гауссовский элемент в* ℓ^p, $p > 2$, *со средним нуль и независимыми координатами*,

$$\mathsf{E} X_i X_j = 0, \quad i \neq j, \qquad \mathsf{E} X_i^2 = \sigma_i^2 > 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots,$$
$$A = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots).$$

Пусть для некоторого r, $1 \leqslant r < \infty$,

$$\sigma_1^2 = \cdots = \sigma_r^2 > \sigma_{r+1}^2 \geqslant \cdots > 0. \tag{3.25}$$

Тогда минимум выражения $\langle x, A^{-1}x\rangle$ *на множестве* $\{x \in \ell^p : \|x\|_p = 1\}$ *равен* σ_1^{-2} *и достигается в* $2r$ *точках* $(0, \ldots, 0, \pm 1, 0, \ldots)$, *где* 1 *или* -1 *расположены на* j*-м месте*, $j = 1, \ldots, r$. *Имеет место соотношение*

$$\mathsf{P}\bigl\{\|X\|_p > u\bigr\} = \exp\biggl(-\frac{u^2}{2\sigma_1^2}\biggr)\frac{2r\sigma_1}{\sqrt{2\pi}\,u}\bigl(1 + o(1)\bigr), \qquad u \to \infty.$$

(ii) *Пусть $X=(X_1,X_2,\ldots)$ – гауссовский элемент в ℓ^2 со средним нуль и невырожденным ковариационным оператором $A\colon \ell^2\to\ell^2$, представимым в виде матрицы $A=(a_{ij})$, $a_{ij}=\mathsf{E}X_iX_j$, $i,j=1,2,\ldots$. Пусть компактный симметричный положительный оператор A имеет собственные значения* (3.25). *Тогда минимум выражения $\langle x,A^{-1}x\rangle$ на множестве $\bigl\{x\in\ell^2:\|x\|_2=1\bigr\}$ равен σ_1^{-2} и достигается на r-мерном многообразии $\bigl\{y\in\ell^2:\sum_{i=1}^r y_i^2=1\bigr\}$. Справедливо соотношение*

$$\mathsf{P}\bigl\{\|X\|_2>u\bigr\}=\exp\biggl(-\frac{u^2}{2\sigma_1^2}\biggr)u^{r-2}\sigma_1^{2-r}2^{1-r/2}\biggl[\Gamma\Bigl(\frac{r}{2}\Bigr)\biggr]^{-1}\times\prod_{i=r+1}^{\infty}\biggl(1-\frac{\sigma_i^2}{\sigma_1^2}\biggr)^{-1/2}\bigl(1+o(1)\bigr),\qquad u\to\infty.$$

Утверждение (i) этой теоремы доказывалось разными методами в работах [44], [45], [90], [156], [234], [254], [255], в то время как пункт (ii) рассматривался в [30], [45], [174], [196], [202], [234]. Случай гауссовской меры с ненулевым средним в ℓ^p, $p\geqslant 2$, изучался в [202], [234], [298]. Метод Лапласа применялся в [174] для пункта (ii) с $r=1$ и в [90]. Утверждение (ii) и в случае $r>1$ допускает доказательство на основе метода Лапласа (ср. теорему 3.3 и замечание 3.8).

Ситуация в пространстве ℓ^p при $1\leqslant p<2$ намного сложнее даже для диагонального оператора A, что объясняется следующей структурой точек минимума.

Лемма 3.11 [156, с. 119]. *В условиях теоремы* 3.8 (i) *минимум выражения $\langle x,A^{-1}x\rangle$ на множестве $\bigl\{x\in\ell^2:\|x\|_2=1\bigr\}$ равен σ^{-2} с*

$$\sigma=\biggl(\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i^{2p/(2-p)}\biggr)^{(2-p)/(2p)}$$

и достигается в бесконечном числе точек $z=(z_1,z_2,\ldots)$, где $z_i=\pm(\sigma/\sigma_i)^{-2/(2-p)}$, $i=1,2,\ldots$, берутся все возможные комбинации знаков “+” и “–”.

Здесь пока метод Лапласа в форме § 3.1–3.3 не применим. В [44] (см. также [301]) весьма искусным способом, основанном на преобразовании Лапласа и одном результате из [165] доказано такое утверждение.

Теорема 3.9 [44]. *Пусть $X=(X_1,X_2,\ldots)$ – гауссовский элемент в ℓ^p, $1\leqslant p<2$, со средним нуль и диагональным ковариационным оператором $A=\operatorname{diag}(\sigma_1^2,\sigma_2^2,\ldots)$. Тогда имеет место соотношение при $u\to\infty$:*

$$\mathsf{P}\bigl\{\|X\|_p>u\bigr\}=\exp\biggl\{-\frac{u^2}{2\sigma^2}\biggr\}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\,u}\sqrt{2-p}\,\prod_{i=1}^{\infty}\widehat{\mathscr{E}}\biggl(\frac{\sigma_i^pu^{2-p}}{\sigma^2}\biggr)\bigl(1+o(1)\bigr),$$

где σ – то же, что и в лемме 3.11,

$$\widehat{\mathscr{E}}(t):=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\exp\biggl\{-\frac{2-p}{2p}(tp)^{2/(2-p)}\biggr\}\int_0^\infty\exp\biggl\{ts^p-\frac{s^2}{2}\biggr\}ds.$$

Отметим следующие свойства функции $\widehat{\mathscr{E}}(t)$:

$\lim_{t\to\infty}\widehat{\mathscr{E}}(t)=2\big/\sqrt{2-p}$;

если $p=1$, то $\widehat{\mathscr{E}}(t)=2\Phi(t)$, где $\Phi(t)$, как и ранее, функция распределения одномерного стандартного нормального закона.

Приведем два примера из [44], проясняющих смысл теоремы 3.9.

Пример 3.1 (*показательное убывание дисперсий* σ_i^2). Пусть в условиях теоремы 3.9 $\sigma_i = \sigma_1 b^{1-i}$, $i = 1, 2, \dots$, где $\sigma_1 > 0$, $b > 1$. Обозначим $\beta = \log(2/\sqrt{2-p}\,)/(p \log b)$. Введем периодическую функцию $\chi\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ с периодом $p \log b$ формулой

$$\chi(s) = \exp(-\beta s) \prod_{i=1}^{\infty} \left[\widehat{\mathscr{E}}(\sigma_1^p b^{p(1-i)} \exp s) \frac{\sqrt{2-p}}{2} \widehat{\mathscr{E}}(\sigma_1^p b^{ip} \exp s) \right].$$

Тогда при $u \to \infty$ имеем

$$\mathsf{P}\bigl\{\|X\|_p > u\bigr\} = \exp\biggl\{-\frac{u^2}{2\sigma^2}\biggr\} u^{(2-p)\beta - 1} \frac{\sqrt{2-p}}{\sqrt{2\pi}\, p^\beta \sigma^{2\beta-1}} \chi\biggl(\log \frac{u^{2-p}}{p\sigma^2}\biggr)\bigl(1 + o(1)\bigr),$$

где σ – то же, что и в лемме 3.11.

Пример 3.2 (*степенное убывание дисперсий*). Пусть $\sigma_i = \sigma_1 i^{-b}$, $i = 1, 2, \dots$, где $\sigma_1 > 0$, $b > 1/p$. Обозначим

$$\beta = (pb)^{-1},$$
$$J = \int_0^\infty \log \widehat{\mathscr{E}}(s) s^{-\beta - 1}\, ds.$$

Тогда при $u \to \infty$ имеем

$$\mathsf{P}\bigl\{\|X\|_p > u\bigr\} = \exp\biggl\{-\frac{u^2}{2\sigma^2}\biggr\} \exp\biggl[\frac{J\sigma_1^{p\beta} u^{(2-p)\beta}}{p^{1+\beta} b \sigma^{2\beta}}\biggr] \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}\, u} (2-p)^{3/4} \bigl(1 + o(1)\bigr).$$

Большие уклонения нормы гауссовского элемента в пространстве L^p, $p \geqslant 2$ [90]. Пусть W и W_0 – распределения, соответственно, стандартного винеровского процесса $w(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, и броуновского моста $w_0(t) = w(t) - tw(1)$ в пространстве $L^p = L^p[0,1]$, норма в котором задается, как обычно, равенством

$$\|x\|_{L^p} := \biggl(\int_0^1 |x(t)|^p\, dt\biggr)^{1/p}.$$

Меры W (винеровская мера) и W_0 сосредоточены на пространстве $C[0,1]$, см., например, [23, гл. I, §3]. Применение следствия 3.1 дает такой результат.

Теорема 3.10 [90]. *Пусть* $p \geqslant 2$. *Тогда при* $u \to \infty$ *имеем*:
(i) $\mathsf{W}\bigl\{x \in L^p : \|x\|_{L^p} > u\bigr\} = \exp\biggl\{-\dfrac{u^2}{2\sigma^2}\biggr\} \dfrac{2\sigma}{u} \pi^{-3/4} \biggl[\Gamma\Bigl(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{p}\Bigr) \Big/ \Gamma\Bigl(1 + \dfrac{1}{p}\Bigr)\biggr]^{1/2} \bigl(1 + o(1)\bigr)$, *где*

$$\sigma = \Bigl(\frac{2}{p\pi}\Bigr)^{1/2} \Bigl(1 + \frac{p}{2}\Bigr)^{(p-2)/(2p)} \Gamma\Bigl(\frac{1}{2} + \frac{1}{p}\Bigr) \Big/ \Gamma\Bigl(1 + \frac{1}{p}\Bigr); \tag{3.26}$$

(ii) $\mathsf{W}_0\{x \in L^p : \|x\|_{L^p} > u\} = \exp\left\{-\dfrac{2u^2}{\sigma^2}\right\}\dfrac{\sigma}{u}\pi^{-3/4}\left[\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{p}\right)\Big/\Gamma\left(1+\dfrac{1}{p}\right)\right]^{1/2}(1+o(1))$,
где σ то же, что и в пункте (i).

Дадим набросок доказательства утверждения (i). Пусть $p > 2$. Уравнение для функции x, доставляющей минимум в задаче из условия (C4) (см. лемму 3.4), сводится к дифференциальному уравнению

$$\begin{cases} x''(t) = -\lambda p|x(t)|^{p-1}\operatorname{sign} x(t), \\ x(0) = x'(1) = 0. \end{cases}$$

Последнее имеет два решения, $x_1(t) \geqslant 0$ и $x_2(t) = -x_1(t)$. Из функционального уравнения для $x_1(t)$ (см. [90]) находим $\lambda = 1/(p\sigma^2)$, где σ имеет вид (3.26).

Уравнение для собственных значений μ оператора $AQ''(x_1)$ равносильно дифференциальному уравнению

$$\begin{cases} p(p-1)(x_1(t))^{p-2}z(t) = -\mu z''(t), \\ z(0) = z'(1) = 0. \end{cases}$$

Анализ этого уравнения приводит к собственным значениям

$$\mu_k = \frac{(p-1)\sigma^2}{2(k-1/2)(k-1+1/p)}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

собственные функции выражаются через полиномы Якоби.

Асимптотику в (i) при $p = 2$ можно получить после перехода в пространство ℓ^2 на основе теоремы 3.8 (ii), см. также [174, пример 1].

Утверждение (ii) доказывается схожим образом.

Большие уклонения L^p-нормы винеровского процесса со сносом исследованы в работе [294].

Точная асимптотика больших уклонений для винеровской меры в $C[0,1]$ изучалась в [53] (см. также § 7.4). В работе [53] доказано, что

$$\begin{aligned} &\mathsf{W}\{x \in C[0,1] : x(t) > uh(t),\ \varkappa \leqslant t \leqslant 1\} \\ &\quad = cu^{-1/3}\exp\left\{-\frac{u^2}{2}\int_0^1 (x_0'(t))^2\,dt - \nu u^{2/3}\int_\varkappa^1 |h''(t)|^{2/3}\,dt\right\}(1+o(1)), \qquad u \to \infty, \end{aligned}$$

при некоторых ограничениях на $h(t)$ и экстремальную функцию x_0; здесь $0 \leqslant \varkappa \leqslant 1$, c, ν – некоторые константы.

Подход в [53] использует принцип больших уклонений и некоторое абсолютно непрерывное преобразование винеровской меры, связанное с функцией Эйри.

Малые уклонения винеровской меры (в том числе в L^p) и их связь с большими уклонениями исследовались в [11].

4. Метод Лапласа для распределений сумм независимых случайных элементов со значениями в банаховом пространстве

Подход Эллиса–Розен [167] был обобщен в работах [137, I, II] на случай распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных элементов со значениями в сепарабельном банаховом пространстве. Точные асимптотики континуальных интегралов типа (1.3) при этом имеют вид схожий с асимптотиками, даваемыми формулами (3.4), (3.6) и (3.9), где в качестве гауссовской меры берется слабый (гауссовский по центральной предельной теореме) предел распределений нормированных сумм. Классификация возможных точек минимума функционала G, определенного в (3.2), та же, что и в разделе 3.

§ 4.1. Случай невырожденной точки минимума [137, I]

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных элементов со значениями в действительном сепарабельном банаховом пространстве $(B, \|\cdot\|)$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Пусть распределение μ элемента X_1 удовлетворяет условию Крамера:

(D1) $\displaystyle\int \exp\{t\|x\|\}\, \mu(dx) < \infty$ *для всех* $t > 0$,

и имеет среднее нуль:

(D2) $\displaystyle\int x\, \mu(dx) = 0$.

Функционал действия $I(x)$ меры μ определен в равенстве (2.7). Обозначим

$$M(x^*) := \int \exp\bigl(\langle y, x^*\rangle\bigr)\, \mu(dy), \qquad x^* \in B^*. \tag{4.1}$$

Пусть, по-прежнему, $G(x) = F(x) + I(x)$, где F – действительная непрерывная функция на B.

Мы будем предполагать также выполненными следующие условия.

(D3) *Функционал $G(x)$ имеет на B единственную точку минимума x_0.*

(D4) *Функция F три раза дифференцируема по Фреше на B и для некоторых констант $c_1, c_2 > 0$ выполнено $F(x) \geqslant -c_1 - c_2\|x\|$, $x \in B$.*

Определим меру

$$\nu(dx) := \frac{\exp\{-\langle x, F'(x_0)\rangle\}}{M(F'(x_0))}\, \mu(dx). \tag{4.2}$$

Лемма 4.1. *Мера ν имеет моменты всех порядков и среднее, равное x_0:*

$$\int x\, \nu(dx) = x_0.$$

Пусть $\nu_0(C) := \nu(C + x_0)$, C – борелевское множество в B. Тогда мера ν_0 имеет среднее нуль. Определим отображение $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ из B^* в B следующим образом: $\widehat{\varphi} = \displaystyle\int x\, \langle x, \varphi\rangle\ \nu_0(dx)$. Тогда $\langle \widehat{\varphi}, \psi\rangle$ есть ковариация φ и ψ относительно меры ν_0:

$$K(\varphi, \psi) := \int \langle x, \varphi\rangle\, \langle x, \psi\rangle\ \nu_0(dx).$$

Лемма 4.2. (i) *Для всех* $\varphi \in B^*$ *имеем* $K(\varphi,\varphi) \geqslant -\langle\widehat{\varphi}, F''(x_0)\widehat{\varphi}\rangle$

(ii) *Множество*

$$S := \left\{\varphi \in B^* : K(\varphi,\varphi) = -\left\langle\widehat{\varphi}, F''(x_0)\widehat{\varphi}\right\rangle\right\}$$

есть конечномерное подпространство в B^*.

В этом параграфе мы наложим следующее условие невырожденности точки минимума x_0 (ср. с условием невырожденности в теореме 3.1).

(D5) *Для всех* $\varphi{\in}B^*$ *с* $\widehat{\varphi} \neq 0$ *имеет место неравенство* $K(\varphi,\varphi){>}{-}\langle\widehat{\varphi}, F''(x_0)\widehat{\varphi}\rangle$.

Очевидно, если выполнено условие (D5), то подпространство вырождения S состоит из одного нуля.

Будем обозначать n-кратную свертку меры ν через ν^{*n}.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия* (D1)–(D5) *и*

(D6) *мера* ν *удовлетворяет центральной предельной теореме, т.е. мера* ν_n, *определенная как* $\nu_n(C) := \nu_0^{*n}(\sqrt{n}\,C)$, *слабо сходится при* $n \to \infty$ *к гауссовской мере* γ.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \exp(nG(x_0))\mathsf{E}\left[\exp\left(-nF\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)\right] = \int \exp\left(-\frac{1}{2}\left\langle x, F''(x_0)x\right\rangle\right)\gamma(dx). \tag{4.3}$$

Замечание 4.1. Гауссовский интеграл в правой части (4.3) равен выражению

$$[\det(I + AF''(x_0))]^{-1/2} \tag{4.4}$$

(A – ковариационный оператор меры γ) при условии, что последний детерминант положителен и конечен (см. замечание 3.4). Иное выражение для интеграла из (4.3) имеет вид

$$[\det(I + \Psi)]^{-1/2}, \tag{4.5}$$

где

$$\Psi = i^*F''(x_0)i \colon H \to H \tag{4.6}$$

– ядерный оператор (см. лемму 4.7 ниже), H – гильбертово пространство, ассоциированное с ковариационным оператором гауссовой меры γ (см. пример 2.4), i – отображение вложения H в B, i^* – сопряженное отображение. В связи с формулами (4.4) и (4.5) отметим, что $A = i^*i$ [23, гл. 3, §1]. Кроме того, найти собственные значения ядерного оператора $AF''(x_0)$ проще, чем собственные значения оператора Ψ, ср. с вычислениями в теореме 3.10.

Замечание 4.2. Условие (D6) выполнено в банаховых пространствах типа 2 [15, гл. 4], определение которых ради удобства читателя мы здесь напомним.

Определение 4.1. Банахово пространство $(B, \|\cdot\|)$ называется пространством *типа* 2, если найдется постоянная $\beta > 0$ такая, что для любой последовательности независимых одинаково распределенных центрированных случайных элементов $Y_1, \dots, Y_n$ мы имеем

$$\mathsf{E}\Big\|\sum_{i=1}^{n} Y_i\Big\|^2 \leqslant \beta \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\|Y_i\|^2.$$

Пространствами типа 2 являются гильбертово пространство (с $\beta = 1$) и пространства L^p, $2 \leqslant p < \infty$ (см. [198]). Достаточные условия для справедливости центральной предельной теоремы в иных пространствах (в том числе в $C(K)$) имеются, например, в [62], [106], [206], [232].

Доказательство теоремы 4.1 эксплуатирует как основные идеи метода Лапласа (использование свойств функционала действия, выделение окрестности точки минимума x_0), так и понятия, связанные с центральной предельной теоремой в банаховом пространстве. Мы вкратце опишем ключевые моменты доказательства теоремы 4.1, выясняя попутно значение условий (D5) и (D6).

Лемма 4.3. *Имеет место равенство*

$$I(x_0) = -\big\langle x_0, F'(x_0)\big\rangle - \log M(-F'(x_0)).$$

Равенство доказывается с помощью формулы обратного преобразования Лежандра (см. (4.1)) и условия (D3), которое позволяет заменить функцию $F(x)$ в выражении $\inf_{x\in B}(F(x) + I(x))$ на ее разложение Тейлора в окрестности точки x_0.

Обозначим для краткости $B^n = \underbrace{B \times B \times \dots \times B}_{n \text{ раз}}$, $\underline{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^n$, $s_n = s_n(\underline{\boldsymbol{x}}) = \sum_{i=1}^n x_i$, $\mu^n(d\underline{\boldsymbol{x}}) = \prod_{i=1}^n \mu(dx_i)$, аналогичный смысл имеет выражение $\nu^n(d\underline{\boldsymbol{x}})$. Тогда, с учетом леммы 4.3, имеем

$$\mathsf{E}\left[\exp\left(-nF\Big(\frac{S_n}{n}\Big)\right)\right] = \exp(-nG(x_0))J(n),$$

где

$$J(n) = \int \exp\big\{n[-F(s_n/n) + F(x_0) + \big\langle s_n/n - x_0, F'(x_0)\big\rangle]\big\}\,\nu^n(d\underline{\boldsymbol{x}}).$$

В духе нормировок центральной предельной теоремы разобьем все пространство B^n на три части:

$$\begin{aligned} A_1(c_1, n) &= \big\{\underline{\boldsymbol{x}} \in B^n : |s_n/n - x_0| \leqslant c_1\sqrt{n}\,\big\},\\ A_2(c_1, c_2, n) &= \big\{\underline{\boldsymbol{x}} \in B^n : c_1\sqrt{n} < |s_n/n - x_0| \leqslant c_2\big\},\\ A_3(c_2, n) &= \big\{\underline{\boldsymbol{x}} \in B^n : c_2 < |s_n/n - x_0|\big\}. \end{aligned}$$

Тогда интеграл $J(n)$ запишется в виде

$$J(n) = \int_{A_1} + \int_{A_2} + \int_{A_3} = I_1(c_1, n) + I_2(c_1, c_2, n) + I_3(c_2, n). \tag{4.7}$$

Используя разложение Тейлора в окрестности точки x_0 и центральную предельную теорему, несложно показать, что для всех c_1, кроме счетного их числа, имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} I_1(c_1,n) = \int_{|y|\leqslant c_1} \exp\Big\{-\frac{1}{2}\,\langle y, F''(x_0)y\rangle\Big\}\,\gamma(dy).$$

Устремляя в последнем равенстве c_1 к бесконечности, получаем интеграл в правой части равенства (4.3).

Два других интеграла из (4.7) дадут нулевой вклад в асимптотику.

Лемма 4.4. *Имеем*

$$\lim_{c_1\to\infty} \sup_n I_2(c_1,c_2,n) = 0$$

для достаточно малых c_2.

Доказательство леммы основано на следующем результате типа ПБУ, дающем необходимые экспоненциальные оценки (ср. с [291, §4]).

Теорема 4.2 [137, I]. *Для любого замкнутого* $C \subset B$

$$\limsup_{a\to\infty} \sup_{n,t}\Big\{\frac{1}{t}\log\nu_n(tC) : a\leqslant t\leqslant \sqrt{n}/a\Big\} \leqslant -\frac{1}{2}\inf\big\{\|x\|_H^2 : x\in C\big\},$$

где $(H, \|\cdot\|_H)$ – *гильбертово пространство, ассоциированное с ковариационным оператором гауссовой меры* γ (*см. пример* 2.4).

Лемма 4.5. *Имеем*

$$\lim_{n\to\infty} I_3(c_2,n) = 0 \quad \textit{для всех} \quad c_2>0.$$

При доказательстве леммы использованы стандартные оценки теории больших уклонений и следующее утверждение.

Лемма 4.6. *Пусть выполнено* (D1), *тогда*

$$I(x)/\|x\| \to \infty$$

равномерно при $\|x\|\to\infty$.

Замечание 4.3. Возьмем в качестве μ гауссовскую меру с нулевым средним. Тогда, очевидно, формула (4.3) дает асимптотику гауссовского интеграла в банаховом пространстве и эта асимптотика совпадает с асимптотикой, даваемой теоремой 3.1, в случае, когда $f\equiv 1$.

Замечание 4.4. Обобщение теоремы 4.1 на случай среднего

$$\mathsf{E}\Big[f\Big(\frac{S_n}{n}\Big)\exp\Big(-nF\Big(\frac{S_n}{n}\Big)\Big)\Big] \tag{4.8}$$

очевидно. В условиях теоремы 4.1 асимптотика среднего (4.8) будет выражаться как в (4.3), где правую часть нужно будет умножить на $f(x_0)$.

Замечание 4.5. По поводу случая индикаторной функции F, упомянутого на с. 170 работы [137, II], см. замечание 5.6.

§ 4.2. Вырожденная изолированная точка минимума и многообразие точек минимума [137, II]

Пусть выполнены условия (D1), (D3), (D4). Теперь мы рассмотрим случай нарушения условия (D5). Будем предполагать, все же, выполненным такое условие.

(D7) $K(\varphi, \varphi) \neq 0$ *для любого* $\varphi \neq 0$.

Обозначим через $d > 0$ размерность конечномерного подпространства вырождения S, введенного в лемме 4.2.

Определим также

$$\widehat{S} := \{\widehat{\varphi} \in B : \varphi \in S\}.$$

В силу условия (D7) размерность $\widehat{S}$ также равна d. Выберем базис $\{e_i\}_{i=1}^d$ в S такой, что

$$K(e_i, e_j) = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Определим отображения: $q\colon B \to \mathbb{R}^d$ следующим образом:

$$q(x) = \big(\langle x, e_1\rangle, \langle x, e_2\rangle, \dots, \langle x, e_d\rangle\big),$$

и $\lambda\colon \mathbb{R}^d \to [-\infty, 0]$ посредством

$$\lambda(t) = \sup\big\{-G(x + x_0) + G(x_0) : q(x) = t\big\}.$$

Положим

$$r(n) = \int_{|t| \leqslant 1} \exp\{n\lambda(t)\}\, dt$$

($|\cdot|$ здесь обозначает евклидову норму в $\mathbb{R}^d$).

Теорема 4.3. *Пусть B – банахово пространство типа 2, и пусть выполнены условия* (D1), (D3), (D4), (D7). *Предположим также, что*

(D8) *характеристическая функция меры μq^{-1} принадлежит L^p для некоторого $1 \leqslant p < \infty$.*

Тогда имеет место асимптотическое соотношение при $n \to \infty$:

(4.9)
$$\begin{aligned} Z_n &:= \mathsf{E}\Big[\exp\Big(-nF\Big(\frac{S_n}{n}\Big)\Big)\Big] \\ &= \exp\big(-nG(x_0)\big) n^{d/2} r(n) (2\pi)^{-d/2} \big[\det(I + \Psi_0)\big]^{-1/2} \big(1 + o(1)\big), \end{aligned}$$

где Ψ_0 есть сужение оператора Ψ из (4.6) *на подпространство H_0 – ортогональное дополнение $\widehat{S}$ в H.*

Дадим некоторые пояснения о величинах, входящих в (4.9).

Лемма 4.7.

(i) *Оператор Ψ, определенный в* (4.6) *является самосопряженным ядерным оператором с собственными значениями не превосходящими единицы.*

(ii) *$\widehat{S}$ есть собственное подпространство размерности d оператора Ψ, соответствующее собственному числу 1 ($\widehat{S} = \{0\}$, если 1 не является собственным числом – см.* § 4.1).

Лемма 4.8.

(i) $\lambda(t) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $t = 0$.
(ii) *Если* $c > 0$, *то* $\sup\{\lambda(t) : |t| \geqslant c\} < 0$.
(iii) $|\lambda(t)| = O(|t|^3)$ *при* $|t| \to 0$.
(iv) *Если* F *четыре раза дифференцируемо по Фреше, то* $|\lambda(t)| = O(|t|^4)$.
(v) $n^{d/4} r(n) = O(1)$ *при* $n \to \infty$.

Обозначим

$$d\mu_g = e^g \, d\mu \left(\int \exp(g) \, d\mu \right)^{-1}, \qquad g \in B^*.$$

Условие (D8) теоремы 4.3 нужно для того, чтобы случайные векторы, распределенные согласно мере $\mu_g q^{-1}$, удовлетворяли центральной предельной теореме равномерно по g из некоторой окрестности нуля.

Основная идея доказательства теоремы 4.3 заключается в переходе к условным распределениям:

$$Z_n = \int_{\mathbb{R}^d} \mathsf{E}\left[\exp\left(-nF\left(\frac{S_n}{n}\right) \right) \,\Big|\, q\left(\frac{S_n}{n}\right) = t \right] \mathsf{P}\left(q\left(\frac{S_n}{n}\right) \in dt \right).$$

Здесь вычисление асимптотики условного среднего для малых $|t|$ является уже, грубо говоря, "условной невырожденной задачей", к которой применим подход § 4.1. Доказательство в деталях проведено в [137, II]. Там же рассмотрен пример вырожденной точки минимума, возникающей в одной задаче статистической механики (см. [215], [244]). Применение теоремы 4.3 позволяет здесь провести до конца вычисление асимптотики соответствующего среднего. В [137, II] исследован также случай многообразия точек минимума, приведена точная асимптотика для Z_n и в этом случае.

5. Дальнейшие примеры

В этом разделе мы рассмотрим бегло некоторые иные ситуации использования метода Лапласа в бесконечномерных пространствах. Результаты, приведенные в следующих двух параграфах, получены по той же схеме, что и в разделах 3, 4. Вывод точных асимптотик континуальных интегралов по всему пространству, рассмотренных в § 5.1, 5.2 был осуществлен в работах [116], [217] под несомненным влиянием результатов статьи [137]. Все это еще раз говорит о достаточной универсальности метода Лапласа в банаховом пространстве и его возможном применении при исследовании семейств вероятностных мер, для которых верен ПБУ.

§ 5.1. Метод Лапласа для функционала локального времени от марковского симметричного процесса [217]

Здесь мы выпишем точную асимптотику лапласовского типа континуального интеграла из формулы (2.10). На физическом уровне строгости эта асимптотика была получена в работах [236], [237], математически завершенное доказательство проведено в [217] на основе работ [137], [216], [236].

Введем необходимые обозначения, по возможности придерживаясь уже использованных в примере 2.3. Пусть S – польское пространство, $C_b(S)$ – банахово пространство ограниченных непрерывных действительных функций на S с нормой супремума. Обозначим через $\mathscr{M}$ метрическое пространство вероятностных мер на S с метрикой Прохорова, через $\boldsymbol{D}$ – пространство функций на $[0,\infty)$ со значениями в S, непрерывных справа и имеющих пределы слева.

Пусть $\mu \in \mathscr{M}$ имеет своим носителем все пространство S и $\{\mathsf{P}_x : x \in S\}$ – семейство вероятностных мер на $\boldsymbol{D}$, которое индуцирует μ-симметричный марковский процесс на S. Обозначим через $\{\mathrm{P}_t\}_{t\geqslant 0}$, $\mathscr{E}$ и L индуцированную полугруппу, форму Дирихле и производящий оператор на $L^2(S;d\mu)$ соответственно. Напомним, что

$$\langle Lv, v\rangle_{L^2(d\mu)} = -\mathscr{E}(v,v), \qquad v \in \mathrm{Dom}(\mathscr{E}).$$

Рассмотрим следующие условия.

(E1) *Для любого* $t>0$ *существует непрерывная функция* $p(t,\,\cdot\,,\cdot)\colon S\times S \to (0,\infty)$ *такая, что*

$$\mathrm{P}_t f(x) = \int_S p(t,x,y) f(y)\,\mu(dy) \quad \text{для } \mu\text{-почти всех } x, \text{ всех } f \in C_b(S).$$

(E2) *Пусть отображение* $\Pi\colon L^2(d\mu)\to L^2(d\mu)$ *задано следующим образом*:

$$(\Pi h)(x) = h(x) - \int_S h(y)\,\mu(dy), \qquad \textit{для } \mu\textit{-почти всех } x, \ \textit{всех } h \in L^2(d\mu).$$

Тогда найдется такое $\lambda>0$, *что верно неравенство*

$$\|\Pi \mathrm{P}_t h\|_{L^2(d\mu)} \leqslant e^{-\lambda t}\|h\|_{L^2(d\mu)}.$$

(E3) *Оператор* $(I-L)^{-1}\colon L^2(d\mu)\to L^2(d\mu)$ *является компактным.*

Определим для каждого момента времени $t>0$ и произвольной траектории $\omega\in\boldsymbol{D}$ локальное время $\mathscr{L}_t(\omega)\in\mathscr{M}$ посредством равенства

$$\mathscr{L}_t(\omega, C) = \frac{1}{t}\int_0^t \chi_C(\omega(s))\,ds, \qquad C \text{ – борелевское множество в } S,$$

где $\chi_C(\,\cdot\,)$ – индикатор множества C.

Для формулировки результата о точной асимптотике континуального интеграла

$$\mathsf{E}^{\mathsf{P}_x}\bigl\{f(\omega)\exp\bigl[-tF(\mathscr{L}_t(\omega,\cdot))\bigr]\bigr\} \tag{5.1}$$

нам понадобится выполнение ПБУ для семейства вероятностных мер $\{\mathsf{R}_{x,t}(\,\cdot\,)\}_{t\geqslant 0}$ на $\mathscr{M}$, определяемых так:

$$\mathsf{R}_{x,t}(G) := \mathsf{P}_x\bigl\{\omega\in\boldsymbol{D} : \mathscr{L}_t(\omega,\,\cdot\,)\in G\bigr\}, \qquad G \text{ – борелевское множество в } \mathscr{M}.$$

Как уже отмечалось в разделе 2, ПБУ для семейства $\{\mathsf{R}_{x,t}(\,\cdot\,)\}_{t\geqslant 0}$ установлен в работе [157, III], см. пример 2.3 выше, а также [216].

(E4) *Пусть для любого замкнутого множества C в $\mathscr{M}$ и любого $x\in S$ выполнено неравенство*

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\{\mathsf{R}_{x,t}(C)\}\leqslant -\inf\bigl\{\mathscr{E}(\varphi,\varphi):\varphi\in\mathrm{Dom}(\mathscr{E}),\ \varphi^2d\mu\in C\bigr\};$$

для любого открытого множества G в $\mathscr{M}$ и любого $x\in S$

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\bigl\{\mathsf{R}_{x,t}(G)\bigr\}\geqslant -\inf\bigl\{\mathscr{E}(\varphi,\varphi):\varphi\in\mathrm{Dom}(\mathscr{E}),\ \varphi^2d\mu\in G\bigr\}.$$

Отметим, что правые части в обоих неравенствах условия (E4) могут быть выражены также через функционал действия I, введенный в примере 2.3. Это же соображение следует иметь в виду и ниже, в тех формулах, где участвует форма Дирихле.

Теперь мы в состоянии привести результаты из [217]. В целях большей ясности изложения мы сформулируем утверждения из этой работы не в самой большой степени общности. Начнем с самой простой ситуации.

Случай изолированных невырожденных точек минимума функционала действия. Очевидно, достаточно рассмотреть случай единственной точки минимума.

Пусть для функционала $F\colon\mathscr{M}\to\mathbb{R}$ выполнены условия.

(E5) *F – ограниченный непрерывный дважды дифференцируемый по Фреше функционал с производными $F'\colon\mathscr{M}\to\mathscr{M}^*$, $F''\colon\mathscr{M}\to(\mathscr{M}\times\mathscr{M})^*$, являющимися непрерывными линейными операторами.* (Здесь, как и ранее, звездочка в верхнем индексе указывает на пространство непрерывных линейных функционалов, определенных на соответствующем метрическом пространстве.)

(E6) (Единственность точки минимума). *Инфимум*

$$\Lambda:=\inf\bigl\{\mathscr{E}(v,v)+F(v^2d\mu):v\in\mathrm{Dom}(\mathscr{E}),\ \|v\|_{L^2(d\mu)}=1\bigr\}$$

достигается в единственной точке v_0.

Очевидное следствие из неравенства

$$\mathscr{E}(v,v)\geqslant\mathscr{E}\bigl(|v|,|v|\bigr),\qquad v\in\mathrm{Dom}(\mathscr{E}),$$

отражено в первом утверждении нижеследующей леммы.

Лемма 5.1. (i) *Для μ-почти всех x справедливо $v_0(x)\geqslant 0$.*

(ii) $\displaystyle\int_S v_0(x)\,\mu(dx)\leqslant 1.$

Обозначим

$$F^{(1)}(m,x):=F'[m](\delta_x),\qquad (m,x)\in\mathscr{M}\times S,$$

где δ_x – дельта-мера, сосредоточенная в точке x.

Тогда, в силу условия (E5), отображение $F^{(1)}\colon\mathscr{M}\times S\to\mathbb{R}$ непрерывно. Обозначим также

$$d\nu:=v_0^2\,d\mu.$$

Имеет место утверждение, выражающее условия минимума первого и второго порядков и аналогичное леммам 3.1 и 4.1 (i).

Лемма 5.2. *Точка минимума* $v_0 \in \mathrm{Dom}(L)$ *и существует такое* $\alpha \in \mathbb{R}$, *что*

$$Lv_0 - F^{(1)}(d\nu, \cdot)v_0 = \alpha v_0.$$

Кроме того, для всех $v \in \mathrm{Dom}(\mathscr{E})$ *таких, что* $\langle v, v_0\rangle_{L^2(\mu)} = 0$, *справедливо неравенство*

$$\mathscr{E}(v,v) + \int_S \bigl\{F^{(1)}(d\nu, x) + \alpha\bigr\} v^2(x)\,\mu(dx) + 2F''[\nu](vv_0\,d\mu, vv_0\,d\mu) \geqslant 0.$$

Введем еще одно условие (ср. с условием невырожденности в теореме 3.1 и с условием (D5) из §4.1).

(E7) (Невырожденность точки минимума.) *Для всех* $v \in \mathrm{Dom}(\mathscr{E})$ *таких, что* $\langle v, v_0\rangle_{L^2(\mu)} = 0$ *и* $v \neq 0$, *выполнено строгое неравенство*

$$\mathscr{E}(v,v) + \int_S \bigl\{F^{(1)}(d\nu, x) + \alpha\bigr\} v^2(x)\,\mu(dx) + 2F''[\nu](vv_0\,d\mu, vv_0\,d\mu) > 0,$$

где число α *взято из леммы* 5.2.

Введем, наконец, последние обозначения. Пусть

$$U(x) := F^{(1)}(d\nu, x) + \alpha, \qquad x \in S,$$

– непрерывная функция на S. Определим марковскую полугруппу $\{\mathrm{Q}_t\}_{t\geqslant 0}$ в $L^2(S, d\nu)$, связанную с минимизирующей функцией v_0, следующим образом:

$$\mathrm{Q}_t h(x) := (v_0(x))^{-1}\bigl[\exp\bigl\{t(L - U(\,\cdot\,))\bigr\}\bigr](v_0 h)(x), \qquad h \in L^2(d\nu).$$

Определим также линейный оператор в гильбертовом пространстве $L^2(d\nu)$:

$$\boldsymbol{G} := 2\int_0^\infty \Pi_\nu \mathrm{Q}_t\,dt,$$

где Π_ν – оператор проектирования в $L^2(S, d\nu)$, задаваемый равенством

$$\Pi_\nu h := h - \int_S h\,d\nu, \quad h \in L^2(d\nu).$$

Пусть $\{\mathsf{Q}_x : x \in S\}$ – семейство вероятностных мер на $\boldsymbol{D}$, которое индуцирует μ-симметричный марковский процесс на S, соответствующий полугруппе $\{\mathrm{Q}_t\}_{t\geqslant 0}$.

Лемма 5.3. *Случайная мера* $\sqrt{t}\,(\mathscr{L}_t(\omega) - \nu)$ *при* $t \to \infty$ *слабо сходится относительно меры* Q_x *к гауссовской случайной мере* W *на* S. *Гауссовская мера* W *имеет среднее нуль и ковариационный оператор* $\boldsymbol{G}$, *т.е. ее характеристическая функция имеет вид*

$$\mathsf{E}\biggl[\exp\biggl\{i\int_S \psi(z)\,\mathsf{W}(dz)\biggr\}\biggr] = \exp\biggl\{-\frac{1}{2}\,\langle \boldsymbol{G}\psi, \psi\rangle_{L^2(d\nu)}\biggr\}, \qquad \psi \in C_b(S).$$

Как и прежде, $\sqrt{\boldsymbol{G}}$ обозначает квадратный корень из положительного оператора $\boldsymbol{G}$. Как обычно, $\mathscr{F}_\tau^T := \sigma\bigl\{\omega(t) : t \in [\tau, T]\bigr\}$, $0 \leqslant \tau \leqslant T$, – σ-алгебра, порожденная указанными значениями функции $\omega(t)$.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия* (E1)–(E7), *и оператор* $\mathrm{P}_2\colon L^2(d\mu)\to L^2(d\mu)$ *является ядерным. Тогда для любых* $x\in S$, $T>0$ *и любой* $\mathscr{F}_0^T$*-измеримой ограниченной функции* $f\colon \boldsymbol{D}\to\mathbb{R}$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$\lim_{t\to\infty} e^{t\Lambda}\mathsf{E}^{\mathsf{P}_x}\bigl\{f(\omega)\exp\bigl[-tF(\mathscr{L}_t(\omega))\bigr]\bigr\} = v_0(x)\int_S v_0(y)\,\mu(dy)\mathsf{E}^{\mathsf{Q}_x}[f(\omega)]\mathsf{E}\biggl[\exp\biggl\{-\frac{1}{2}F''[\nu](\mathsf{W},\mathsf{W})\biggr\}\biggr], \tag{5.2}$$

где гауссовская мера W *определена в лемме* 5.3.

Среднее по гауссовской случайной мере в (5.2) *можно записать в виде*

$$\bigl\{\det\nolimits_{L^2(d\nu)}\bigl[I+F''[\nu](\sqrt{\boldsymbol{G}}\cdot d\nu,\sqrt{\boldsymbol{G}}\cdot d\nu)\bigr]\bigr\}^{-1/2} := \prod_{k=1}^{\infty}(1+\lambda_k)^{-1/2},$$

где λ_k – *собственные значения указанной квадратичной формы на гильбертовом пространстве* $L^2(d\nu)$.

Замечание 5.1. В работе [217] доказан более общий вариант теоремы 5.1, когда функционал F определен на произведении $\mathscr{M}_A\times K$, где $\mathscr{M}_A$ – нормированное пространство знакопеременных мер на S ограниченной вариации, а K – произвольное компактное метрическое пространство. Такой "равномерный по K" вариант теоремы нужен для доказательства утверждений в случае многообразия точек минимума функционала действия. Доказательство равномерной версии теоремы 5.1 в [217] включает все основные моменты метода Лапласа, уже описанные в разделах 3, 4: использование экстремального характера точки минимума v_0 (см. лемму 5.2); сведение интеграла из (5.1) к интегралу по малой окрестности точки минимума; разложение Тейлора для функции F и оценка остаточных членов; факт сходимости меры локального времени к предельной гауссовской мере (лемма 5.3). В статье [217] получены аналогичные асимптотические формулы для локального времени еще в двух случаях: "связанного" марковского процесса, когда наложено условие $\omega(0)=x$, $\omega(t)=y$, и для марковского процесса без условия на положение в начальный момент времени $t=0$. Вырожденные точки минимума исследованы в работе [219].

Многообразие точек минимума функционала действия. Здесь ситуация аналогична рассмотренной в теореме 3.3. Ограничимся формулировкой результата. Обозначим через V множество, на котором достигается следующий минимум

$$\Lambda := \inf\bigl\{\mathscr{E}(v,v)+F(v^2d\mu) : v\in \mathrm{Dom}(\mathscr{E}),\ \|v\|_{L^2(d\mu)}=1\bigr\}.$$

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия* (E1)–(E5). *Тогда для любых* $x\in S$, $T>0$ *и любой* $\mathscr{F}_0^T$*-измеримой ограниченной положительной непрерывной функции* $f\colon \boldsymbol{D}\to\mathbb{R}$ *существуют конечномерное многообразие* N *в* $\mathrm{Dom}(\mathscr{E})$ *и гладкие ограниченные функции* $\rho\colon N\to[0,\infty)$ *и* $g\colon N\to(0,\infty)$ *такие, что справедливы утверждения*:

(i) $N\subset\bigl\{v\in\mathrm{Dom}(\mathscr{E}) : \|v\|_{L^2(d\mu)}=1\bigr\}$;
(ii) $V=\bigl\{v\in N : \rho(v)=0\bigr\}$;

(iii) *имеет место асимптотическое равенство при* $t \to \infty$

$$e^{t\Lambda}\mathsf{E}^{\mathsf{P}_x}\bigl\{f(\omega)\exp\bigl[-tF(\mathscr{L}_t(\omega))\bigr]\bigr\} = t^{d/2}\int_N g(z)\exp\{-t\rho(z)\}\,n_0(dz)\mathsf{E}^{\mathsf{Q}_x}[f(\omega)]\bigl(1+o(1)\bigr),$$

где $d := \dim N$, $n_0(dz)$ *– элемент риманова объема на* N, Q_x *– та же мера, что и в теореме* 5.1.

Замечание 5.2. Соображения, высказанные в предыдущем замечании, остаются справедливыми и в отношении теоремы 5.2. Если оператор $\mathrm{P}_2\colon L^2(d\mu) \to L^2(d\mu)$ является ядерным, то функция g допускает представление через детерминант, аналогичное выражению, приведенному в теореме 5.1, подробности см. в [217, теорема 3.10]. Конкретизация вида многообразия N и функций ρ, g также имеется в [217, § 3].

В заключение отметим, что при выводе утверждений данного параграфа существенно использовалась симметрия марковского процесса. Соответствующие результаты для несимметричного марковского процесса получены совсем недавно в работе [140].

Исследование асимптотики среднего (5.1) для индикаторных функций F можно провести по методу, описанному в § 3.3 в случае гауссовских мер (ср. с проблемой Э. Больтхаузена [139], упомянутой на с. 535 в [217]). Физические приложения результатов о точной асимптотике интегралов (5.1) в теории неупорядоченных систем см. в [186].

§ 5.2. Метод Лапласа для диффузионных процессов, конечное число невырожденных точек минимума [116]

Статья [116] содержит обзор результатов о ПБУ для диффузионных процессов (см. пример 2.6), а также вывод асимптотического разложения лапласовского типа для интегралов вида (1.3), взятых по всему пространству, от распределений таких процессов. Впервые асимптотические разложения для континуальных интегралов от диффузионных процессов были получены в эллиптическом случае в работе [109]. В этой статье был выведен стохастический аналог формулы Тейлора, которая затем применялась наряду с элементами метода Лапласа для получения вышеуказанного асимптотического разложения в случае невырожденных изолированных точек минимума функционала действия. При этом изложение в [109] довольно громоздко и затянуто. После выхода одной из фундаментальных работ по методу Лапласа для континуальных интегралов – работы [137] – Бен Ару в статье [116] придал доказательству асимптотических разложений законченный и более общий вид. Последние достижения в этой области представлены в работах [119], [123]. Укажем также на две работы Х. Досса [160], [161], где исследованы асимптотики интегралов для диффузий без гипотезы эллиптичности, правда, для функций F частного вида. О сложностях, возникающих в гипоэллиптическом случае, см. [118], [133, с. 9–11, гл. 5].

Перейдем теперь к изложению результатов [116].

(G1) *Пусть* X^ε *– решение стохастического дифференциального уравнения* (2.13), *причем выполнены условия на* σ *и* b *из примера* 2.6.

Введем дальнейшие обозначения. $\dot{h}$ будет обозначать производную функции h по переменной t; $\boldsymbol{C}$ – пространство непрерывных функций $C\big([0,1],\mathbb{R}^d\big)$; H – гильбертово пространство, ассоциированное с r-мерной винеровской мерой (см. пример 2.5). Норма в H определяется так:

$$\|h\|_1 := \left[\int_0^1 |\dot{h}_s|^2\,ds\right]^{1/2}.$$

Как сказано в примере 2.6, семейство распределений диффузионных процессов X^ε удовлетворяет ПБУ с функционалом действия $I(\varphi)$, определенным в формуле (2.14).

Введем теперь важное отображение $\Phi\colon H \to H\big([0,1],\mathbb{R}^d\big)$ следующим образом: для каждого $h \in H$ положим $\Phi(h)$ равным решению u обыкновенного дифференциального уравнения

$$du_t = \sigma(u_t)\,dh_t + b(0,u_t)\,dt, \qquad u_0 = x.$$

Отображение Φ значительно упрощает и делает более ясным дальнейшие формулировки вследствие следующей теоремы.

Теорема 5.3 (“Принцип сжатия”, ср. [107, гл. 3, теорема 2.13]). *Имеет место равенство*

$$I(\varphi) = \inf\Big\{\frac{1}{2}\|h\|_1^2 : \Phi(h) = \varphi\Big\}.$$

Если $I(\varphi) < \infty$, *то существует единственное* $h \in H$ *такое, что* $\Phi(h) = \varphi$ *и* $\frac{1}{2}\|h\|_1^2 = I(\varphi)$.

Мы приведем ниже результат об асимптотическом разложении интеграла

$$J_\varepsilon := \mathsf{E}\big[f(X^\varepsilon)\exp\big\{-\varepsilon^{-2}F(X^\varepsilon)\big\}\big], \qquad \varepsilon \to 0,$$

при выполнении следующих, уже ставших привычными, условий.

(G2) *Числовые функции* F *и* f *ограничены на* $\boldsymbol{C}$ *и непрерывно дифференцируемы по Фреше, соответственно,* $N+3$ *и* $N+1$ *раз, где* $N \geqslant 0$ *– целое число. Пусть* $(N+3)$*-я производная по Фреше* $D^{N+3}F$ *функции* F *ограничена на ограниченных подмножествах пространства* $\boldsymbol{C}$.

(G3) (Конечное число точек минимума.) *Функционал* $F + I$ *достигает своего минимума* Λ *на* $\boldsymbol{C}$ *в конечном числе точек* $\varphi_1,\dots,\varphi_n$.

Из теоремы 5.3 несложно выводится такое утверждение.

Лемма 5.4. *При выполнении условий* (G1)–(G3) *имеет место равенство*

$$\Lambda = \inf\Big\{F\circ\Phi(\gamma) + \frac{1}{2}\|\gamma\|_1^2 : \gamma \in H\Big\},$$

и инфимум справа достигается в n *точках* $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ *из* H *таких, что* $\Phi(\gamma_i) = \varphi_i$ *и* $\frac{1}{2}\|\gamma_i\|_1^2 = I(\Phi(\gamma_i))$.

Теперь понятна природа следующего условия.

(G4) (Невырожденность точек минимума.) *Для всех* $i = 1,\dots,n$ γ_i *являются невырожденными точками минимума функционала* $F\circ\Phi + \frac{1}{2}\|\cdot\|_1^2$ *(класса* C^2 *на* H*), т.е.*

$$D^2\Big(F\circ\Phi + \frac{1}{2}\|\cdot\|_1^2\Big)(\gamma_i)h^2 > 0 \quad \text{для всех} \quad h \in H\setminus\{0\}.$$

Теорема 5.4. *Пусть выполнены условия* (G1)–(G4). *Тогда имеет место следующее асимптотическое разложение при* $\varepsilon \to 0$:

$$(5.3) \qquad \mathsf{E}\big[f(X^\varepsilon)\exp\{-\varepsilon^{-2}F(X^\varepsilon)\}\big] = \exp\{-\varepsilon^{-2}\Lambda - \varepsilon^{-1}c\}\big(\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon + \dots + \alpha_N\varepsilon^N + o(\varepsilon^{N+1})\big),$$

где

$$c := \inf\{DF(\varphi_i)Y_i : i = 1, \dots, n\},$$

Y_i – *решение дифференциального уравнения*

$$dY_i(s) = \partial_x\sigma(\varphi_i(s))Y_i(s)\,d\gamma_i(s) + \partial_\varepsilon b(0,\varphi_i(s))\,ds + \partial_x b(0,\varphi_i(s))Y_i(s)\,ds$$

с начальным данным $Y_i(0) = 0$.

В частности, если $\partial_\varepsilon b(0,\cdot\,) = 0$, *то* $c = 0$. *Кроме того, если* $(\partial_\varepsilon)^k b(0,\cdot\,) = 0$ *для нечетных* k, *то коэффициенты* α_m *равны нулю для нечетных* m.

Замечание 5.3. Эллиптический случай, т.е. когда матрица $\sigma\sigma^*(x)$ обратима для всех x, был исследован ранее в [109]. Здесь коэффициент c можно выписать в следующей форме (см. [109, теорема 7.4]):

$$(5.4) \qquad c = -\int_0^1 \big[\dot\varphi_s - b(0,\varphi_s)\big]^* \big[\sigma(\varphi_s)\sigma^*(\varphi_s)\big]^{-1}\partial_\varepsilon b(0,\varphi_s)\,ds,$$

где $\varphi(s)$ является той функцией из множества $\{\varphi_i(s),\ i = 1, \dots, n\}$, которая минимизирует интеграл в (5.4).

Замечание 5.4. Результат теоремы 5.4 останется верен, если уравнение (2.13) рассматривать в смысле Стратоновича. Явный вид коэффициентов α_i приведен в [116] (теоремы 4 и 5). При этом α_i выражаются через "регуляризованный" детерминант оператора Гильберта–Шмидта, ассоциированного с $D^2(F\circ\Phi)$, резольвенту и полиномы Эрмита.

Наконец, отметим необходимость условия невырожденности (G4) для того, чтобы интеграл J_ε имел асимптотическое поведение, определяемое теоремой 5.4. Это следует из такого утверждения.

Теорема 5.5 [116]. *Пусть выполнены условия* (G1)–(G2). *Предположим, ради простоты обозначений, что функционал* $F + I$ *достигает своего минимума* Λ *в единственной точке* φ_1 *и, кроме того,* $\partial_\varepsilon b(0,\cdot\,) = 0$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(i) *Предел* $\lim_{\varepsilon\to 0} e^{\varepsilon^{-2}\Lambda}J_\varepsilon$ *существует и конечен для любой ограниченной непрерывной* f.

(ii) *Предел* $\lim_{\varepsilon\to 0} e^{\varepsilon^{-2}\Lambda}J_\varepsilon$ *существует и конечен для* $f \equiv 1$.

(iii) γ_1 *является невырожденной точкой минимума функционала* $F\circ\Phi + \frac{1}{2}\|\cdot\|_1^2$.

Замечание 5.5. Асимптотические разложения для вырожденной диффузии получены в [117], [118], [120], [219], [222], [223], [256]. Случай многообразия точек минимума функционала $I+F$ изучен в [219]. Он может быть рассмотрен также на основе идей § 3.2, 4.2.

Точная асимптотика для одного интеграла Лапласа в пространстве $C(\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^n)$, связанного с плотностью диффузионного процесса на многообразии получена в [55] и [133, с. 141, 149] (в последней работе вывод асимптотики осуществлен с использованием исчисления Маллявена).

Замечание 5.6. В работе [111] исследован случай индикаторной функции f, $F\equiv 0$ при условии невырожденности формы Q_x. Там получены асимптотические разложения вида

$$\mathsf{P}\{X^\varepsilon\in G\}=\exp\bigl\{-\varepsilon^{-2}\Lambda(G)-\varepsilon^{-1}\Lambda_1(G)\bigr\}\bigl(\alpha_0+\alpha_1\varepsilon+\dots+\alpha_N\varepsilon^N+o(\varepsilon^{N+1})\bigr). \tag{5.5}$$

При этом предполагалось, что минимум

$$\Lambda(G):=\inf_{\varphi\in G}I(\varphi)$$

достигается в одной граничной точке φ_1, а само борелевское множество G в окрестности точки φ_1 имеет достаточно гладкую выпуклую границу и глобально "почти выпукло". Коэффициенты диффузии и сноса являлись функциями и от переменной t и предполагались достаточно гладкими. В [111] также доказано, что, если $\Lambda(G)>0$, то $\alpha_0=0$ и $\Lambda_1(G)$ равно c из формулы (5.4), где нужно положить $\varphi=\varphi_1$. Явный вид коэффициента α_1 не приведен, только указан сложный алгоритм его вычисления. Если $\Lambda(G)=0$, то $\Lambda_1(G)=0$, но тогда $\alpha_0>0$. Результаты в [111] доказаны комбинацией идей, присущих методу Лапласа и стохастического анализа, основанного на формуле Тейлора.

Для вывода разложения (5.5), по-видимому, можно также применить подход § 3.3 настоящей статьи. Близкие по смыслу асимптотические разложения для вероятности времени выхода траектории диффузионного процесса за границу области имеются в [181].

Упомянем также работу [34], где получено асимптотическое разложение вида (5.3) для диффузии, определяемой таким стохастическим дифференциальным уравнением на $\mathbb{R}^d$:

$$dX_t^\varepsilon=\varepsilon\sigma(X_t^\varepsilon)\,dw_t+b(t,\varepsilon,X_t^\varepsilon)\,dt+\varepsilon^2\int_{\mathbb{R}^d}a(s,X_s^\varepsilon,z)\,\nu(ds,dz),$$
$$X^\varepsilon(0)=x_0,$$

где ν – центрированная пуассоновская мера, не зависящая от w. При этом предполагались выполненными условия типа (G1)–(G4), а также обратимость матрицы $\sigma\sigma^*(x)$.

В работе [116] изложен также вкратце метод стационарной фазы в пространстве $\boldsymbol{C}$. На основе этого метода получены асимптотические разложения для интегралов

$$\mathsf{E}\bigl[f(X^\varepsilon)\exp\bigl\{-\varepsilon^{-2}(F+iG)(X^\varepsilon)\bigr\}\bigr],\qquad \varepsilon\to 0,$$

где G – функция класса C^{N+3} на $\boldsymbol{C}$, i – мнимая единица. Метод стационарной фазы в гильбертовом пространстве описан в статье [253], см. также [101], [187].

§ 5.3. Асимптотики больших уклонений для броуновского движения в гельдеровской норме

В последние годы в работах [113], [114], [122], [226], [235] изучался принцип больших уклонений для случайных процессов с траекториями в пространстве гельдеровских функций. Точные асимптотики лапласовского типа в случае броуновского движения получены в статье [235], к изложению результатов которой мы сейчас и перейдем.

Пусть $\mathscr{C}_\alpha$, $\alpha \in (0,1/2)$, – банахово пространство гельдеровских функций на $[0,1]$ порядка α, равных нулю в нуле, с нормой

$$|x|_\alpha := \sup_{0\leqslant t\neq s\leqslant 1} \frac{|x(t)-x(s)|}{|t-s|^\alpha}\,. \tag{5.6}$$

Известно, что $(\mathscr{C}_\alpha, |\cdot|_\alpha)$ – несепарабельное банахово пространство, поэтому приходится работать с его замкнутым сепарабельным подпространством $\mathscr{C}_\alpha^0$, состоящим из функций x, удовлетворяющих следующему дополнительному условию

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{\substack{0\leqslant t\neq s\leqslant 1,\\ |t-s|\leqslant\delta}} \frac{|x(t)-x(s)|}{|t-s|^\alpha} = 0.$$

Пусть, далее, $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ – система функций Шаудера, а c_0 – банахово пространство последовательностей, сходящихся к нулю. З. Цесельский в [295] доказал, что отображение

$$T^\alpha\colon c_0 \to \mathscr{C}_\alpha^0,$$
$$\eta = (\eta_n)_{n\geqslant 1} \mapsto T^\alpha(\eta) = \sum_{n=1}^\infty n^{1/2-\alpha}\eta_n\varphi_n,$$

является изоморфизмом. Определим для $x = \sum_{n=1}^\infty n^{1/2-\alpha}\eta_n\varphi_n$ норму

$$\|x\|_\alpha := \sup_{n\geqslant 1} |\eta_n|.$$

Эта норма эквивалентна классической гельдеровской норме (5.6). Пространство $\mathscr{C}_\alpha^0$ с нормой $\|\cdot\|_\alpha$ является сепарабельным банаховым пространством.

Зафиксируем $f \in \mathscr{C}_\alpha^0$, $\alpha \in (0,1/2)$, и пусть

$$f = \sum_{n=1}^\infty n^{1/2-\alpha}\eta_n\varphi_n. \tag{5.7}$$

Введем функцию

$$\varphi_f(g) := \|g-f\|_\alpha, \qquad g \in \mathscr{C}_\alpha^0.$$

Эта функция не принадлежит, вообще говоря, классу C^2 на $\mathscr{C}_\alpha^0$, тем не менее, имеют место асимптотики лапласовского типа. Ниже w обозначает одномерный стандартный винеровский процесс.

Теорема 5.6 (случай, когда f “удалена от нуля”). *Пусть*

$$\frac{1}{2} < \sum_{n=1}^{\infty} n^{1-2\alpha}|\eta_n| < +\infty.$$

Тогда существуют $C > 0$ и целое σ такие, что справедливо асимптотическое равенство: при $\varepsilon \to 0$

$$\mathsf{E}\exp\Big\{-\frac{1}{2\varepsilon}\varphi_f(\sqrt{\varepsilon}\,w)\Big\} = C\varepsilon^{\sigma/2}\exp\Big\{-\frac{\Lambda(f)}{2\varepsilon}\Big\}\big(1+o(1)\big), \tag{5.8}$$

где $\Lambda(f)$ выражается через функционал действия:

$$\Lambda(f) = \inf_{\psi\in\mathscr{C}^0_\alpha}\big[I(\psi) + \|\psi - f\|_\alpha\big], \tag{5.9}$$

$$I(\psi) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \dot\psi^2(s)\,ds, & \text{если } \psi \text{ абсолютно непрерывна},\\ +\infty & \text{иначе.}\end{cases} \tag{5.10}$$

Доказательство теоремы 5.6, приведенное в [235], основано на известном разложении винеровского процесса в ряд по функциям Шаудера и конечномерных аппроксимациях функции $\varphi_f(\sqrt{\varepsilon}\,w)$ с использованием элементов метода Лапласа в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$ растущей размерности $k \to \infty$. К сожалению, точный вид констант C и σ в [235] не выявлен.

Представляет также интерес вид асимптотики для среднего в левой части (5.8) в другом частном случае. Предполагаем, по-прежнему, что функция f задается формулой (5.7).

Теорема 5.7 (случай, когда f “близка к нулю”). *Пусть*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-2\alpha}|\eta_n| < \frac{1}{2}\,.$$

Пусть в разложении (5.7) для некоторого целого числа p выполнено: $\eta_n = 0$ при $n > p$. Тогда найдутся положительные константы C и K такие, что имеет место соотношение

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}\exp\Big\{-\frac{1}{2\varepsilon}\varphi_f(\sqrt{\varepsilon}\,w)\Big\}\\ &\quad= C\varepsilon^{p/(3-2\alpha)-1/4}\exp\Big\{-\frac{\Lambda(f)}{2\varepsilon} - \Big(\frac{K\eta^2}{\varepsilon}\Big)^{1/(3-2\alpha)}\Big\}\big(1+o(1)\big), \qquad \varepsilon \to 0,\end{aligned}$$

где $\Lambda(f)$ определяется формулами (5.9), (5.10) и

$$\eta := \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{p} n^{1-2\alpha}|\eta_n|.$$

Полагая $f \equiv 0$, из последней теоремы получаем такое

Следствие 5.1. *При $\varepsilon \to 0$ справедливо*

$$\mathsf{E}\exp\biggl\{-\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\|w\|_\alpha\biggr\} = C\varepsilon^{-1/4}\exp\biggl\{-\frac{K}{\varepsilon^{1/(3-2\alpha)}}\biggr\}\bigl(1+o(1)\bigr).$$

Как и положено при выполнении ПБУ, в обоих теоремах 5.6 и 5.7 логарифмическая асимптотика соответствующего среднего полностью определяется функционалом действия $I(\psi)$. Отличия в точной асимптотике вызваны тем обстоятельством, что в первом случае функция φ_f является функцией класса C^2 в окрестности минимума функционала $g \mapsto \varphi_f(g) + I(g)$, в то время как это не так во втором случае. Сам ПБУ для мер $\mathsf{P}\bigl\{\varepsilon w \in (\,\cdot\,)\bigr\}$, $\varepsilon \to 0$, в сепарабельном банаховом пространстве $(\mathscr{C}^0_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ исследован в статьях [113], [114], [122]. Отметим, наконец, очевидный факт, что асимптотики одних и тех же распределений могут быть различны для эквивалентных норм.

Проблеме малых уклонений в гельдеровской норме посвящены работы [213], [226, гл. 7].

§ 5.4. Неасимптотическое разложение строго устойчивого закона в гильбертовом пространстве [41]

Насколько известно авторам, метод Лапласа для устойчивых мер еще не применялся. Здесь мы приведем один красивый результат из работы [41], примыкающий к теме данной статьи, но полученный методом преобразования Лапласа.

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ и нормой $\|\cdot\|$, $S = \bigl\{x \in H : \|x\| = 1\bigr\}$ – единичная сфера. Пусть X – случайный элемент в H, а $\psi(y)$ – его характеристический функционал.

Определение 5.1. Случайный элемент X называется *строго устойчивым*, если его распределение невырождено и для любых $a, b > 0$ найдется такое $c > 0$, что $\psi(ay)\psi(by) = \psi(cy)$ для любого $y \in H$.

Можно показать (см., например, [232]), что при этом $c = [a^\alpha + b^\alpha]^{1/\alpha}$ для некоторого числа $\alpha \in (0, 2]$, которое называется *показателем* строго устойчивого случайного элемента X. Известно также, что при $\alpha < 1$ имеет место равенство

$$\psi(y) = \exp\biggl\{-\int_S \varphi(\langle y, s\rangle)\,\nu(ds)\biggr\},$$

где

$$\varphi(t) = |t|^\alpha - i\,\mathrm{tg}\Bigl(\frac{\pi\alpha}{2}\Bigr)t|t|^{\alpha-1}, \qquad i = \sqrt{-1}\,,$$

а ν – некоторая конечная мера на S, называемая *спектральной.*

Теорема 5.8. *Пусть X – строго устойчивый случайный элемент в H с показателем $\alpha < 1$ и $u > 0$. Тогда*

$$\mathsf{P}\bigl\{\|X\| > u\bigr\} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_k(\mu)}{u^{\alpha k}}\,,$$

где

$$C_k(\mu) = (\pi k!)^{-1}(-1)^{k-1}\Gamma\left(\frac{\alpha k}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi\alpha k}{2}\right)2^{\alpha k/2} \times \int_{S^k} d_k(s_1,\dots,s_k;\mu)\,\nu(ds_1)\dots\nu(ds_k),$$

$$d_k(s_1,\dots,s_k;\mu) = \int_H \varphi(\langle y,s_1\rangle)\cdots\varphi(\langle y,s_k\rangle)\,\mu(dy),$$

а μ *– цилиндрическая стандартная гауссовская мера в* H, *т.е. такая, что*

$$\int_H \exp\{i\,\langle x,y\rangle\}\,\mu(dy) = \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2}\right), \qquad x\in H.$$

Подробности о цилиндрических мерах имеются в [15], [23]. Об устойчивых мерах и процессах см. [4], [230], [257], [286].

ГЛАВА II
МЕТОД ДВОЙНЫХ СУММ – ВЕРСИЯ МЕТОДА ЛАПЛАСА В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

6. Метод Пикандса двойных сумм

§ 6.1. Общие положения

Дж. Пикандс III [246] предложил естественный и красивый способ вычисления точной асимптотики вероятности

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in T} X(t) > u\Big\} \tag{6.1}$$

при $u\to\infty$ для гауссовских стационарных процессов $X(t)$. Этот способ основан на принципе локализации, т.е. выделении малого (возможно, случайного) подмножества параметрического множества T, которое вносит доминирующий вклад в асимптотику. В настоящее время этот метод (см. [72, гл. 2], [74], [175]) распространен на весьма широкий класс гауссовских процессов и полей, включая поля с бесконечномерным параметрическим множеством. В процессе развития и уточнения этого метода оказалось, что в определенном смысле он является аналогом метода Лапласа и эта аналогия имеет два подтекста.

Первый состоит в том, что если траектория непрерывного гауссовского процесса содержится в событии под знаком вероятности в (6.1), то она, как правило, *достигает значений, превышающих уровень* u, *на множестве бесконечно малого при* $u\to\infty$ *диаметра.*

Второй подтекст заключается в том, что эти множества малого диаметра, распределенные по всему параметрическому множеству T в случае стационарного или близкого к стационарному процесса, *в нестационарном случае концентрируются вокруг множества точек, в которых достигается максимум дисперсии процесса X*.

Метод Пикандса развивается не только для гауссовских процессов. Работы С. Бермана [126]–[129], П. Албина [102], [104] и др. содержат результаты для диффузионных и некоторых других процессов, для которых выполнены вышеприведенные принципы. Обзоры работ по данному вопросу имеются в [40], [67], [69], [98].

Отмеченная выше аналогия с методом Лапласа реализуется в вычислении асимптотики вероятности (6.1) в соответствии со следующими схемами.

1. В стационарном случае, когда точка максимума траектории распределена по всему параметрическому множеству, последнее разбивается на бесконечно малые подмножества. На каждом из этих подмножеств, как и в методе Лапласа, возможен локальный анализ траекторий, максимум которых на данном малом множестве превосходит u; это позволяет вычислить асимптотику вероятности (6.1) на фиксированном малом множестве. При "правильном" выборе размеров множеств разбиения вероятность того, что найдется траектория, которая выйдет за уровень u на двух или более множествах, асимптотически мала по сравнению с суммой (по всем множествам разбиения) вероятностей превзойти уровень u на одном множестве. Заметим, что такой правильный выбор допустим благодаря условиям регулярности, налагаемым на исследуемый процесс или поле.

2. В противоположном случае, когда имеется единственная точка максимума дисперсии процесса X или же несколько изолированных точек, ситуация внешне выглядит более просто. Если исключить из параметрического множества бесконечно малую при $u \to \infty$ окрестность точек максимума дисперсии, то множество траекторий, которые выходят за уровень u, на образовавшемся дополнении имеет (конечно, при некоторых дополнительных условиях регулярности) пренебрежимую вероятность по сравнению с аналогичным событием в окрестности точки максимума дисперсии. И проблема состоит в выборе размера этой окрестности, исходя из корреляционной структуры процесса в этой окрестности. Ниже, на примере мы увидим, что этот случай технически не менее сложен, чем предыдущий, так как включает в себя практически все детали из стационарного случая.

3. Гауссовское поле (т.е. гауссовская случайная функция от нескольких переменных) может быть устроено сложнее, чем в описанных выше двух ситуациях. Например, множество точек максимума дисперсии может оказаться некоторым многообразием, и корреляционная структура поля в окрестностях различных точек этого многообразия может быть различна. Это приводит к значительному усложнению анализа.

Ниже мы на двух примерах, ставших уже классическими, покажем, как реализуются вышеприведенные схемы. Эта реализация основана на двух важных результатах теории гауссовских процессов.

Первый из них – достаточно точная оценка сверху для вероятностей (6.1). Она позволяет аналогично ПБУ в классическом методе Лапласа "отсекать" части параметрического множества и подмножества траекторий, не вносящие существенного вклада в асимптотику. Таких неравенств имеется довольно много, по крайней мере два из них – неравенство Дмитровского [26], [155] и неравенство Бореля [142] – вполне подходят для вышеуказанных целей. Здесь приводится неравенство Бореля как более удобное в описании. Второй результат – неравенство Слепяна, [268] – свойство монотонности вероятности (6.1) относительно ковариации, важен на стадии локального исследования. Он дает возможность заменять исследуемое поле или процесс на более просто устроенное.

Обозначим через $\operatorname{Var} X := \mathsf{E}(X - \mathsf{E}X)^2$ дисперсию случайной величины X.

Теорема 6.1 [142]. *Пусть T – произвольное параметрическое множество, $X(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t} \in T$, – действительный сепарабельный гауссовский процесс и выполнены условия*

$$\sigma^2 := \sup_T \operatorname{Var} X(\boldsymbol{t}) < \infty, \qquad m := \sup_T \mathsf{E}X(\boldsymbol{t}) < \infty,$$

и для некоторого a

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_T \big(X(\boldsymbol{t}) - \mathsf{E}X(\boldsymbol{t})\big) \geqslant a\Big\} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Тогда для всех x

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_T X(\boldsymbol{t}) > x\Big\} \leqslant 2\Psi\Big(\frac{x-m-a}{\sigma}\Big),$$

где

$$\Psi(u) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^\infty \exp\Big\{-\frac{x^2}{2}\Big\}\,dx. \tag{6.2}$$

Приведем также теорему сравнения Слепяна.

Теорема 6.2 [268]. *Пусть гауссовские сепарабельные случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$, $t \in T$, удовлетворяют условиям теоремы 6.1 и имеют одинаковые математические ожидания,*

$$\mathsf{E}X(t) \equiv \mathsf{E}Y(t), \qquad t \in T.$$

Если для ковариационных функций $r_X(t,s)$ и $r_Y(t,s)$ выполнены соотношения

$$r_X(t,t) \equiv r_Y(t,t), \quad t \in T, \qquad r_X(t,s) \leqslant r_Y(t,s), \quad t,s \in T,$$

то для любого x

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in T} X(t) < x\Big\} \leqslant \mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in T} Y(t) < x\Big\}.$$

В качестве первого примера мы достаточно подробно рассмотрим случай стационарного гауссовского процесса [64], [246], [251] (см. § 6.2 ниже).

Пусть $X(t)$ – гауссовский стационарный процесс с нулевым средним, заданный на отрезке $[0,1]$. Предположим, что его ковариационная функция $r(t)$ удовлетворяет для некоторого $\alpha > 0$ условиям

$$r(t) = 1 - |t|^\alpha + o(|t|^\alpha), \qquad t \to 0, \tag{6.3}$$

и

$$r(t) < 1 \quad \text{для всех} \quad t > 0. \tag{6.4}$$

Следующая лемма является первой из двух основных лемм, типичных для метода двойных сумм.

Рассмотрим гауссовский процесс (дробное броуновское движение с трендом) $\chi(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, с непрерывными траекториями, математическим ожиданием

$$\mathsf{E}\chi(t) = -|t|^\alpha,$$

и ковариационной функцией

$$\operatorname{Cov}\bigl(\chi(t), \chi(s)\bigr) = |t|^\alpha + |s|^\alpha - |t-s|^\alpha.$$

Лемма 6.1 [161], [170]. *Для любого $T > 0$ имеет место соотношение*

$$\mathsf{P}\Bigl\{\sup_{t\in[0,Tu^{-2/\alpha}]} X(t) > u\Bigr\} = H_\alpha(T)\Psi(u)\bigl(1+o(1)\bigr), \qquad u\to\infty,$$

где

$$H_\alpha(T) = \mathsf{E}\exp\Bigl\{\max_{0\leqslant t\leqslant T}\chi(t)\Bigr\} < \infty.$$

Доказательство. Для $u > 0$ имеем

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\Bigl\{\sup_{t\in[0,Tu^{-2/\alpha}]} X(t) > u\Bigr\}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Bigl\{-\frac{v^2}{2}\Bigr\}\mathsf{P}\Bigl\{\sup_{t\in[0,Tu^{-2/\alpha}]} X(t) > u \bigm| X(0) = v\Bigr\}\,dv\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,u}e^{-u^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Bigl\{w-\frac{w^2}{2u^2}\Bigr\}\mathsf{P}\Bigl\{\sup_{t\in[0,Tu^{-2/\alpha}]} X(t) > u \bigm| X(0) = u-\frac{w}{u}\Bigr\}\,dw.
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались заменой переменных $v = u - w/u$.

Определим гауссовский процесс

$$\chi_u(t) = u\bigl(X(u^{-2/\alpha}t) - u\bigr) + w.$$

Тогда последний интеграл можно переписать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Bigl\{w-\frac{w^2}{2u^2}\Bigr\}\mathsf{P}\Bigl\{\sup_{t\in[0,T]}\chi_u(t) > w \bigm| X(0) = u-\frac{w}{u}\Bigr\}\,dw. \tag{6.5}$$

Для семейства гауссовских распределений, появившихся под интегралом, имеем:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\Bigl(\chi_u(t) \bigm| X(0) = u-\frac{w}{u}\Bigr) &= u\biggl(\mathsf{E}\Bigl\{X(u^{-2/\alpha}t) \bigm| X(0) = u-\frac{w}{u}\Bigr\} - u\biggr) + w\\
&= -u^2\bigl[1-r(u^{-2/\alpha}t)\bigr] + w\bigl[1-r(u^{-2/\alpha}t)\bigr];
\end{aligned}$$

$$\mathsf{E}\Bigl\{\chi_u(0) \bigm| X(0) = u-\frac{w}{u}\Bigr\} = \mathsf{E}\Bigl\{\chi_u^2(0) \bigm| X(0) = u-\frac{w}{u}\Bigr\} = 0;$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\Big\{\chi_u(t)-\chi_u(s)\ \Big|\ X(0)=u-\frac{w}{u}\Big\}\\ &=u^2\Big\{\operatorname{Var}\big[X(u^{-2/\alpha}t)-X(u^{-2/\alpha}s)\big]-\big[r(u^{-2/\alpha}t)-r(u^{-2/\alpha}s)\big]^2\Big\}.\end{aligned}$$

Из условия (6.3), при $u\to\infty$ получаем

$$\mathsf{E}\Big\{\chi_u(t)\ \Big|\ X(0)=u-\frac{w}{u}\Big\}=-|t|^\alpha+o(1). \tag{6.6}$$

Гауссовское условное математическое ожидание зависит от условия линейно, поэтому $o(\,\cdot\,)$ линейно относительно w. При $u\to\infty$

$$\operatorname{Var}\Big\{\chi_u(t)-\chi_u(s)\ \Big|\ X(0)=u-\frac{w}{u}\Big\}=2|t-s|^\alpha+o(1). \tag{6.7}$$

Гауссовская условная дисперсия не зависит от конкретного значения условия, поэтому здесь $o(\,\cdot\,)$ равномерно по w. Таким образом, существует константа $C>0$ такая, что для всех t, s и всех достаточно больших u

$$\operatorname{Var}\Big\{\chi_u(t)-\chi_u(s)\ \Big|\ X(0)=u-\frac{w}{u}\Big\}\leqslant C|t-s|^\alpha.$$

Из этого неравенства и соотношения $\chi_u(0)=0$ п. н., следует, что семейство распределений

$$\mathsf{P}\Big\{\chi_u\in(\,\cdot\,)\ \Big|\ X(0)=u-\frac{w}{u}\Big\} \tag{6.8}$$

слабо компактно в $C[0,T]$.

Из соотношений (6.6), (6.7) следует также сходимость при $u\to\infty$ всех условных конечномерных распределений процесса χ_u к распределениям процесса $\chi(t)$, $t\in\mathbb{R}$. Функционал $\sup_{t\in[0,T]}f(t)$ непрерывен в равномерной метрике, поэтому для каждого w

$$\lim_{u\to\infty}\mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in[0,T]}\chi_u(t)>w\ \Big|\ X(0)=u-\frac{w}{u}\Big\}=\mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in[0,T]}\chi(t)>w\Big\}.$$

Для вероятности в левой части последнего соотношения выполняются условия теоремы Бореля равномерно по w и всем достаточно большим u.

Действительно, для любого $\delta>0$ и всех достаточно больших u, из (6.6) следует ограниченность условного математического ожидания процесса $\chi_u(t)$ величиной $\delta|w|$; из (6.7) следует равномерная по u и w ограниченность дисперсии. В силу слабой компактности семейства (6.8) и независимости от w распределений этого семейства найдется (после центрирования) число a (из теоремы Бореля), одно и то же для всего семейства.

Таким образом, из теоремы Бореля следует мажорируемая сходимость при $u\to\infty$ под знаком интеграла в (6.5). Предел выражения (6.5) конечен и равен

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^w\mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in[0,T]}\chi(t)>w\Big\}\,dw=\mathsf{E}\exp\Big\{\max_{t\in[0,T]}\chi(t)\Big\}. \tag{6.9}$$

Следствие 6.1 (полуаддитивность константы Пикандса $H_\alpha(T)$). *Для всех* α, $0 < \alpha \leqslant 2$, *и любого* $T > 1$

$$1 \leqslant H_\alpha(T) \leqslant H_\alpha(1)T.$$

Доказательство. Для проверки правого неравенства достаточно разбить отрезок $[0, Tu^{-2/\alpha}]$ на отрезки длины $u^{-2/\alpha}$ и остающийся меньший отрезок. Затем для равных отрезков следует воспользоваться полуаддитивностью по T вероятности (6.1) и леммой, а для меньшего отрезка – монотонностью $H_\alpha(T)$. Левое неравенство в утверждении следствия легко выводится после разбиения области интегрирования в (6.9) на две: $(-\infty, 0]$ и $(0, \infty)$, и использования равенства $\chi(0) = 0$ п. н.

Вторая из двух основных лемм метода представляет собой верхнюю оценку вероятности “двойного события”

$$\mathsf{P}_u(t_0, T) := \mathsf{P}\Big\{ \sup_{t \in [0, Tu^{-2/\alpha}]} X(t) > u, \sup_{t \in [t_0 u^{-2/\alpha}, (t_0+T)u^{-2/\alpha}]} X(t) > u \Big\} \tag{6.10}$$

при $t_0 > T$ и достаточно больших u.

Оценивание начинается с замены этой вероятности большей,

$$\mathsf{P}\Big\{ \sup_{(t,s) \in [0, Tu^{-2/\alpha}] \times [t_0 u^{-2/\alpha}, (t_0+T)u^{-2/\alpha}]} \big[X(t) + X(s)\big] > 2u \Big\}.$$

Затем гауссовское поле $X(t) + X(s)$ заменяется на стационарное таким образом, чтобы можно было при помощи неравенства Слепяна оценить полученную вероятность сверху; и, наконец, к этому стационарному полю применяется аналог леммы 6.1 для полей.

Лемма 6.2 (оценка вероятности двойного события). *Пусть* ε, $0 < \varepsilon < 1/2$, *выбрано так, что*

$$1 - |t|^\alpha/2 \geqslant r(t) \geqslant 1 - 2|t|^\alpha$$

для всех $t \in [0, \varepsilon]$. *Тогда найдется константа* h *такая, что для всех* $T > 0$, $t_0 > T$, $u > u_0$ *имеет место неравенство для вероятности* (6.10):

$$\mathsf{P}_u(t_0, T) \leqslant h\Psi(u) \exp\Big\{ -\frac{1}{8}(t_0 - T)^\alpha \Big\},$$

где

$$u_0 = \left(\frac{2(t_0 + T)}{\varepsilon} \right)^{\alpha/2}.$$

Сейчас мы увидим, как используются эти две леммы в методе двойных сумм.

§ 6.2. Асимптотика распределения максимума гауссовского стационарного процесса

Теорема 6.3 [64], [246]. *Пусть для гауссовского стационарного процесса* $X(t)$, $t \in [0,1]$, *с нулевым средним и ковариационной функцией* $r(t)$ *выполнены условия* (6.3) *и* (6.4). *Тогда для любого* p, $0 < p \leqslant 1$, *при* $u \to \infty$ *имеет место соотношение*

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in[0,p]} X(t) > u\Big\} = H_\alpha p u^{2/\alpha}\Psi(u)\big(1+o(1)\big),$$

где

$$H_\alpha = \lim_{T\to\infty}\frac{H_\alpha(T)}{T}, \quad \text{причем} \quad 0 < H_\alpha < \infty.$$

Доказательство. Предварительно введем несколько обозначений, сокращающих запись. Обозначим

$$\Delta_k = \big[ku^{-2/\alpha}T, (k+1)u^{-2/\alpha}T\big], \quad T>0, \qquad N(t) = \left[\frac{t}{u^{-2/\alpha}T}\right],$$

где $[\,\cdot\,]$ – целая часть числа.

Имеем в силу стационарности

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in[0,p]} X(t) > u\Big\} \leqslant \big(N(p)+1\big)\mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in\Delta_0} X(t) > u\Big\},$$

и по лемме 6.1

$$\limsup_{u\to\infty}\frac{\mathsf{P}\big\{\sup_{t\in[0,p]} X(t) > u\big\}}{u^{2/\alpha}\Psi(u)} \leqslant p\frac{H_\alpha(T)}{T}\,. \tag{6.11}$$

Далее, в силу неравенства Бонферрони,

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in[0,p]} X(t) > u\Big\} \geqslant N(p)\mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in\Delta_0} X(t) > u\Big\} - 2\sum_{0\leqslant i<j\leqslant N(p)}\mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in\Delta_i} X(t) > u, \sup_{t\in\Delta_j} X(t) > u\Big\}.$$

Последнюю сумму будем в дальнейшем называть двойной суммой и обозначать Σ_2. Пусть ε удовлетворяет условиям леммы 6.2. Вновь используя стационарность получаем

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \sum_{k=1}^{N(p)}\big(N(p)-k\big)\mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in\Delta_0} X(t) > u, \sup_{t\in\Delta_k} X(t) > u\Big\} \\ &\leqslant N(p)\mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in\Delta_0} X(t) > u, \sup_{t\in\Delta_1} X(t) > u\Big\} \\ &\quad + N(p)\sum_{k=2}^{N(\varepsilon/4)}\mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in\Delta_0} X(t) > u, \sup_{t\in\Delta_k} X(t) > u\Big\} \\ &\quad + N(p)\sum_{k=N(\varepsilon/4)}^{N(p)}\mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in\Delta_0} X(t) > u, \sup_{t\in\Delta_k} X(t) > u\Big\} \\ &=: A_1 + A_2 + A_3. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Три слагаемых в правой части этого неравенства оцениваются по-разному. Займемся сначала оценкой последнего, A_3. Имеем

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in\Delta_0} X(t) > u,\ \sup_{t\in\Delta_k} X(t) > u\Big\} \leqslant \mathsf{P}\Big\{\sup_{(t,s)\in\Delta_0\times\Delta_k} X(t)+X(s) > 2u\Big\}. \tag{6.13}$$

К последней вероятности мы сейчас применим неравенство Бореля. Если u выбрано столь большим, что $Tu^{-2/\alpha} \leqslant \varepsilon/16$, то, в силу выбора нижнего предела суммирования в третьем слагаемом, расстояние между отрезками Δ_0 и Δ_k будет не меньше чем $\varepsilon/8$. Поэтому в силу условий теоремы для дисперсии гауссовского поля $X(t)+X(s)$, $(t,s)\in\Delta_0\times\Delta_k$, имеем

$$\operatorname{Var}\big(X(t)+X(s)\big) = 2+2r(t-s) \leqslant 4-\delta < 4,$$

где $\delta := 2\max_{s\geqslant\varepsilon/8}\big(1-r(s)\big)$.

Далее, вследствие условия (6.3) процесс X п. н. ограничен на $[0,1]$, и вероятность справа в (6.13) не превосходит выражения

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]} X(t)+X(s) > 2u\Big\} = \mathsf{P}\Big\{2\sup_{t\in[0,1]} X(t) > 2u\Big\}.$$

Поэтому число a из теоремы Бореля можно выбрать одинаковым для всех k. Учитывая это, в силу теоремы Бореля имеем

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{(t,s)\in\Delta_0\times\Delta_k} X(t)+X(s) > 2u\Big\} \leqslant 2\Psi\left(\frac{2u-a}{\sqrt{4-\delta}}\right) < 2\Psi\left(\frac{u-a/2}{1-\delta/8}\right).$$

Поскольку $N(p)$ растет как $u^{2/\alpha}$, то для последнего слагаемого в правой части (6.12) справедливо соотношение

$$\limsup_{u\to\infty}\frac{A_3}{N(p)\Psi(u)} \leqslant \limsup_{u\to\infty}\frac{2(N(p))^2\Psi\left(\dfrac{u-a/2}{1-\delta/8}\right)}{N(p)\Psi(u)} = 0. \tag{6.14}$$

Оценку сверху для A_2 – второго слагаемого в правой части (6.12) – дает лемма 6.2, поскольку пределы суммирования выбраны таким образом, чтобы все слагаемые удовлетворяли ее условиям. Имеем:

$$\begin{aligned}\limsup_{u\to\infty}\frac{A_2}{N(p)\Psi(u)} &\leqslant \limsup_{u\to\infty} h\sum_{k=2}^{N(\varepsilon/4)}\exp\big\{-((k-1)T)^\alpha/8\big\}\\ &\leqslant h\sum_1^\infty \exp\big(-(kT)^\alpha\big) \leqslant C\exp(-T^\alpha),\end{aligned} \tag{6.15}$$

где константа C зависит лишь от h и α.

Теперь рассмотрим первое слагаемое A_1. Имеем:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in\Delta_0} X(t)>u,\ \sup_{t\in\Delta_1} X(t)>u\Big\}\\ \leqslant \mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in\Delta_0} X(t)>u,\ \sup_{t\in u^{-2/\alpha}[T+\sqrt{T},2T]} X(t)>u\Big\}+\mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in[0,u^{-2/\alpha}\sqrt{T}]} X(t)>u\Big\}.\end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части этого неравенства оценивается по лемме 6.2, а второе – по лемме 6.1. Используя также следствие 6.1, получаем, что

$$\limsup_{u\to\infty}\frac{A_1}{N(p)\Psi(u)}\leqslant h\exp\bigg(-\frac{(\sqrt{T})^\alpha}{8}\bigg)+H_\alpha(1)\sqrt{T}. \tag{6.16}$$

Объединим теперь оценку сверху (6.11) и все три оценки снизу (6.14)–(6.16) частей двойной суммы. Имеем для всех $T>0$, $S>0$:

$$\begin{aligned}\frac{H_\alpha(T)}{T}\geqslant \limsup_{u\to\infty}\frac{\mathsf{P}\{\sup_{t\in[0,p]}X(t)>u\}}{pu^{2/\alpha}\Psi(u)}\geqslant\liminf_{u\to\infty}\frac{\mathsf{P}\{\sup_{t\in[0,p]}X(t)>u\}}{pu^{2/\alpha}\Psi(u)}\\ \geqslant\frac{H_\alpha(S)}{S}-\frac{C}{S}\exp(-S^\alpha)-\frac{h}{S}\exp\bigg(-\frac{(\sqrt{S})^\alpha}{8}\bigg)-\frac{H_\alpha(1)}{\sqrt{S}}.\end{aligned}\tag{6.17}$$

Предположим на время, что

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{H_\alpha(T)}{T}>0. \tag{6.18}$$

Устремляя теперь S к бесконечности, получаем, что

$$\infty>\liminf_{T\to\infty}\frac{H_\alpha(T)}{T}\geqslant\limsup_{S\to\infty}\frac{H_\alpha(S)}{S}>0,$$

откуда следует утверждение теоремы.

Осталось доказать (6.18). Для этого рассмотрим множество

$$D=\bigcup_j\Delta_{2j}\cap[0,1].$$

Имеем

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in[0,1]}X(t)>u\Big\}\geqslant\mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in D}X(t)>u\Big\}.$$

Для вероятности справа мы можем повторить процедуру оценивания снизу при помощи лемм 6.1 и 6.2, исключая лишь рассмотрение члена, аналогичного A_1, поскольку соседних интервалов Δ_j в множестве D не существует. Поэтому, используя аналог формулы (6.17), теперь получаем

$$\frac{H_\alpha(T)}{T}\geqslant\frac{H_\alpha(S)}{S}-\frac{C}{S}\exp(-S^\alpha).$$

Поскольку $H_\alpha(S)$ монотонно возрастает по S, то в силу нижней оценки из следствия 6.1 найдется такое S, что правая часть последнего неравенства положительна. Следовательно, имеет место (6.18).

§ 6.3. Асимптотика вероятности большого выброса гауссовского нестационарного процесса

Рассмотрим теперь противоположный пример: дисперсия $\sigma^2(t) = \mathsf{E}X^2(t)$ гауссовского процесса $X(t)$, $t \in [0,1]$, с нулевым средним и непрерывными траекториями достигает своего максимума, равного 1, в единственной точке t_0 отрезка $[0,1]$, которую мы для простоты будем считать внутренней. Введем следующие предположения.

(H1) *Для некоторых положительных a и β имеет место*

$$\sigma(t) = 1 - a|t-t_0|^\beta\bigl(1+o(1)\bigr), \qquad |t-t_0| \to 0.$$

(H2) (Локальная стационарность.) *Для корреляционной функции $r(t,s)$ процесса $X(t)$ справедливо соотношение*

$$r(t,s) = 1 - |t-s|^\alpha\bigl(1+o(1)\bigr), \qquad t \to t_0, \quad s \to t_0,$$

где $\alpha > 0$.

(H3) (Регулярность.) *Для некоторых $\gamma > 0$ и $c > 0$ имеет место неравенство*

$$\mathsf{E}\bigl(X(t) - X(s)\bigr)^2 \leqslant c|t-s|^\gamma.$$

Теорема 6.4 [66], [69], [72, гл. 2]. *Пусть дисперсия $\sigma^2(t)$ гауссовского процесса $X(t)$, $t \in [0,1]$, с нулевым средним и непрерывными траекториями достигает своего максимума, равного 1, в единственной точке t_0 отрезка $[0,1]$, которая является внутренней. Пусть выполнены условия* (H1)–(H3). *Тогда при $u \to \infty$ имеют место утверждения.*

(i) *Если $\beta > \alpha$, то*

$$\mathsf{P}\Bigl\{\sup_{t\in[0,1]} X(t) > u\Bigr\} = \exp\Bigl\{-\frac{u^2}{2}\Bigr\}u^{2/\alpha-2/\beta-1}\frac{2H_\alpha\Gamma(1/\beta)}{\sqrt{2\pi}\beta a^{1/\beta}}\bigl(1+o(1)\bigr).$$

(ii) *Если $\beta = \alpha$, то*

$$\mathsf{P}\Bigl\{\sup_{t\in[0,1]} X(t) > u\Bigr\} = \exp\Bigl\{-\frac{u^2}{2}\Bigr\}u^{-1}\frac{H_\alpha^a}{\sqrt{2\pi}}\bigl(1+o(1)\bigr),$$

где

$$0 < H_\alpha^a := \lim_{S\to\infty} \mathsf{E}\exp\Bigl\{\max_{t\in[-S,S]}\bigl(\chi(t) - a|t|^\alpha\bigr)\Bigr\} < \infty. \tag{6.19}$$

(iii) *Если $\beta < \alpha$, то*

$$\mathsf{P}\Bigl\{\sup_{t\in[0,1]} X(t) > u\Bigr\} = \exp\Bigl\{-\frac{u^2}{2}\Bigr\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,u}\bigl(1+o(1)\bigr).$$

Сформулированная теорема, между прочим, позволяет вычислить константу H_1. Для этого теорему 6.4 следует применить к броуновскому мосту $w_0(t)$, см. определение перед теоремой 3.10. Сопоставляя известное распределение максимума модуля броуновского моста – распределение Колмогорова – с теоремой 6.4 в случае $\beta = 2$, $\alpha = 1$, имеем

$$H_1 = 1. \tag{6.20}$$

Есть и другие вычислимые случаи. Заметим, что если $\alpha = 2$, то процесс $\chi(t) - a|t|^\alpha$ является случайной гауссовской параболой, ветви которой при $a > 0$ опущены вниз и значение максимума которой легко найти. Учитывая указанное соображение, после монотонного предельного перехода под знаком математического ожидания получаем

$$H_2^a = \sqrt{\frac{1+a}{a}}\,. \tag{6.21}$$

Стоит заметить также, что из теоремы 6.3 можно получить значение константы H_2. Для этого достаточно сравнить асимптотику, даваемую теоремой 6.3 с известной формулой Райса для среднего числа пересечений уровня гладким стационарным гауссовским процессом, см. [38, гл. 10], а также [131],

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,. \tag{6.22}$$

Доказательство теоремы 6.4. Мы приведем лишь основные этапы доказательства, опуская понятные, хотя и требующие достаточных усилий, выкладки, похожие на оценку двойной суммы в доказательстве теоремы 6.3.

Заменив процесс $X(t)$ на $X(t-t_0)$, мы можем считать далее, что $t_0 = 0$; параметрическое множество ради удобства записи будем полагать равным отрезку $[-1/2, 1/2]$.

Первый этап (*точное неравенство для вероятности высокого выброса гауссовского процесса, удовлетворяющего условию Гёльдера*). Из теоремы 6.1 с помощью неравенства Слепяна можно получить следующее утверждение.

Теорема 6.5 [98, теорема 5.2]. *Пусть $X(t)$ – гауссовский процесс с нулевым средним и непрерывными траекториями, заданный на $[0,T]$. Пусть существуют положительные константы G и γ такие, что для всех $t,s \in [0,T]$ выполнено неравенство*

$$\mathsf{E}\big(X(t) - X(s)\big)^2 \leqslant G|t-s|^\gamma.$$

Тогда найдется константа C, зависящая лишь от G и γ, такая, что для любого борелевского множества $A \subset [0,T]$

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_A X(t) > u\Big\} \leqslant CTu^{2/\gamma-1}\exp\Big\{-\frac{u^2}{2\sigma^2(A)}\Big\}, \tag{6.23}$$

где $\sigma^2(A) := \sup_A \mathsf{E}X^2(t)$.

Доказательство теоремы 6.5 (подробности см. в [72, гл. 2]) основано на очевидном сравнении вероятностей превышения уровня данным процессом и процессом $\sigma(A)X(t)/\sqrt{\mathsf{E}X^2(t)}$, $t \in A$. Затем последняя вероятность сравнивается при помощи теоремы Слепяна с аналогичной вероятностью для гауссовского стационарного процесса с дисперсией $\sigma^2(A)$ и ковариационной функцией $R(t)$, удовлетворяющей условию

$$\sigma^2(A) - R(t-s) \geqslant G|t-s|^\gamma, \qquad t, s \in A.$$

К этому стационарному процессу, распространенному на весь отрезок $[0,1]$, применяется теорема 6.1.

Второй этап (*выделение окрестности точки максимума дисперсии, вносящей основной вклад в асимптотику*). Этот пункт доказательства аналогичен утверждениям лемм 3.2 и 3.6 из изложения "традиционного" метода Лапласа в разделе 3 настоящего обзора.

Обозначим $\delta := u^{-2/\beta}(\log u)^{2/\beta}$, $A = [-1/2, 1/2] \setminus [-\delta, \delta]$. Для достаточно больших u имеем

$$\sigma^2(A) \leqslant 1 - \frac{a}{2}\delta^\beta,$$

и в силу (6.23)

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_A X(t) > u\Big\} \leqslant CTu^{2/\gamma-1}\exp\Big\{-\frac{u^2}{2 - au^{-2}\log^2 u}\Big\}.$$

Легко подсчитать, что правая часть этого неравенства стремится к нулю быстрее, чем $\mathsf{P}\{X(0) > u\}$. Замечая, что последняя вероятность не больше, чем исследуемая, получаем

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in[-1/2,1/2]} X(t) > u\Big\} = \mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in[-\delta,\delta]} X(t) > u\Big\}\big(1 + o(1)\big), \qquad u \to \infty. \tag{6.24}$$

Это соотношение показывает также, что размеры параметрического множества никак не влияют на асимптотику распределения максимума.

Третий этап (*исследование стандартного процесса*). Рассмотрим гауссовский процесс

$$Y_{b,d}(t) \equiv Y(t) := \frac{\xi(t)}{1 + b|t|^\beta}\,, \qquad t \in [-\varepsilon, \varepsilon], \quad \varepsilon > 0,$$

где $\xi(t)$ – гауссовский стационарный процесс с нулевым средним и ковариационной функцией $r(t) = \exp\{-d|t|^\alpha\}$, $b > 0$, $d > 0$. Мы найдем асимптотику вероятности

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in[-\delta,\delta]} Y(t) > u\Big\}$$

и затем при помощи неравенства Слепяна покажем, что, выбирая параметры b и d процесса $Y(t)$, можно оценить снизу и сверху с требуемой точностью вероятность, стоящую справа в (6.24).

(i) Случай $\beta > \alpha$. Обозначим $\Delta = Su^{-2/\alpha}$, $\Delta_k = [k\Delta, (k+1)\Delta]$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Введем события

$$A_k = \begin{cases} \Big\{\sup_{\Delta_k} \xi(t) \geqslant u\big(1 + b|(k+1)\Delta|^\beta\big)\Big\}, & \text{если } k < 0, \\ \Big\{\sup_{\Delta_k} \xi(t) \geqslant u\big(1 + b|k\Delta|^\beta\big)\Big\}, & \text{если } k \geqslant 0; \end{cases}$$

$$A'_k = \begin{cases} \Big\{\sup_{\Delta_k} \xi(t) \geqslant u\big(1 + b|(k+1)\Delta|^\beta\big)\Big\}, & \text{если } k \geqslant 0, \\ \Big\{\sup_{\Delta_k} \xi(t) \geqslant u\big(1 + b|k\Delta|^\beta\big)\Big\}, & \text{если } k < 0. \end{cases}$$

Очевидно неравенство:

$$\sum_{-\delta/\Delta - 1 \leqslant k \leqslant \delta/\Delta} \mathsf{P}(A_k) \geqslant \mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in[-\delta,\delta]} Y(t) > u\Big\}$$
$$\geqslant \sum_{-\delta/\Delta \leqslant k \leqslant \delta/\Delta - 1} \mathsf{P}(A'_k) - \sum_{-\delta/\Delta \leqslant k \leqslant \delta/\Delta - 1} \ \sum_{-\delta/\Delta \leqslant l \leqslant \delta/\Delta - 1, l \neq k} \mathsf{P}(A_k \cap A_l).$$

При помощи леммы 6.1 убеждаемся, что одинарные суммы вероятностей в правой и левой частях этого неравенства представляют собой “почти интегральные суммы” с шагом S^{-1}. Двойная сумма в правой части оценивается по схеме оценивания двойной суммы в доказательстве теоремы 6.3. Достаточно длинные, но вполне тривиальные вычисления, проведенные по этой схеме приводят к асимптотике

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in[-\delta,\delta]} Y_{b,d}(t) > u\Big\} = \exp\Big\{-\frac{u^2}{2}\Big\} u^{2/\alpha - 2/\beta - 1} \frac{2H_\alpha \Gamma(1/\beta) d^{1/\alpha}}{\sqrt{2\pi}\,\beta b^{1/\beta}} \big(1 + o(1)\big).$$

(ii) Случай $\alpha = \beta$. Вычисления здесь сильно отличаются от первого, “почти стационарного” случая. Основу анализа составляет следующая модификация леммы 6.1.

Лемма 6.3. *Если $\alpha = \beta$, то для любого $S > 0$ имеет место соотношение*

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in[-Su^{-2/\alpha}, Su^{-2/\alpha}]} Y(t) > u\Big\} = \Psi(u) H_\alpha^b(S)\big(1 + o(1)\big), \qquad u \to \infty,$$

где

$$H_\alpha^b(S) = \mathsf{E}\exp\Big\{\max_{t\in[-S,S]} \big(\chi(t) - b|t|^\alpha\big)\Big\} < \infty.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 6.1 и имеется в [72, гл. 2].

Вывод асимптотики далее основан на неравенстве

$$0 \leqslant \mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in[-\delta,\delta]} Y(t) > u\Big\} - \mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in[-Su^{-2/\alpha}, Su^{-2/\alpha}]} Y(t) > u\Big\}$$
$$\leqslant \sum_{k\neq 0, k\neq -1, |k| \leqslant \delta/\Delta + 1} \mathsf{P}(A_k).$$

Используя лемму 6.1, нетрудно показать, что последняя сумма мажорируется для всех достаточно больших u функцией $C\exp\{-cS^\alpha\}$. Рассуждения, аналогичные доказательству существования предела в теореме 6.3, приводят к доказательству существования положительного предела

$$H_\alpha^b := \lim_{S\to\infty} H_\alpha^b(S).$$

(iii) Случай $\alpha > \beta$. Отметим, что теперь $\delta = o(\Delta)$, $u \to \infty$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$, всех достаточно больших u и некоторой функции $\varkappa(u)$, $\varkappa(u) \to 0$ при $u \to \infty$, имеем

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\Bigl\{\sup_{t\in[-\delta,\delta]} Y(t) > u\Bigr\} &\leqslant \mathsf{P}\Bigl\{\sup_{t\in[-\varepsilon u^{-2/\alpha},\varepsilon u^{-2/\alpha}]} Y(t) > u\Bigr\}\\ &\leqslant \mathsf{P}\Bigl\{\sup_{t\in[-\varepsilon u^{-2/\alpha},\varepsilon u^{-2/\alpha}]} \xi(t) > u\Bigr\}\\ &\leqslant H_\alpha(2\varepsilon)\Psi(u)\bigl(1+\varkappa(u)\bigr).\end{aligned}$$

Но в силу теоремы о монотонной сходимости под знаком интеграла, $H_\alpha(\varepsilon) \to 1$ при $\varepsilon \to 0$. Оценка снизу очевидна.

Четвертый этап (*сравнение стандартного процесса с исследуемым*). Выбирая теперь $d = 1+\varepsilon$, $b = a-\varepsilon$ и используя монотонность вероятности (6.23) относительно дисперсии и относительно ковариации (неравенство Слепяна), мы получим, что для достаточно малых δ

$$\mathsf{P}\Bigl\{\sup_{t\in[-\delta,\delta]} Y_{a-\varepsilon,1+\varepsilon}(t) > u\Bigr\} \geqslant \mathsf{P}\Bigl\{\sup_{t\in[-\delta,\delta]} X(t) > u\Bigr\}.$$

Аналогично выводится оценка снизу. Параметры процесса Y не меняют порядок асимптотик, а лишь непрерывно меняют коэффициенты при главном члене. Это доказывает теорему 6.4.

Асимптотические разложения для вероятностей больших выбросов гауссовских процессов получены в работах [35], [65], [71], см. также [69], [72].

7. Вероятности больших уклонений траекторий гауссовских полей

Рассмотренные в предыдущем разделе примеры позволяют понять, как следует поступать при вычислении асимптотики вероятности (6.1) в более сложных ситуациях. Общий подход таков: определить множество достижения максимума дисперсией поля, выяснить локальную ковариационную структуру поля в окрестности этого множества, построить разбиение этого множества на малые параллелепипеды в соответствии с локальной структурой по каждой координате и действовать следуя одной из четырех схем, описанных в теоремах 6.3 и 6.4.

§ 7.1. Однородные поля и поля с постоянной дисперсией

Схема исследования однородных полей совпадает с одномерным случаем, появляются лишь технические трудности, связанные с размерностью. Пожалуй, единственная принципиальная трудность – это определение многомерного аналога свойства (6.3) регулярности ковариации в нуле. Ниже мы дадим два таких определения.

Пусть заданы положительные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ и натуральные числа $e_1, \dots, e_k$ такие, что $\sum_{i=1}^k e_i = n$, положим также $e_0 = 0$. Для вектора $\boldsymbol{t} = (t_1, \dots, t_n)$ введем величину

$$|\boldsymbol{t}|_\alpha := \sum_{i=1}^k \biggl(\sum_{j=E(i-1)+1}^{E(i)} t_j^2 \biggr)^{\alpha_i/2}, \tag{7.1}$$

где $E(i) = \sum_{j=0}^i e_j$, $i = 1, \dots, k$.

Обозначим через $\chi(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n$, гауссовское поле с п. н. непрерывными траекториями, для которого

$$\mathsf{E}\chi(\boldsymbol{t}) = -|\boldsymbol{t}|_\alpha, \qquad \operatorname{Cov}\bigl(\chi(\boldsymbol{t}), \chi(\boldsymbol{s})\bigr) = |\boldsymbol{t}|_\alpha + |\boldsymbol{s}|_\alpha - |\boldsymbol{t} - \boldsymbol{s}|_\alpha.$$

Поле $\chi(\boldsymbol{t})$ существует, оно впервые было введено в статье [3]. Там же было доказано существование положительного предела

$$0 < H_\alpha := \lim_{S\to\infty} \frac{H_\alpha(S)}{S^n} < \infty,$$

где

$$H_\alpha(S) = \mathsf{E} \exp\Bigl\{ \sup_{t\in[0,S]^n} \chi(\boldsymbol{t}) \Bigr\}.$$

Напомним, что $|\boldsymbol{t}|$ обозначает евклидову норму вектора $\boldsymbol{t}$.

Теорема 7.1 [3] (см. также [132], [252]). *Пусть $X(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n$, – гауссовское однородное поле с нулевым средним. Пусть найдется невырожденная матрица C такая, что ковариационная функция $r(\boldsymbol{t})$ этого поля удовлетворяет условию*

$$r(C\boldsymbol{t}) = 1 - |\boldsymbol{t}|_\alpha + o\bigl(|\boldsymbol{t}|_\alpha\bigr), \qquad |\boldsymbol{t}| \to 0. \tag{7.2}$$

Тогда для любого жорданова множества T ненулевой меры Лебега и такого, что

$$r(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{s}) < 1 \quad \textit{для всех} \quad \boldsymbol{t}, \boldsymbol{s} \in \overline{T}$$

($\overline{T}$ – замыкание множества T), имеет место соотношение

$$\mathsf{P}\Bigl\{ \sup_{\boldsymbol{t}\in T} X(\boldsymbol{t}) > u \Bigr\} = H_\alpha |\det C|^{-1} \operatorname{mes}(T) \prod_{i=1}^k u^{2e_i/\alpha_i} \Psi(u)\bigl(1 + o(1)\bigr),$$

где $\operatorname{mes}(\,\cdot\,)$ обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Эта теорема достаточно элементарно обобщается на неоднородные гауссовские поля с постоянной дисперсией и постоянной структурой ковариации. Перед формулировкой соответствующего утверждения мы введем другое определение регулярного поведения ковариации однородного поля в нуле. Видимо, результаты, аналогичные приведенным в этом разделе, можно получить для однородных полей с корреляционными функциями, по каждому направлению правильно меняющимися в нуле с положительным индексом Караматы (ср. [252]).

Пусть $\boldsymbol{G}_n$ – многообразие неотрицательно определенных матриц размера $n \times n$ с евклидовой нормой, равной единице. Зададим $\alpha > 0$. На борелевских подмножествах многообразия $\boldsymbol{G}_n$ зафиксируем конечную меру $\mu(dC)$ со следующим свойством невырожденности:

$$\|\boldsymbol{t}\|_\mu := \int_{\boldsymbol{G}_n} (C\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t})^{\alpha/2} \, \mu(dC) > 0 \quad \text{для любого} \quad \boldsymbol{t} \neq \boldsymbol{0}. \tag{7.3}$$

Определение 7.1. Ковариационную функцию $r(\boldsymbol{t})$ однородного поля назовем *μ-правильной*, если существует матрица Q размера $n\times n$ полного ранга такая, что для любого $\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^n$ имеет место

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1-r(\tau^{2/\alpha}Q\boldsymbol{t})}{\tau^2}=\|\boldsymbol{t}\|_\mu.$$

Мера μ задает локальную структуру корреляции случайного поля. Например, если μ есть δ-мера, сосредоточенная на единичной матрице, то

$$r(Q\boldsymbol{t})=1-|\boldsymbol{t}|^\alpha+o\bigl(|\boldsymbol{t}|^\alpha\bigr),\qquad \boldsymbol{t}\to\mathbf{0}. \tag{7.4}$$

Если μ сосредоточена на диагональных матрицах с одинаковым ненулевым элементом на главной диагонали, то

$$r(Q\boldsymbol{t})=1-\sum_{i=1}^n c_i|t_i|^\alpha+o\biggl(\sum_{i=1}^n c_i|t_i|^\alpha\biggr),\qquad \boldsymbol{t}\to\mathbf{0}.$$

Рассматривая смеси мер, сосредоточенных на матрицах, являющихся линейными преобразованиями вышеприведенных, можно получить достаточно широкий набор локальных структур корреляций, в частности, корреляционные функции типа (7.2) с одинаковыми α_i. Особым является случай $\alpha=2$, поскольку квадратичная форма $(C\boldsymbol{t},\boldsymbol{t})$ интегрируется, и независимо от структурной меры μ корреляционная функция поля имеет разложение

$$r(\boldsymbol{t})=1-\frac{1}{2}(D\boldsymbol{t},\boldsymbol{t})+o\bigl(|\boldsymbol{t}|^2\bigr),\qquad \boldsymbol{t}\to\mathbf{0}, \tag{7.5}$$

где D – ковариационная матрица градиента поля, которая невырождена в силу условия невырожденности меры μ.

Определение 7.2. Скажем, что ковариационная функция $r(\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2)$ неоднородного поля $X(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t}\in T\subset\mathbb{R}^n$, *удовлетворяет условию локальной стационарности*, если $\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0$ такое, что $\forall\,\boldsymbol{s}\in T$ существует невырожденная матрица D_s такая, что

$$\begin{gathered}\forall\,\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2\in T,\ |\boldsymbol{s}-\boldsymbol{t}_1|\leqslant\delta,\ |\boldsymbol{s}-\boldsymbol{t}_2|\leqslant\delta,\\(1-\varepsilon)\|\boldsymbol{t}_1-\boldsymbol{t}_2\|_\mu\leqslant 1-r(D_{\boldsymbol{s}}\boldsymbol{t}_1,D_{\boldsymbol{s}}\boldsymbol{t}_2)\leqslant(1+\varepsilon)\|\boldsymbol{t}_1-\boldsymbol{t}_2\|_\mu.\end{gathered}$$

Введем обобщенные константы Пикандса, порожденные функционалом $\|\boldsymbol{t}\|_\mu$. Пусть $L\subset\mathbb{R}^n$ – линейное подпространство размерности r, $0<r<n$. Тогда существует ортогональное преобразование U пространства $\mathbb{R}^n$ такое, что $L=U\mathrm{P}_r\mathbb{R}^n$, где P_r – ортогональный проектор вдоль координат $r+1,\dots,n$ пространства $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим гауссовское поле $\chi(\boldsymbol{t})$ на $\mathbb{R}^n$ с непрерывными траекториями и

$$\begin{gathered}\mathsf{E}\chi(\boldsymbol{t})=-\|\boldsymbol{t}\|_\mu,\\\operatorname{Cov}\bigl(\chi(\boldsymbol{t}_1),\chi(\boldsymbol{t}_2)\bigr)=\|\boldsymbol{t}_1\|_\mu+\|\boldsymbol{t}_2\|_\mu-\|\boldsymbol{t}_1-\boldsymbol{t}_2\|_\mu.\end{gathered}$$

Пусть $K \subset L$ – компакт, положим

$$H_\alpha^{\mu,r}(K) = 1 + \int_0^\infty e^s \mathsf{P}\Big\{\sup_{\boldsymbol{t}\in K} \chi(\boldsymbol{t}) > s\Big\}\, ds. \tag{7.6}$$

Обозначим через $K(S)$ куб из L с ребром длины S:

$$K(S) = UK_0(S),$$
$$K_0(S) = \big\{\boldsymbol{t} : t_1 \in [0,S], \dots, t_r \in [0,S],\ t_{r+1} = \dots = t_n = 0\big\}.$$

Для константы

$$H_\alpha^{\mu,U,r} = \lim_{S\to\infty} \frac{H_\alpha^{\mu,r}(K(S))}{S^r}, \tag{7.7}$$

как и для ранее введенных констант Пикандса, имеем

$$0 < H_\alpha^{\mu,U,r} < \infty.$$

Теорема 7.2 [73]. *Пусть $X(\boldsymbol{t})$ – гауссовское поле с нулевым средним, заданное на $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим гладкий компакт $\boldsymbol{M}^r \subset \mathbb{R}^n$, $\dim \boldsymbol{M}^r = r$, где $0 < r < n$. Пусть ковариационная функция $r(\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2)$ поля $X(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{M}^r$, удовлетворяет условию локальной стационарности. Тогда*

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{\boldsymbol{t}\in\boldsymbol{M}^r} X(\boldsymbol{t}) > u\Big\} = u^{2r/\alpha}\Psi(u)\int_{\boldsymbol{M}^r} H_\alpha^{\mu,U_{\boldsymbol{s}},r}\, d\boldsymbol{s}\big(1+o(1)\big), \qquad u\to\infty,$$

где $U_{\boldsymbol{s}}^* \mathrm{P}_r U_{\boldsymbol{s}} \mathbb{R}^n$ – r-мерное линейное подпространство, параллельное касательному r-мерному аффинному подпространству к $\boldsymbol{M}^r$ в точке $\boldsymbol{s}$.

Теорема 7.3 [73]. *Пусть $X(\boldsymbol{t})$ – дифференцируемое в среднем квадратическом центрированное гауссовское поле, заданное на $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим гладкий компакт $\boldsymbol{M}^r \subset \mathbb{R}^n$, $\dim \boldsymbol{M}^r = r$, где $0 < r < n$. Пусть ковариационная функция $r(\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2)$ поля $X(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{M}^r$, удовлетворяет условию локальной стационарности. Тогда*

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{\boldsymbol{t}\in\boldsymbol{M}^r} X(\boldsymbol{t}) > u\Big\} = \frac{u^r}{(2\pi)^{r/2}}\Psi(u)\int_{\boldsymbol{M}^r} |\det \widetilde{D}_{\boldsymbol{s}}|^{1/2}\, d\boldsymbol{s}\big(1+o(1)\big), \qquad u\to\infty,$$

где $\widetilde{D}_{\boldsymbol{s}}$ – ковариационная матрица проекции градиента поля $X(\boldsymbol{t})$ на касательное r-мерное аффинное подпространство к $\boldsymbol{M}^r$ в точке $\boldsymbol{s}$.

Приложения результатов типа теорем 7.2, 7.3 в статистике см. в [249].

§ 7.2. Конечное число точек максимума дисперсии

Приведенные в этом параграфе результаты являются обобщением теоремы 6.4 на многомерный случай. Однако, в отличие от случая стационарных процессов и полей, это обобщение далеко не столь очевидно. Дело в том, что взаимоотношения поведений корреляции и дисперсии в окрестности точки максимума дисперсии могут быть различны по разным направлениям. Более того, могут не совпадать структуры поведений дисперсии и корреляции. Для некоторого упрощения формулировок приведенных здесь результатов мы будем считать, что все числа e_i в определении (7.1) одинаковы и равны 1, т.е.

$$|\boldsymbol{t}|_\alpha = \sum_{i=1}^{n} |t_i|^{\alpha_i}. \tag{7.8}$$

Пусть $X(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t} \in T$, – гауссовское поле с непрерывными траекториями и нулевым средним, заданное на компакте $T \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим его дисперсию через $\sigma^2(\boldsymbol{t})$, а корреляционную функцию – через $r(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{s})$. Введем многомерные аналоги условий (H1)–(H3).

($\widetilde{\mathrm{H}}1$) *$\sigma^2(\boldsymbol{t})$ имеет единственную точку $\boldsymbol{t}_0$ достижения своего максимума σ^2 на компакте T, $\boldsymbol{t}_0$ является внутренней точкой и имеет место разложение*:

$$\sigma(\boldsymbol{t}) = \sigma - |A(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{t}_0)|_\beta \big(1 + o(1)\big), \qquad |\boldsymbol{t} - \boldsymbol{t}_0| \to 0,$$

где A – некоторая невырожденная матрица размера $n \times n$,

$$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n), \qquad \beta_i > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

($\widetilde{\mathrm{H}}2$) (Локальная стационарность.) *Имеет место соотношение*

$$r(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{s}) = 1 - |D(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{s})(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{s})|_\alpha \big(1 + o(1)\big), \qquad \boldsymbol{t} \to \boldsymbol{t}_0, \quad \boldsymbol{s} \to \boldsymbol{t}_0,$$

где $D(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{s}) = d_{ij}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{s})_{i,j=\overline{1,n}}$ – матричная функция, непрерывная в некоторой окрестности точки $(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}_0)$, причем $\det D(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}_0) \neq 0$.

($\widetilde{\mathrm{H}}3$) (Регулярность.) *Найдутся $c > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что для всех $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{s} \in T$ имеет место по крайней мере одно из неравенств*

(i) $|1 - r(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{s})| \leqslant c \sum_{i=1}^n |t_i - s_i|^\gamma$,

(ii) $\mathsf{E}\big(X(\boldsymbol{t}) - X(\boldsymbol{s})\big)^2 \leqslant c \sum_{i=1}^n |t_i - s_i|^\gamma$.

Введем еще одно обобщение констант Пикандса. Оно введено в [175, I]. Пусть $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_n)$, $b_i > 0$, – вектор с положительными координатами и C – невырожденная $n \times n$ матрица. Положим

$$H_\alpha^{\boldsymbol{b}}(S; C) := \mathsf{E} \exp\Big\{ \sup_{\boldsymbol{t} \in [-S, S]^n} \Big(\chi(C\boldsymbol{t}) - \sum_{i=1}^{n} b_i |t_i|^{\alpha_i} \Big) \Big\}, \tag{7.9}$$

где $\chi(\boldsymbol{t})$ – поле, введенное в начале § 7.1.

В [175, I, теорема 1.2 (ii)] показано, что

$$0 < H_\alpha^{\boldsymbol{b}}(C) := \lim_{S\to\infty} H_\alpha^{\boldsymbol{b}}(S;C) < \infty.$$

Обозначим $D = D(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}_0)$,

$$\alpha^{(m)} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m), \qquad \alpha^{(m,n)} = (\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n),$$

где $m \leqslant n$ – натуральное число.

Теорема 7.4 [175, I]. *Пусть $X(\boldsymbol{t})$ – гауссовское случайное поле с нулевым средним, заданное на компактном множестве $T \subset \mathbb{R}^n$. Пусть выполнены условия ($\widetilde{\mathrm{H}}1$)–($\widetilde{\mathrm{H}}3$). Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) *Предположим, что матрицы A и D являются диагональными,*

$$A = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n), \quad D = diag\,(d_1, \dots, d_n), \qquad a_i \neq 0, \quad d_i \neq 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Пусть для некоторого целого m, $1 \leqslant m \leqslant n$, выполнено

$$\alpha_i < \beta_i, \quad i = 1, \dots, m; \qquad \alpha_i > \beta_i, \quad i = m+1, \dots, n.$$

Тогда

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{\boldsymbol{t}\in T} X(\boldsymbol{t}) > u\Big\} = \exp\Big\{-\frac{u^2}{2\sigma^2}\Big\}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\,u}\prod_{i=1}^m \bigg[\Big(\frac{u}{\sigma}\Big)^{2/\alpha_i}\Big(\frac{u^2}{\sigma^3}\Big)^{-1/\beta_i}\frac{|d_i|}{\beta_i|a_i|}\Gamma\Big(\frac{1}{\beta_i}\Big)\bigg]$$
$$\times \prod_{i=m+1}^n \big[\sigma^{-1/\beta_i}|a_i|\big] 2^m H_{\alpha^{(m)}}\big(1 + o(1)\big), \qquad u \to \infty.$$

(ii) *Если $\alpha_i = \beta_i$, $i = 1, \dots, n$, то*

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{\boldsymbol{t}\in T} X(\boldsymbol{t}) > u\Big\} = \exp\Big\{-\frac{u^2}{2\sigma^2}\Big\}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\,u} H_\alpha^{\frac{1}{\sigma}\boldsymbol{1}}(DA^{-1})\big(1 + o(1)\big), \qquad u \to \infty,$$

где $\boldsymbol{1} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, A^{-1} – обратная матрица к A.

(iii) *Пусть для некоторого целого m, $0 \leqslant m \leqslant n$, матрицы A и D имеют вид*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix},$$

где A_1, D_1 – матрицы размера $(m \times m)$, A_2, D_2 – матрицы размера $(n-m) \times (n-m)$. Если

$$\alpha_i < \beta_j, \quad i,j = 1, \dots, m; \qquad \alpha_i = \beta_i, \quad i = m+1, \dots, n,$$

то

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{\boldsymbol{t}\in T} X(\boldsymbol{t}) > u\Big\} = \exp\Big\{-\frac{u^2}{2\sigma^2}\Big\}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\,u}\prod_{i=1}^m \bigg[\Big(\frac{u}{\sigma}\Big)^{2/\alpha_i}\Big(\frac{u^2}{\sigma^3}\Big)^{-1/\beta_i}\frac{1}{\beta_i}\Gamma\Big(\frac{1}{\beta_i}\Big)\bigg]$$
$$\times 2^m |\det D_1|\,|\det A_1|^{-1} H_{\alpha^{(m)}} H_{\alpha^{(m,n)}}^{\frac{1}{\sigma}\boldsymbol{1}}(D_2 A_2^{-1})\big(1 + o(1)\big), \qquad u \to \infty.$$

(iv) *Пусть A и D – такие же, как и в* (iii), *но*

$$\alpha_i > \beta_i, \quad i = 1, \dots, m; \qquad \alpha_i = \beta_i, \quad i = m+1, \dots, n.$$

Тогда

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{\boldsymbol{t}\in T} X(\boldsymbol{t}) > u\Big\} = \exp\Big\{-\frac{u^2}{2\sigma^2}\Big\}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\,u} H_{\alpha(m,n)}^{\frac{1}{\sigma}\mathbf{1}}(D_2 A_2^{-1})\big(1+o(1)\big), \quad u \to \infty.$$

По-видимому, эта теорема делает реальным вычисление исследуемой асимптотики для произвольных положительных α_i, β_i и невырожденных матриц A и D. Здесь следует отметить важное свойство факторизации многомерных констант Пикандса H_α, $H_\alpha^{\boldsymbol{b}}$, $H_\alpha^{\boldsymbol{b}}(C)$ (для диагональных C) – представление указанных величин в виде произведения одномерных констант Пикандса, введенных в разделе 6 (подробности см. в [72, гл. 2] и [175]). Это свойство факторизации вместе с формулами (6.20)–(6.22) позволяет найти некоторые важные частные значения многомерных констант Пикандса, примеры см. в § 7.4, 8.1.

Упомянем также, что в [175, I] теорема 7.4 доказана для более общих структур локального поведения корреляций, определяемых посредством (7.1).

Замечание 7.1. Пусть в условиях теоремы 7.4 дисперсия гауссовского поля достигает своего абсолютного максимума в нескольких изолированных точках, причем взаимные корреляции значений поля в этих точках меньше единицы. Тогда при помощи неравенства Бореля нетрудно показать, что асимптотика вероятности (6.1) равна сумме асимптотик, вычисленных по соответствующим формулам теоремы 7.4.

Замечание 7.2. Несложно показать (см. [72, гл. 2] или [175, I, следствие 2.1]), что в условиях теорем типа 6.3, 6.4, 7.1–7.5 имеет место равенство

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{\boldsymbol{t}\in T} |X(\boldsymbol{t})| > u\Big\} = 2\mathsf{P}\Big\{\sup_{\boldsymbol{t}\in T} X(\boldsymbol{t}) > u\Big\}\big(1+o(1)\big), \qquad u \to \infty.$$

Ниже мы дадим примеры применения теоремы 7.4.

§ 7.3. Многообразие точек максимума дисперсии

Пожалуй, здесь имеется лишь один общий результат, а именно, в случае, когда дисперсия поля достигает своего максимума на многообразии размерности на единицу меньшей размерности параметрического множества. Сформулируем соответствующие условия. Обозначения предыдущего параграфа сохранены.

(I1) *Дисперсия $\sigma^2(\boldsymbol{t})$ гауссовского непрерывного поля $X(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t} \in T \subset \mathbb{R}^n$, достигает своего максимума σ^2 во всех точках множества $T_0 := \big\{\boldsymbol{t} \in T : G(\boldsymbol{t}) = 0\big\}$, причем для некоторого $\beta > 0$ имеет место соотношение*

$$\sigma(\boldsymbol{t}) = \sigma - |G(\boldsymbol{t})|^\beta\big(1+o(1)\big), \qquad G(\boldsymbol{t}) \to 0.$$

Пусть функция $G(\boldsymbol{t})$ удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции:

a) *для некоторого* $\varepsilon > 0$ *функция* $G(\boldsymbol{t})$ *определена и непрерывна на множестве*

$$T_0^\varepsilon := \Big\{\boldsymbol{t} \in T : \inf_{\boldsymbol{s}\in T_0} |\boldsymbol{t}-\boldsymbol{s}| \leqslant \varepsilon\Big\};$$

b) *имеет место представление*

$$T_0^\varepsilon = \bigcup_{i=1}^n T_i,$$

причем для каждого i *существует и непрерывна производная*

$$\frac{\partial}{\partial t_i} G(\boldsymbol{t}), \qquad \boldsymbol{t} \in T_i;$$

c)

$$\frac{\partial}{\partial t_i} G(\boldsymbol{t}) \neq 0, \qquad \boldsymbol{t} \in T_i \cap T_0, \quad i = 1, \dots, n.$$

(I2) *Для некоторого открытого в* $\mathbb{R}^n$ *множества* U *имеет место включение* $T_0 \subset \overline{U} \subset T$.

(I3) *Для любого* $\tau > 0$ *справедливо*

$$\sup\big\{R(\boldsymbol{t},\boldsymbol{s}) : \boldsymbol{t},\boldsymbol{s} \in T_0^\varepsilon,\ |\boldsymbol{t}-\boldsymbol{s}| \geqslant \tau\big\} < \sigma^2,$$

где $R(\boldsymbol{t},\boldsymbol{s})$ *– ковариационная функция поля* $X(\boldsymbol{t})$.

Теорема 7.5. *Пусть* $X(\boldsymbol{t})$ *– гауссовское случайное поле, заданное на компактном множестве* $T \subset \mathbb{R}^n$ *со средним нуль и непрерывными п. н. траекториями. Пусть выполнены условия* (I1)–(I3), $(\widetilde{\mathrm{H}}2)$, $(\widetilde{\mathrm{H}}3)$ *и* $\beta > \max_{1\leqslant i\leqslant n}\alpha_i$. *Пусть функция* $\delta(u)$ *такова, что при* $u \to \infty$ *имеют место соотношения*

$$\delta(u) \downarrow 0, \quad u\delta^\beta(u) \to 0, \quad \frac{u^2\delta^\beta(u)}{\ln u} \to \infty.$$

Тогда

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{\boldsymbol{t}\in T} X(\boldsymbol{t}) > u\Big\} = \exp\Big\{-\frac{u^2}{2\sigma^2}\Big\}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\,u}\prod_{i=1}^n\Big(\frac{u}{\sigma}\Big)^{2/\alpha_i} H_\alpha \times \int_{T_\delta} \exp\Big\{-\frac{u^2}{\sigma^3}|G(\boldsymbol{t})|^\beta\Big\}|\det D(\boldsymbol{t},\boldsymbol{t})|\,d\boldsymbol{t}\big(1+o(1)\big), \qquad u \to \infty,$$

где $T_\delta := \big\{\boldsymbol{t} \in T : |G(\boldsymbol{t})| \leqslant \delta(u)\big\}$.

Доказательство теоремы 7.5 имеется в [175, I, II]. Там же содержится другой результат подобного рода (теорема 1.1 в [175, I]) с произвольным компактным множеством точек максимума дисперсии. Асимптотики распределений максимумов гауссовских полей исследовались в работах [97], [98], [103], [201], [258], см. также [264], [275], [276]. Некоторые асимптотические разложения для гладких полей имеются в [72].

§ 7.4. Асимптотики распределений максимумов винеровских полей

Пусть $W(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t} \in [0,1]^n$, – винеровское поле Йеха–Ченцова [95], [290], т.е. гауссовское случайное поле с п.н. непрерывными траекториями, средним нуль и ковариационной функцией

$$\mathsf{E}W(\boldsymbol{t})W(\boldsymbol{s}) = \prod_{i=1}^{n} \min(t_i, s_i).$$

Поле $W(\boldsymbol{t})$ называется также многопараметрическим броуновским движением и является многомерным аналогом стандартного винеровского процесса. Оно присутствует во многих задачах многомерной статистики, теории многопараметрических мартингалов и стохастических дифференциальных уравнений.

Теорема 7.6 [70], [72, гл. 2]. *Имеет место соотношение*

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\Big\{\sup_{\boldsymbol{t}\in[0,1]^n} |W(\boldsymbol{t})| > u\Big\} &= 2\mathsf{P}\Big\{\sup_{\boldsymbol{t}\in[0,1]^n} W(\boldsymbol{t}) > u\Big\}\big(1+o(1)\big)\\ &= \exp\Big\{-\frac{u^2}{2}\Big\}u^{-1}2^{n+1}(2\pi)^{-1/2}\big(1+o(1)\big), \qquad u\to\infty.\end{aligned}$$

Дисперсия $\sigma^2(\boldsymbol{t}) = \prod_{i=1}^n t_i$ поля $W(\boldsymbol{t})$ достигает на $[0,1]^n$ максимума, равного 1, в единственной точке $\mathbf{1} = (1,1,\dots,1)$. Здесь в обозначениях теоремы 7.4 $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1, \beta_1 = \dots = \beta_n = 1$, однако непосредственное применение этой теоремы невозможно, так как точка $\mathbf{1}$ является граничной (см. [72, гл. 2]).

В некоторых вопросах статистики (например, при проверке гипотезы о независимости координат случайного вектора [46], [89], [152], [163]) возникают многопараметрические аналоги броуновского моста. Первый такой аналог – это гауссовское поле $W_1(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t} \in [0,1]^n$, с п.н. непрерывными траекториями, средним нуль и ковариационной функцией

$$\mathsf{E}W_1(\boldsymbol{t})W_1(\boldsymbol{s}) = \prod_{i=1}^{n}\big(\min(t_i, s_i) - t_i s_i\big).$$

Распределение поля $W_1(\boldsymbol{t})$ совпадает с условным распределением поля

$$\big\{W(\boldsymbol{t}) \mid W(\boldsymbol{s}) = 0,\ \boldsymbol{s} \in J\big\},$$

где

$$J = \big\{\boldsymbol{s} \in [0,1]^n : \text{существует } i,\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ \text{для которого } s_i = 1\big\},$$

$W(\boldsymbol{t})$ – поле из теоремы 7.6.

Теорема 7.7 [70], [175, II]. *Справедливо соотношение*

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\Big\{\sup_{\boldsymbol{t}\in[0,1]^n} |W_1(\boldsymbol{t})| > u\Big\} &= 2\mathsf{P}\Big\{\sup_{\boldsymbol{t}\in[0,1]^n} W_1(\boldsymbol{t}) > u\Big\}\big(1+o(1)\big)\\ &= \exp\{-2^{2n-1}u^2\}u^{n-1}(\sqrt{2})^{2n^2-n+1}\pi^{(n-1)/2}\big(1+o(1)\big), \qquad u\to\infty.\end{aligned}$$

Здесь дисперсия $\sigma_1^2(\boldsymbol{t}) = \prod_{i=1}^n t_i(1-t_i)$ поля $W_1(\boldsymbol{t})$ достигает на $[0,1]^n$ своего максимума 2^{-2n} в единственной точке $\frac{1}{2}\mathbf{1} = (\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2})$. Применение теоремы 7.4 с $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1, \beta_1 = \dots = \beta_n = 2$ позволяет получить приведенную асимптотику.

Вторым аналогом броуновского моста в многомерном случае является гауссовское поле $W_2(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t} \in [0,1]^n$, имеющее п. н. непрерывные траектории, среднее нуль и ковариационную функцию вида

$$\mathsf{E} W_2(\boldsymbol{t}) W_2(\boldsymbol{s}) = \prod_{i=1}^{n} \min(t_i, s_i) - \prod_{i=1}^{n} t_i s_i.$$

Это гауссовское поле иногда называют броуновским (винеровским) листом. Поле $W_2(\boldsymbol{t})$ совпадает по распределению с условным полем $\{W(\boldsymbol{t}) \mid W(\mathbf{1}) = 0\}$.

Теорема 7.8 [70], [175, II]. *Имеет место соотношение*

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\Bigl\{\sup_{\boldsymbol{t}\in[0,1]^n} |W_2(\boldsymbol{t})| > u\Bigr\} &= 2\mathsf{P}\Bigl\{\sup_{\boldsymbol{t}\in[0,1]^n} W_2(\boldsymbol{t}) > u\Bigr\}\bigl(1+o(1)\bigr) \\ &= \exp\{-2u^2\} u^{2n-2} 2(4\ln 2)^{n-1}\bigl(1+o(1)\bigr), \qquad u \to \infty.\end{aligned}$$

Поле $W_2(\boldsymbol{t})$ интересно тем, что его дисперсия

$$\sigma_2^2(\boldsymbol{t}) = \prod_{i=1}^{n} t_i - \prod_{i=1}^{n} t_i^2$$

достигает своего максимума $1/4$ на $(n-1)$-мерном многообразии

$$T_0 = \Bigl\{\boldsymbol{t} \in [0,1]^n : \prod_{i=1}^{n} t_i = \frac{1}{2}\Bigr\}.$$

Для поля $W_2(\boldsymbol{t})$ выполнены условия теоремы 7.5 с $G(\boldsymbol{t}) = \prod_{i=1}^n t_i - 1/2$, $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1$, $\beta = 2$.

Рассмотрим, наконец, последний пример этого параграфа. В работе [152], посвященной проверке гипотезы о независимости координат n-мерного случайного вектора, показано, что слабым пределом соответствующего эмпирического поля является гауссовское поле $W_3(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t} \in [0,1]^n$, с п. н. непрерывными траекториями, средним нуль и ковариационной функцией

$$\mathsf{E} W_3(\boldsymbol{t}) W_3(\boldsymbol{s}) = \prod_{i=1}^{n} \min(t_i, s_i) - \sum_{i=1}^{n} \min(t_i, s_i) \prod_{j \neq i} t_j s_j + (n-1) \prod_{i=1}^{n} t_i s_i.$$

Теорема 7.9 [175, II]. *Дисперсия $\sigma_3^2(\boldsymbol{t})$ поля $W_3(\boldsymbol{t})$ достигает своего максимума σ^2 на $[0,1]^n$ в $l \leqslant n$ точках $b^1, b^2, \dots, b^l$, $b^k = (b_k, \dots, b_k) \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots, l$, где $b_k \in (0,1)$ являются действительными корнями уравнения*

$$(2n-2)y^n - (2n-1)y^{n-1} + 1 = 0.$$

Имеет место соотношение

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{\boldsymbol{t}\in[0,1]^n}|W_3(\boldsymbol{t})|>u\Big\}=2\mathsf{P}\Big\{\sup_{\boldsymbol{t}\in[0,1]^n}W_3(\boldsymbol{t})>u\Big\}\big(1+o(1)\big)$$
$$=\exp\Big\{-\frac{u^2}{2\sigma^2}\Big\}u^{n-1}\sqrt{2}\,\pi^{(n-1)/2}\sigma^{1-2n}$$
$$\times\sum_{k=1}^{l}b_k^{n(n-1)}(1-b_k^{n-1})^n|\det\Lambda_k|^{-1/2}\big(1+o(1)\big),\quad u\to\infty,$$

где

$$\Lambda_k=(\lambda_{ij}^k)_{i,j=\overline{1,n}},\qquad \lambda_{ij}^k=-\frac{\partial^2}{\partial t_i\partial t_j}\sigma_3^2(b^k)$$

– невырожденные матрицы.

Следствие 7.1.

(i) *При* $n=2$ *дисперсия* $\sigma_3^2(t_1,t_2)$ *имеет на* $[0,1]^2$ *одну точку максимума* $(1/2,1/2)$, *и верна асимптотика*

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{\boldsymbol{t}\in[0,1]^2}|W_3(t_1,t_2)|>u\Big\}=\exp\{-8u^2\}8\sqrt{2\pi}\,u\big(1+o(1)\big),\qquad u\to\infty.$$

(ii) *При* $n=3$ *дисперсия* $\sigma_3^2(t_1,t_2,t_3)$ *имеет на* $[0,1]^3$ *одну точку максимума* $b^1=(b_1,b_1,b_1)$, $b_1\approx 0.6404$, *и верна асимптотика*

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{\boldsymbol{t}\in[0,1]^3}|W_3(t_1,t_2,t_3)|>u\Big\}=183.9u^2\exp\{-6.455u^2\}\big(1+o(1)\big),\qquad u\to\infty.$$

Доказательство теоремы 7.9 и следствия основано на теореме 7.4 и приведено в [175, II].

Замечание 7.3. Для всех четырех винеровских полей, рассмотренных выше, в асимптотике участвовала константа $H_{\mathbf{1}}=1$. Асимптотики распределений супремумов полей $W_i(t)$, $i=1,2,3$, важны в теории статистик Колмогорова–Смирнова, см. [175, II], где имеются также числовые таблицы асимптотических и смоделированных значений квантилей этих статистик. В статье [175, II] на основе теоремы 7.4 вычислены асимптотики предельных распределений статистик Колмогорова–Смирнова при проверке параметрических гипотез на принадлежность выборочных данных семействам: нормальному (одномерному и многомерному), экспоненциальному, Релея, Коши, гамма, Вейбулла–Гнеденко.

С помощью теоремы 7.5 можно найти асимптотику вероятности большого размаха гауссовского стационарного процесса [68]. Асимптотика распределения супремума поля $W(t)$ при $n=2$ была найдена в [191] с использованием вероятностей поглощения для броуновского движения со значениями в некотором функциональном банаховом пространстве.

8. Точные асимптотики больших уклонений нормы гауссовских векторов и процессов со значениями в пространствах ℓ_k^p и ℓ^2. Гауссовские поля с параметрическим множеством в гильбертовом пространстве

Метод двойных сумм представляет собой достаточно общий метод исследования больших уклонений гауссовских векторов и в метриках, отличных от равномерной. Это возможно благодаря тому факту, что произвольное банахово пространство вкладывается в пространство с равномерной метрикой. Пусть X – случайный элемент со значениями в некотором сепарабельном банаховом пространстве $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$. Тогда, как хорошо известно (см., например, [78, теорема 4.3]), мы имеем

$$\|x\| = \sup_{y\in U} \langle x, y\rangle\,,$$

где $U = \bigl\{y \in \mathbb{B}^* : \|y\|_* \leqslant 1\bigr\}$ – единичный шар с центром в нуле в сопряженном пространстве $(\mathbb{B}^*, \|\cdot\|_*)$, $\langle\,\cdot,\cdot\,\rangle$ – как и ранее, линейная форма, устанавливающая двойственность между $\mathbb{B}$ и $\mathbb{B}^*$.

В таком случае, получаем

$$\mathsf{P}\bigl\{\|X\| > u\bigr\} = \mathsf{P}\Bigl\{\sup_{y\in U} \langle X, y\rangle > u\Bigr\}. \tag{8.1}$$

Для гауссовского элемента X к вероятности в правой части последнего равенства уже применимы результаты типа теорем 7.4 и 7.5. Приведем соответствующие примеры.

§ 8.1. Точная асимптотика распределения ℓ_k^p-нормы гауссовского конечномерного вектора с зависимыми координатами, $p > 1$

Следующая теорема является двойственной по отношению к теореме 3.5, как отмечалось это в замечании 3.6. Ниже мы используем обозначение (3.19) и полагаем $1/p + 1/q = 1$.

Теорема 8.1 [175, II]. *Пусть $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_k)$ – гауссовский вектор со средним нуль и невырожденной ковариационной матрицей $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,k}}$. Пусть $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \dots, \boldsymbol{v}^m$ – точки из множества $V := \bigl\{\boldsymbol{x} : \|\boldsymbol{x}\|_{q,k} = 1\bigr\}$, в которых достигается максимум:*

$$\max\bigl\{\langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle : \boldsymbol{x} \in V\bigr\} =: \sigma^2 > 0,$$

где $\langle\,\cdot,\cdot\,\rangle$ – обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}^k$ и $\boldsymbol{v}^i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ik})$.

(i) *Если $p > 2$, то мы имеем асимптотическое соотношение*

$$\mathsf{P}\bigl\{\|\boldsymbol{X}\|_{p,k} > u\bigr\} = \exp\biggl(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\biggr)\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\,u}\sqrt{|p-2|} \times \sum_{i=1}^{k} |\det C_i|^{-1/2}\bigl(1 + O(u^{-2})\bigr), \qquad u\to\infty, \tag{8.2}$$

где $C_i = I - (q-1)^{-1}\sigma^{-2}A\operatorname{diag}\bigl(|v_{i1}|^{2-q},\dots,|v_{ik}|^{2-q}\bigr)$, I *– единичная матрица размера* $k\times k$.

(ii) *Если* $2 > p > 1$, *то все координаты* v_{ij} *точек* v^i *ненулевые, и также справедлива формула* (8.2).

Доказательство теоремы 8.1 основано на равенстве (8.1), которое в данном случае (при $p > 1$) дает:

$$\mathsf{P}\bigl\{\|\boldsymbol{X}\|_{p,k} > u\bigr\} = \mathsf{P}\Bigl\{\sup_{t\in V} Y(\boldsymbol{t}) > u\Bigr\},$$

где $Y(\boldsymbol{t}) = \sum_{i=1}^k t_iX_i$ – гауссовское поле, заданное на множестве V, со средним нуль. Далее, локализуя взятие супремума поля $Y(\boldsymbol{t})$ по малым окрестностям точек максимума его дисперсии $\sigma^2(\boldsymbol{t}) := \langle A\boldsymbol{t},\boldsymbol{t}\rangle$, мы в итоге используем теорему 7.4 (ii) с $\alpha_i = \beta_i = 2$. Появляющаяся в асимптотике константа $H_{\boldsymbol{2}}^{\frac{1}{\sigma}}(C)$ явно вычисляется для диагональной матрицы C, подробности см. в [175, II, теорема 4.1].

Для гильбертова случая $p = 2$, а также для диагональной ковариационной матрицы A подход теоремы 8.1 позволяет получить вновь утверждение теоремы 3.6 (ограниченной на значения $p > 1$).

Замечание 8.1. Уместно будет напомнить, что в конечномерных пространствах равенство (8.1) допускает обобщение следующего типа. Пусть $g(\boldsymbol{t})$ – выпуклая положительно однородная непрерывная функция на $\mathbb{R}^k$ [77], т.е.

$$g\bigl((1-\nu)\boldsymbol{t}+\nu\boldsymbol{s}\bigr) \leqslant (1-\nu)g(\boldsymbol{t})+\nu g(\boldsymbol{s}), \qquad 0<\nu<1, \boldsymbol{t},\boldsymbol{s}\in\mathbb{R}^k,$$
$$g(\alpha\boldsymbol{t}) = \alpha g(\boldsymbol{t}), \qquad 0<\alpha<\infty.$$

Тогда, как известно [77, теорема 13.2], $g(t)$ является опорной функцией некоторого выпуклого множества G в $\mathbb{R}^k$, т.е. $g(\boldsymbol{t}) = \sup_{\boldsymbol{s}\in G}\langle\boldsymbol{t},\boldsymbol{s}\rangle$. Отсюда получаем равенство для распределения выпуклого функционала от случайного вектора $\boldsymbol{X} = (X_1,\dots,X_k)$:

$$\mathsf{P}\bigl\{g(\boldsymbol{X}) > u\bigr\} = \mathsf{P}\Bigl\{\sup_{\boldsymbol{t}\in G} Y(\boldsymbol{t}) > u\Bigr\}, \tag{8.3}$$

где теперь $Y(\boldsymbol{t}) = \sum_{i=1}^k t_iX_i$ – гауссовское поле, заданное на множестве G со средним нуль. Далее к вероятности в правой части формулы (8.3) применимы теоремы типа 7.4 и 7.5.

Примеры дуальных пар g, G имеются в книгах [39] и [77, § 13–15].

Замечание 8.1 допускает обобщение на бесконечномерные банаховы пространства на основе привлечения аппарата полунорм, поляр и опорных функций выпуклых множеств в таких пространствах (см. гл. 2, § 5, n° 3 и гл. 4, § 1, упр. 5) б) в книге [14]).

§ 8.2. Точные асимптотики вероятностей высоких выбросов траекторий процессов типа χ^2

Равенство (8.1) дает возможность, в частности, находить асимптотику хвоста распределения супремума ℓ_k^p-нормы гауссовского векторного процесса. Эта задача сводится к изучению ковариационной структуры соответствующего гауссовского поля на цилиндре в окрестности множества достижения максимума его дисперсией и построению затем разбиения в соответствии с соотношениями гёльдеровских констант, как мы это видели на примерах для процессов из § 6 и в теоремах 7.1 и 7.4. Однако, не всегда дело сводится к использованию уже доказанных теорем, и вывод общих теорем, годящихся для применения к возможно большему числу примеров, является пока открытой проблемой.

Теорема 8.2 [175, II], [250]. *Пусть* $\boldsymbol{X}(t) = \big(X_1(t), \dots, X_k(t)\big)$, $t \in [0,T]$, *– гауссовский векторный процесс, где* $X_i(t)$, $i = 1,2,\dots,k$, *– гауссовские дифференцируемые в среднем квадратическом (ср. кв.), независимые одинаково распределенные непрерывные п. н. процессы со средним нуль. Пусть дисперсия* $\sigma^2(t)$ *процесса* $X_1(t)$ *достигает своего максимума* σ^2 *на* $[0,T]$ *в конечном числе точек* $b_1, b_2, \dots, b_l$, $b_i \in (0,T)$, *причем* $\sigma''(b_i) < 0$, $\mathsf{E}\big(X_1'(b_i)\big)^2 > 0$, $i = 1,2,\dots,l$, *где* X_1' *обозначает производную в ср. кв. процесса* X_1. *Тогда для процесса*

$$Z(t) \equiv Z_{p,a}(t) := \left(\sum_{i=1}^{k} |a_i X_i(t)|^p\right)^{1/p}, \qquad a_i > 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

имеют место соотношения при $u \to \infty$:

(i) *если* $p > 2$ *и* $a_1 = \dots = a_m > a_{m+1} \geqslant a_{m+2} \geqslant \dots \geqslant a_k$ *для некоторого* m, $k \geqslant m \geqslant 1$, *то*

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in[0,T]} Z(t) > u\Big\} = \exp\Big\{-\frac{u^2}{2\sigma^2 a_1^2}\Big\}\frac{2m\sigma a_1}{\sqrt{2\pi}\,u} \times \sum_{i=1}^{l}\left(1 - \frac{\mathsf{E}(X_1'(b_i))^2}{\sigma\sigma''(b_i)}\right)^{1/2}\big(1 + o(1)\big);$$

(ii) *если* $p = 2$ *и* $a_1 = \dots = a_m > a_{m+1} \geqslant a_{m+2} \geqslant \dots \geqslant a_k$, $k \geqslant m \geqslant 1$, *то*

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in[0,T]} Z(t) > u\Big\} = \exp\Big\{-\frac{u^2}{2\sigma^2 a_1^2}\Big\}\left(\frac{u}{\sigma a_1}\right)^{m-2}\frac{2^{1-m/2}}{\Gamma(m/2)} \times \prod_{j=m+1}^{k}\left(1 - \frac{a_j^2}{a_1^2}\right)^{-1/2}\sum_{i=1}^{l}\left(1 - \frac{\mathsf{E}(X_1'(b_i))^2}{\sigma\sigma''(b_i)}\right)^{1/2}\big(1 + o(1)\big);$$

(iii) *если* $2 > p > 1$, *то*

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in[0,T]} Z(t) > u\Big\} = \exp\Big\{-\frac{u^2}{2\sigma^2 d^2}\Big\}\frac{\sigma d}{\sqrt{2\pi}\,u}2^k(2-p)^{(1-k)/2} \times \sum_{i=1}^{l}\left(1 - \frac{\mathsf{E}(X_1'(b_i))^2}{\sigma\sigma''(b_i)}\right)^{1/2}\big(1 + o(1)\big),$$

где

$$d = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^{2p/(2-p)}\right)^{(2-p)/(2p)}.$$

Доказательство теоремы 8.2 основано на исследовании гауссовского поля

$$Y(t,\boldsymbol{v}) := a_1X_1(t)v_1 + \cdots + a_kX_k(t)v_k, \qquad \boldsymbol{v} = (v_1,\ldots,v_k),$$

на цилиндре

$$C_T = [0,T]\times S_{k-1},$$

где $S_{k-1} = \bigl\{\boldsymbol{v} : v_1^p + \cdots + v_k^p = 1\bigr\}$. Анализ ковариационной структуры этого поля показывает, что утверждения (i) и (iii) теоремы 8.2 действительно следуют из теоремы 7.4, поскольку максимум дисперсии достигается в нескольких изолированных точках цилиндра. В то же время, при $p = 2$ этот максимум достигается на сфере S_{m-1}, и здесь для доказательства потребовалось оригинальное построение разбиения (см. [250]).

Утверждения, аналогичные теореме 8.2, доказаны в ситуациях, когда процессы $X_i(t)$ – стационарные [248], $p = 2$ (см. также теорему 8.7 ниже), или непрерывные, но недифференцируемые п.н. [210]. Мы не будем излагать эти теоремы в их полной общности, а лишь приведем "вычислимые случаи", т.е. случаи, когда константы Пикандса вычисляются. Как уже говорилось, это константы $H_1 = 1$, $H_2^b = \sqrt{(1+b)/b}$ и $H_2 = 1/\sqrt{\pi}$ (см. (6.20)–(6.22)).

Теорема 8.3. *Пусть $\boldsymbol{X}(t) = (X_1(t),\ldots,X_k(t))$, $t\in[0,T]$, – гауссовский стационарный векторный процесс, причем процессы $X_i(t)$, $i=1,\ldots,k$, независимы в совокупности и дифференцируемы в ср. кв. Пусть дисперсии этих процессов равны соответственно a_i^2, $i=1,\ldots,k$, причем $a := a_1 = \cdots = a_m > a_{m+1} \geqslant a_{m+2} \geqslant \cdots \geqslant a_k \geqslant 0$ для некоторого m, $k \geqslant m \geqslant 1$, и корреляции не обращаются в единицу нигде кроме точки 0. Предположим также, что $\mathsf{E}\bigl(X_i'(t)\bigr)^2 = 2ba_i^2$ для всех $i=1,\ldots,k$ и некоторого $b>0$. Тогда*

$$\mathsf{P}\Bigl\{\sup_{t\in[0,T]}|\boldsymbol{X}(t)| > u\Bigr\} = 2^{1-m/2}\pi^{-1/2}\Bigl[\Gamma\Bigl(\frac{m}{2}\Bigr)\Bigr]^{-1}\sqrt{b}$$
$$\times \prod_{j=m+1}^{k}\Bigl(1-\frac{a_j^2}{a^2}\Bigr)^{-1/2} T\Bigl(\frac{u}{a}\Bigr)^{m-1}\exp\Bigl\{-\frac{u^2}{2a^2}\Bigr\}\bigl(1+o(1)\bigr), \qquad u\to\infty,$$

где в случае $m = k$ произведение полагается равным 1.

Утверждение теоремы для одинаково распределенных компонент вектора $\boldsymbol{X}$ было получено ранее Г. Линдгреном в [302].

Теорема 8.4. *Пусть $\boldsymbol{X}(t) = \bigl(X_1(t),\ldots,X_k(t)\bigr)$, $t\in[0,T]$, – гауссовский стационарный векторный процесс с независимыми координатами. Предположим, что для ковариационных функций координатных процессов имеют место разложения*

$$r_i(t) = a_i^2\bigl(1 - b_i|t| + o(|t|)\bigr), \qquad t\to 0, \quad i=1,\ldots,k,$$

причем $b_i > 0$ и $a := a_1 = \cdots = a_m > a_{m+1} \geqslant a_{m+2} \geqslant \cdots \geqslant a_k \geqslant 0$ для некоторого m, $k\geqslant m\geqslant 1$. Тогда при $u\to\infty$

$$\mathsf{P}\Bigl\{\sup_{t\in[0,T]}|\boldsymbol{X}(t)| > u\Bigr\} = 2^{1-m/2}\Bigl[\Gamma\Bigl(\frac{m}{2}\Bigr)\Bigr]^{-1}$$
$$\times \prod_{j=m+1}^{k}\Bigl(1-\frac{a_j^2}{a^2}\Bigr)^{-1/2}\Bigl(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} b_i\Bigr) T\Bigl(\frac{u}{a}\Bigr)^{m}\exp\Bigl\{-\frac{u^2}{2a^2}\Bigr\}\bigl(1+o(1)\bigr),$$

где в случае $m = k$ произведение полагается равным 1.

Из последней теоремы немедленно следует нижняя оценка для вероятности высокого выброса ℓ^2-значного процесса Орнштейна–Уленбека. Надо лишь заменить в правой части k на ∞. Несколько ниже, в § 8.4, будет сформулирован результат о точной асимптотике для супремума ℓ^2-нормы бесконечномерного процесса Орнштейна–Уленбека. Здесь мы лишь заметим, что верхняя оценка для такого процесса была впервые получена методом дифференциальных уравнений в работе [204], см. также [299]. Как видно из теоремы 8.4, оценка из [204] лишь на постоянный множитель отличается от точной асимптотики.

Как и в конечномерном случае результаты для бесконечномерных векторных процессов следуют из соответствующих утверждений для гауссовских полей с учетом равенства (8.1).

§ 8.3. Асимптотики вероятностей больших уклонений гауссовских процессов с параметрическим множеством в гильбертовом пространстве [74]

В работе [74] метод двойных сумм был обобщен на гауссовские процессы, заданные на компактном подмножестве бесконечномерного гильбертова пространства ℓ^2. Приведем соответствующий результат.

Пусть $X(t)$ – гауссовское случайное поле, заданное на компактном множестве $T \subset \ell^2$ со средним нуль и непрерывными п. н. траекториями. Обозначим через $\sigma^2(t)$ дисперсию поля $X(t)$, через $r(t,s)$ – его корреляционную функцию, на протяжении этого параграфа $t = (t_1, t_2, \dots, t_n, \dots) \in \ell^2$, $s = (s_1, s_2, \dots, s_n, \dots) \in \ell^2$, $\|t\| = \bigl(\sum_{k=1}^{\infty} t_k^2\bigr)^{1/2}$.

Рассмотрим следующие условия.

(J1) *Дисперсия $\sigma^2(t)$ непрерывна на T, достигает своего максимума σ^2 на T в одной точке $t_0 = (t_{01}, t_{02}, \dots, t_{0n}, \dots)$, причем справедливо разложение*

$$\sigma(t) = \sigma - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 |t_k - t_{0k}|^2 \bigl(1 + o(1)\bigr), \qquad \|t - t_0\| \to 0.$$

Для некоторого $\varepsilon_1 > 0$ компактное множество

$$\Pi(t_0, \varepsilon_1) := \bigl\{t \in \ell^2 : |t_k - t_{0k}| \leqslant 2^{-k}\varepsilon_1,\ k = 1, 2, \dots\bigr\}$$

целиком лежит в T.

(J2) Условие локальной однородности. *Существуют такие $\varepsilon_2 > 0$ и $D > 0$, что для всех $t, s \in \Pi(t_0, \varepsilon_2)$ имеет место соотношение*

$$r(t,s) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 |t_k - s_k|^2 \bigl(1 + o(1)\bigr), \qquad \|t - s\| \to 0,$$

где $0 < d_k < D$ для всех k.

(J3) Условие ограниченности роста ε-энтропии компакта T в естественной псевдометрике $\rho(t,s) := \bigl(\mathsf{E}\bigl(X(t) - X(s)\bigr)^2\bigr)^{1/2}$, $t, s \in T$.

Для некоторого $\varepsilon > 0$ *выполнено одно из следующих двух условий*:

(i) *Найдется такое* $c > 0$, *что для всех* $t, s \in T$, $\|t-s\| < \varepsilon$ *имеет место неравенство* $\rho(t,s) \leqslant c\|t-s\|$.

(ii) *Минимальное число* $N_\varepsilon(T,\rho)$ *замкнутых* ρ-*шаров радиуса* ε, *покрывающих* T, *удовлетворяет оценке*

$$N_\varepsilon(T,\rho) \leqslant \nu_1 \exp(\nu_2 \varepsilon^{-\alpha}),$$

где ν_1, ν_2 – *положительные константы и* $0 < \alpha < 2$.

(J4) $\sum_{k=1}^\infty d_k^2/a_k^2 < \infty$.

Отметим, что из условия (J3) (i) следует непрерывность (и даже липшицевость порядка $\gamma < 1$) выборочных функций процесса $X(t)$ (см. [270, теорема 1]).

Теорема 8.5 [74]. *Пусть гауссовское поле* $X(t)$, $t \in T \subset \ell^2$, *удовлетворяет сформулированным выше условиям, в том числе условиям* (J1)–(J4). *Тогда при* $u \to \infty$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in T} X(t) > u\Big\} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\,u} \exp\Big\{-\frac{u^2}{2\sigma^2}\Big\} \prod_{k=1}^\infty \bigg(1 + \frac{d_k^2\sigma}{a_k^2}\bigg)^{1/2} \big(1 + o(1)\big).$$

Здесь опять верно утверждение следствия 7.1.

Результаты типа теоремы 8.5, важные сами по себе, находят в силу равенства (8.1) интересные применения к бесконечнозначным гауссовским процессам.

§ 8.4. Асимптотики распределений максимумов норм ℓ^2-значных гауссовских процессов

Следующий результат можно рассматривать как гильбертов аналог теоремы 8.2 (ii).

Теорема 8.6. *Пусть* $Y(t) = (c_1Y_1(t), c_2Y_2(t), \dots)$, $t \in [0,S]$, – *гауссовский* ℓ^2-*значный п. н. непрерывный случайный процесс. Пусть* $\sum_{k=1}^\infty c_k^2 < \infty$ *и* $Y_k(t)$ – *дифференцируемые в ср. кв. независимые одинаково распределенные непрерывные п. н. гауссовские процессы со средним нуль. Пусть дисперсия* $\sigma^2(t)$ *процесса* $Y_1(t)$ *достигает своего максимума* σ^2 *на* $[0,S]$ *в конечном числе точек* $b_1, b_2, \dots, b_l$, $b_i \in (0,S)$, *причем* $\sigma''(b_i) < 0$, $\mathsf{E}\big(Y_1'(b_i)\big)^2 > 0$, $i = 1,2,\dots,l$, *где* Y_1' *обозначает производную в ср. кв. процесса* Y_1. *Предположим, что* $c_1 = c_2 \dots = c_m > c_{m+1} \geqslant c_{m+2} \geqslant \dots > 0$ *для некоторого* $m \geqslant 1$. *Тогда при* $u \to \infty$ *имеет место соотношение*

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in[0,S]} \|Y(t)\| > u\Big\} = \exp\Big\{-\frac{u^2}{2\sigma^2c_1^2}\Big\} \Big(\frac{u}{\sigma c_1}\Big)^{m-2} \frac{2^{1-m/2}}{\Gamma(m/2)} \\ \times \prod_{j=m+1}^\infty \bigg(1 - \frac{c_j^2}{c_1^2}\bigg)^{-1/2} \sum_{i=1}^l \bigg(1 - \frac{\mathsf{E}(X_1'(b_i))^2}{\sigma\sigma''(b_i)}\bigg)^{1/2} \big(1 + o(1)\big).$$

Доказательство теоремы имеется в [74].

Теорема 8.7 [74]. *Пусть* $Y(t) = (c_1Y_1(t), c_2Y_2(t), \ldots)$, $t \in [0,S]$, *– гауссовский* ℓ^2*-значный п. н. непрерывный случайный процесс. Пусть* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$ *и* $Y_k(t)$ *– дифференцируемые в ср. кв. независимые одинаково распределенные стационарные непрерывные п. н. гауссовские процессы со средним нуль. Предположим, что ковариационная функция* $R(t)$ *процесса* $Y_1(t)$ *удовлетворяет условию*

$$R(t) < R(0) = \sigma^2 \quad \text{для всех} \quad t \in (0, S].$$

Пусть для некоторого $m \geqslant 1$ *имеет место* $c_1 = c_2 \cdots = c_m > c_{m+1} \geqslant c_{m+2} \geqslant \cdots > 0$. *Тогда при* $u \to \infty$ *имеет место соотношение*

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{t\in[0,S]} \|Y(t)\| > u\Big\} = \exp\Big\{-\frac{u^2}{2\sigma^2 c_1^2}\Big\}\Big(\frac{u}{\sigma c_1}\Big)^{m-1} \frac{S2^{(1-m)/2}}{\sqrt{\pi}\Gamma(m/2)} \frac{\sqrt{-R''(0)}}{\sigma c_1} \times \prod_{j=m+1}^{\infty}\Big(1-\frac{c_j^2}{c_1^2}\Big)^{-1/2}\big(1+o(1)\big).$$

Замечание 8.2. Необходимые и достаточные условия для п. н. непрерывности стационарного ℓ^2-значного гауссовского процесса $Y(t)$ из теоремы 8.7 в терминах естественной псевдометрики и спектральных мер имеются в работах [178], [179].

§ 8.5. Точные асимптотики больших уклонений для ℓ^2-значного процесса Орнштейна–Уленбека

Одномерный процесс Орнштейна–Уленбека $V(\tau)$, $\tau \in (0,\infty)$, был введен в 1930 году [277] для описания скорости броуновской частицы в момент τ. Этот процесс может быть определен как гауссовский стационарный случайный процесс со средним нуль и ковариационной функцией

$$\mathsf{E}V(\tau)V(0) = \frac{h}{\lambda}\exp(-\lambda\tau),$$

где h, λ – положительные числа. Как известно, процесс $V(t)$ имеет непрерывные п. н., но недифференцируемые траектории и является марковским процессом. Асимптотику вероятности $\mathsf{P}\big\{\sup_{t\in[0,S]} V(t) > u\big\}$ можно вычислить на основе теоремы 6.4 (ii).

В последние два десятилетия после важной работы [149] интенсивно стал изучаться бесконечномерный процесс Орнштейна–Уленбека, находящий интересные приложения в самых различных областях математики и физики (см. [105], [177], [205], [262]). С точки зрения гауссовских распределений ℓ^2-значный процесс Орнштейна–Уленбека можно определить как процесс $Y(t) = \big(Y_1(t), Y_2(t), \ldots\big)$, $t \in [0,S]$, где $Y_k(t)$ – независимые одномерные процессы Орнштейна–Уленбека со средним нуль и ковариационной функцией

$$\mathsf{E}Y_k(t)Y_k(0) = \frac{h_k}{\lambda_k}\exp(-\lambda_k t),$$

причем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h_k}{\lambda_k} < \infty$$

(см. [205]). Предположим также, что траектории процесса $Y(t)$ непрерывны п. н. в ℓ^2, этот последний вопрос исследован в [177], [205], [262].

Теорема 8.8 [74]. *Пусть* $Y(t) = \bigl(Y_1(t), Y_2(t), \dots\bigr)$, $t \in [0,S]$, – ℓ^2*-значный процесс Орнштейна–Уленбека, определенный выше. Предположим, что для некоторого* $m \geqslant 1$ *имеет место*

$$\frac{h_1}{\lambda_1} = \frac{h_2}{\lambda_2} = \dots = \frac{h_m}{\lambda_m} > \frac{h_{m+1}}{\lambda_{m+1}} \geqslant \dots > 0.$$

Тогда при $u \to \infty$ *имеет место соотношение*

$$\mathsf{P}\Bigl\{\sup_{t\in[0,S]}\|Y(t)\| > u\Bigr\} = \exp\Bigl\{-\frac{\lambda_1 u^2}{2h_1^2}\Bigr\}\Bigl(\frac{u\lambda_1}{h_1}\Bigr)^m \frac{S2^{1-m/2}}{m\Gamma(m/2)} \times \sum_{k=1}^{m}\lambda_k \prod_{j=m+1}^{\infty}\Bigl(1-\frac{\lambda_1 h_j}{\lambda_j h_1}\Bigr)^{-1/2}\bigl(1+o(1)\bigr).$$

Теорема 8.8 улучшает оценки работ [204] и [248].

Заслуживает быть отмеченным факт превращения в теоремах 8.5–8.8 константы Пикандса в константу В. М. Золотарева [30]. Связь этих констант выявлена в [74, лемма 4] и [248, лемма 3]. Интересно и поучительно третье появление этой же константы – как детерминанта некоторого ядерного оператора (см. теорему 3.8 (ii)).

В заключение укажем, что методом двойных сумм авторами получены аналоги теорем 8.5–8.8 для пространств ℓ^p, $p > 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.

[2] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотики интегралов. М.: Наука, 1984.

[3] Беляев Ю. К., Питербарг В. И. Асимптотика среднего числа A-точек выбросов гауссовского поля за высокий уровень // Выбросы случайных полей / ред. Ю.К. Беляев. М.: Изд-во МГУ, 1972. С. 62–89.

[4] Бенткус В. Ю., Пап Д. О распределении нормы устойчивого случайного вектора гильбертова пространства // Литов. матем. сб. 1986. Т. 26. №2. С. 211–220.

[5] Бенткус В., Гетце Ф., Паулаускас В., Рачкаускас А. Точность гауссовской аппроксимации в банаховых пространствах // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 81. М.: ВИНИТИ, 1991. С. 39–139.

[6] Березин Ф. А. Континуальные интегралы по траекториям в фазовом пространстве // УФН. 1980. Т. 132. №3. С. 497–548.

[7] Богачев В. И., Смолянов О. Г. Аналитические свойства бесконечномерных распределений // УМН. 1990. Т. 45. №3. С. 3–83.

[8] Борзов В. В. Об асимптотическом поведении функционального гауссова интеграла // Записки научн. семинаров ЛОМИ. 1990. Т. 184. С. 26–36.

[9] Боровков А. А., Могульский А. А. О вероятностях больших уклонений в топологических пространствах, I; II // Сиб. матем. журн. 1978. Т. 19. №5. С. 988–1004; 1980. Т. 21. №5. С. 12–26.

[10] Боровков А. А. Граничные задачи, принцип инвариантности и большие уклонения // УМН. 1983. Т. 38. С. 259–290.

[11] Боровков А. А., Могульский А. А. О вероятностях малых уклонений для случайных процессов // Труды Ин-та Математики СО АН СССР. Т. 13, 1989. С. 147–168.

[12] Боровков А. А., Могульский А. А. Большие уклонения и статистический принцип инвариантности // Теория вероятн. и ее примен. 1992. Т. 37. №1. С. 11–18.

[13] Боровков А. А., Могульский А. А. Большие уклонения и проверка статистических гипотез // Труды Ин-та Математики СО РАН. Т. 19. Новосибирск: Наука, 1992. С. 1–220.

[14] Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. М.: ИЛ, 1959.

[15] Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985.

[16] Вентцель А. Д. Грубые предельные теоремы о больших уклонениях для марковских случайных процессов I; II; III; IV // Теория вероятн. и ее примен. 1976. Т. 21. №2. С. 235–252 ; 1976. Т. 21. №3. С. 512–526 ; 1979. Т. 24. №4. С. 673–691; 1982. Т. 27. №2. С. 209–222.

[17] Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.

[18] Вентцель А. Д. Предельные теоремы о больших уклонениях для марковских случайных процессов. М.: Наука, 1986.

[19] Веретенников А. Ю. О больших уклонениях для систем стохастических уравнений Ито // Теория вероятн. и ее примен. 1991. Т. 36. №4. С. 625–634.

[20] Волошина И. А. Об одной экстремальной формуле при оценке интеграла по гауссовой мере // Стохастические уравнения и граничные теоремы / ред. А.В. Скороход. Киев: Ин-т Матем. АН Украины, 1991. С. 35–38.

[21] Волошина И. А. О приближенной формуле для интеграла по гауссовой мере // Случайные процессы и бесконечномерный анализ / ред. А.В. Скороход. Киев: Ин-т Матем. АН Украины, 1992. С. 18–26.

[22] Гертнер Ю. О больших уклонениях от инвариантной меры // Теория вероятн. и ее примен. 1977. Т. 22. №1. С. 27–42.

[23] Го Х.-С. Гауссовские меры в банаховых пространствах. М.: Мир, 1979.

[24] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.

[25] Давыдов Ю. А., Лифшиц М. А. Метод расслоений в некоторых вероятностных задачах // Итоги науки и техники. Теория вероятн. Матем. статистика. Теорет. киберн. Т. 22. М.: ВИНИТИ, 1984. С. 61–158.

[26] Дмитровский В. А. Оценки распределения максимума гауссовского поля // Случайные процессы и поля / ред. Ю.К. Беляев. М.: Изд-во МГУ, 1979. С. 22–31.

[27] Дубровский В. Н. Асимптотическая формула лапласовского типа для разрывных марковских процессов // Теория вероятн. и ее примен. 1976. Т. 21. №1. С. 219–222.

[28] Дубровский В. Н. Точные асимптотические формулы лапласовского типа для марковских процессов // ДАН СССР. 1976. Т. 226. №5. С. 1001–1004.

[29] Егоров А. Д., Соболевский П. И., Янович Л. А. Функциональные интегралы: приближенное вычисление и приложения. Минск: Наука и техника, 1985.

[30] Золотарев В. М. Об одной вероятностной задаче // Теория вероятн. и ее примен. 1961. Т. 6. №2. С. 219–222.

[31] Золотарев В. М. Об одной асимптотике гауссовской меры в ℓ^2 // Проблемы устойчивости стохастических моделей. М.: ВНИИ системных исследований, 1984. С. 54–58.

[32] Ибрагимов И. А. О вероятности попадания гауссова вектора со значениями в гильбертовом пространстве в сферу малого радиуса // Записки научн. семинаров ЛОМИ. 1979. Т. 85. С. 75–93.

[33] Игнатюк И. А., Малышев В. А., Щербаков В. В. Влияние границ в задачах о больших уклонениях // УМН. 1994. Т. 49. №2. С. 43–102.

[34] Клепиков В. Н. Асимптотическое разложение интеграла Фейнмана // Теория случайных процессов. Т. 14. Киев: Наукова Думка, 1986. С. 29–37.

[35] Конаков В. Д., Питербарг В. И. Скорость сходимости распределений максимальных уклонений гауссовских процессов и эмпирических плотностей, I; II // Теория вероятн. и ее примен. 1982. Т. 27. №4. С. 707–724; 1983. Т. 28. №1. С. 164–169.

[36] Королюк В. С., Боровских Ю. В. Асимптотический анализ распределений статистик. Киев: Наукова Думка, 1984.

[37] Коростелев А. П., Леонов С. Л. Функционал действия для диффузионного процесса с разрывным переносом // Теория вероятн. и ее примен. 1992. Т. 37. №3. С. 570–576.

[38] Крамер Г., Лидбеттер М. Р. Стационарные случайные процессы. М.: Мир, 1969.

[39] Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.

[40] Лидбеттер М., Ротсен Х., Линдгрен Г. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989.

[41] Лисицкий А. Д. Разложение хвоста строго устойчивого закона в гильбертовом пространстве // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 1992. №1. С. 29–33.

[42] Лифшиц М. А. О распределении максимума гауссовского процесса // Теория вероятн. и ее примен. 1986. Т. 31. №1. С. 134–142.

[43] Лифшиц М. А., Цирельсон Б. С. Малые уклонения гауссовских полей // Теория вероятн. и ее примен. 1986. Т. 31. №3. С. 632–633.

[44] Лифшиц М. А. Вычисление точной асимптотики некоторых гауссовских больших уклонений // Записки научн. семинаров ЛОМИ. 1990. Т. 184. С. 189–199.

[45] Лифшиц М. А. Гауссовские большие уклонения гладкой полунормы // Записки научн. семинаров ПОМИ. 1992. Т. 194. С. 106–113.

[46] Мартынов Г. В. Критерии омега-квадрат. М.: Наука, 1978.

[47] Маслов В. П. Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана. М.: Наука, 1976.

[48] Маслов В. П., Чеботарев А. М. О втором члене логарифмической асимптотики функциональных интегралов // Итоги науки и техники. Теория вероятн. Матем. статистика. Теорет. киберн. Т. 19. М.: ВИНИТИ, 1982. С. 127–154.

[49] Маслов В. П. Глобальная экспоненциальная асимптотика решений туннельных уравнений и задачи о больших уклонениях // Труды МИАН. 1984. Т. 163. С. 150–180.

[50] Маслов В. П., Фроловичев С. М., Черных С. И. Точная асимптотика больших уклонений в граничной задаче для диффузионных процессов // ДАН СССР. 1987. Т. 296. №2. С. 275–279.

[51] Маслов В. П. Асимптотические методы и теория возмущений. М.: Наука, 1988.

[52] Могульский А. А. Замечания о больших уклонениях статистики ω^2 // Теория вероятн. и ее примен. 1977. Т. 22. №1. С. 170–175.

[53] Могульский А. А. Большие уклонения для винеровского процесса // Труды Ин-та Математики СО АН СССР. Т. 1, 1982. С. 25–50.

[54] Могульский А. А. Вероятности больших уклонений для траекторий случайных блужданий // Предельные теоремы для сумм случайных величин. Новосибирск: Наука, 1984. С. 93–124.

[55] Молчанов С. А. Диффузионные процессы и риманова геометрия // УМН. 1975. Т. 30. №1. С. 3–59.

[56] Нагаев С. В. О вероятностях больших уклонений для гауссовского распределения в банаховом пространстве // Изв. АН УзССР, сер. физ.-матем. наук. 1981. №5. С. 18–21.

[57] Никитин Я. Ю. Большие уклонения и асимптотическая эффективность статистик интегрального типа, I; II // Записки научн. семинаров ЛОМИ. 1979. Т. 85. С. 175–187; 1980. Т. 97. С. 151–175.

[58] Никитин Я. Ю. Большие уклонения и асимптотическая эффективность интегральных статистик для проверки независимости // Вероятностные распределения и математическая статистика. Ташкент: Фан, 1986. С. 388–406.

[59] Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978.

[60] Осипов Л. В. О вероятностях больших уклонений для сумм независимых случайных векторов // Теория вероятн. и ее примен. 1978. Т. 23. №3. С. 510–526.

[61] Паулаускас В. И. О скорости сходимости в центральной предельной теореме в некоторых банаховых пространствах // Теория вероятн. и ее примен. 1976. Т. 21. №4. С. 775–791.

[62] Паулаускас В. И., Рачкаускас А. Ю. Точность аппроксимации в центральной предельной теореме в банаховых пространствах. Вильнюс: Мокслас, 1987.

[63] Пинелис И. Ф. Одна задача о больших уклонениях в пространстве траекторий // Теория вероятн. и ее примен. 1981. Т. 26. №1. С. 73–87.

[64] Питербарг В. И. О работе Д. Пикандса "Вероятности пересечения для стационарного гауссовского процесса" // Вестник МГУ. Сер. Матем. и Мех. 1972. №5. С. 25–30.

[65] Питербарг В. И. Асимптотические разложения вероятностей больших выбросов гауссовских процессов // ДАН СССР. 1978. Т. 242. №6. С. 1248–1251.

[66] Питербарг В. И., Присяжнюк В. П. Асимптотика вероятности большого выброса гауссовского нестационарного процесса // Теория вероятн. и матем. статистика. 1978. Т. 18. С. 121–133; 1983. Т. 28. С. 103–106.

[67] Питербарг В. И. Некоторые направления в исследовании свойств траекторий гауссовских случайных функций // Случайные процессы. Выборочные функции и пересечения. М.: Мир, 1978. С. 258–280.

[68] Питербарг В. И., Присяжнюк В. П. Точная асимптотика большого размаха гауссовского стационарного процесса // Теория вероятн. и ее примен. 1981. Т. 26. №3. С. 480–495.

[69] Питербарг В. И. Гауссовские случайные процессы // Итоги науки и техники. Теория вероятн. Матем. статистика. Теорет. киберн. Т. 19. М.: ВИНИТИ, 1982. С. 155–199.

[70] Питербарг В. И., Фаталов В. Р. Точные асимптотики для вероятностей больших уклонений некоторых используемых в статистике гауссовских полей // Вероятностно-статистические методы исследования / ред. И. Г. Журбенко, А. Н. Колмогоров. М.: Изд-во МГУ, 1983. С. 123–140.

[71] Питербарг В. И., Симонова И. Э. Асимптотические разложения для вероятностей больших выбросов нестационарных гауссовских процессов // Матем. заметки. 1984. Т. 35. №6. С. 909–920.

[72] Питербарг В. И. Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей. М.: Изд-во МГУ, 1988; Piterbarg V. I. Asymptotic Methods in the Theory of Gaussian Processes and Fields. Translations of Mathematical Monographs. V. 148. AMS: Providence, 1995.

[73] Питербарг В. И., Михалева Т. Л. О распределении максимума гауссовского поля с постоянной дисперсией // Теория вероятн. и ее примен. (в печати).

[74] Питербарг В. И., Фаталов В. Р. Большие уклонения гауссовских процессов с параметрическим множеством в гильбертовом пространстве с приложением к ℓ^2-значному процессу Орнштейна–Уленбека // Препринт, 1994.

[75] Пич А. Операторные идеалы. М.: Мир, 1982.

[76] Погосян С. К. Вероятности больших уклонений для гиббсовских случайных полей // Изв. АН АрмССР. Математика. 1990. Т. 25. №5. С. 432–447.

[77] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

[78] Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.

[79] Рюэль Д. Статистическая механика: строгие результаты. М.: Мир, 1971.

[80] Санов И. Н. О вероятности больших отклонений случайных величин // Матем. сб. 1957. Т. 42. №1. С. 11–44.

[81] Саулис Л., Статулявичус В. Предельные теоремы о больших уклонениях. Вильнюс: Мокслас, 1989.

[82] Саулис Л., Статулявичус В. и др. Предельные теоремы теории вероятностей // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 81. М.: ВИНИТИ, 1991. С. 219–312.

[83] Скороход А. В. Теорема о непрерывности случайной функции на компакте в гильбертовом пространстве // Теория вероятн. и ее примен. 1973. Т. 18. №4. С. 809–811.

[84] Скороход А. В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. Киев: Наукова Думка, 1987.

[85] Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. Континуальные интегралы. М.: Изд-во МГУ, 1990.

[86] Сытая Г. Н. Об асимптотике винеровской меры малых сфер // Теория вероятн. и матем. статистика. 1977. Т. 16. С. 121–135.

[87] Сытая Г. Н. О малых сферах гауссовских мер // Вероятностные распределения в бесконечномерных пространствах. Киев, 1978. С. 154–171.

[88] Тихомиров А. Н. О точности нормальной аппроксимации вероятности попадания в шар суммы слабо зависимых гильбертовозначных случайных величин, I; II // Теория вероятн. и ее примен. 1991. Т. 36. №4. С. 699–710; 1993. Т. 38. №1. С. 110–127.

[89] Тюрин Ю. Н. Линейная модель в многомерной непараметрической статистике // Многомерный статистический анализ в социально-экономических исследованиях. М.: Наука, 1974. С. 7–24.

[90] Фаталов В. Р. Большие уклонения гауссовских мер в пространствах ℓ^p и L^p, $p \geqslant 2$ // Теория вероятн. и ее примен. (в печати).

[91] Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977.

[92] Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968.

[93] Фрейдлин М. И. Принцип усреднения и теоремы о больших уклонениях // УМН. 1978. Т. 33. №5. С. 107–160.

[94] Цирельсон Б. С. Плотность распределения максимума гауссовского процесса // Теория вероятн. и ее примен. 1975. Т. 20. №4. С. 865–873.

[95] Ченцов Н. Н. Винеровские случайные поля от нескольких параметров // ДАН СССР. 1956. Т. 106. С. 607–609.

[96] Юринский В. В. Об асимптотике больших уклонений в гильбертовом пространстве, I, II, III // Теория вероятн. и ее примен. 1991. Т. 36. №1. С. 78–92 ; 1991. Т. 36. №3. С. 535–541; 1992. Т. 37. №2. С. 268–275.

[97] Adler R. J., Samorodnitsky G. Tail behaviour for the suprema of Gaussian processes with applications to empirical processes // Ann. Probab. 1987. V. 15. P. 1339–1351.

[98] Adler R. J. An Introduction to Continuity, Extrema, and Related Topics for General Gaussian Processes // Lecture Notes. V. 12. Hayward, CA: Instit. Math. Statist., 1990.

[99] Albeverio S. A., Høegh-Krohn R. J. Mathematical theory of Feynman path integrals // Lect. Notes Math. V. 523, 1976. P. 1–139.

[100] Albeverio S. A., Høegh-Krohn R. J. Oscillatory integrals and the method of stationary phase in infinitely many dimensions, with applications to the classical limit of quantum mechanics, I // Invent. Math. 1977. V. 40. №1. P. 59–106.

[101] Albeverio S. A., Brzezniak Z. Finite–dimensional approximation approach to oscillatory integrals and stationary phase in infinite dimensions // J. Funct. Anal. 1993. V. 113. №1. P. 177–244.

[102] Albin J. M. P. On extremal theory for stationary processes // Ann. Probab. 1990. V. 18. P. 92–128.

[103] Albin J. M. P. On the general law of iterated logarithm with application to selfsimilar processes and to Gaussian processes in $\mathbb{R}^n$ and Hilbert space // Stoch. Process. Appl. 1992. V. 41. P. 1–31.

[104] Albin J. M. P. Extremes of diffusions over fixed intervals // Stoch. Proc. Appl. 1993. V. 48. P. 211–235.

[105] Antoniadis A., Carmona R. Eigenfunction Expansions for Infinite Dimensional Ornstein–Uhlenbeck Processes // Probab. Theory Relat. Fields. 1987. V. 74. P. 31–54.

[106] Araujo A., Giné E. The central limit theorem for the real and Banach valued random variables. New York: Wiley, 1980.

[107] Azencott R. Grandes déviations et applications // Lect. Notes Math. V. 774, 1980. P. 1–176.

[108] Azencott R., Bellaiche A., Bellaiche C., Bougerol P., Chaleyat-Maurel M., Baldi P., Elie L., Granara J. Géodésiques et diffusions en temps petits // Astérisque. 1981. V. 84–85.

[109] Azencott R. Formule de Taylor stochastique et développement asymptotique d'intégrales de Feynman // Lect. Notes Math. V. 921, 1982. P. 237–285.

[110] Azencott R. Densités des diffusions en temps petits; développement asymptotique // Lect. Notes Math. V. 1059, 1984. P. 402–498.

[111] Azencott R. Petites perturbations aléatoires de systèmes dynamiques: Développements asymptotiques // Bull. Sci. Math. Ser. 2. 1985. V. 109. P. 253–308.

[112] Bahadur R. R., Zabell S. L. Large deviations of the sample mean in general vector spaces // Ann. Probab. 1979. V. 7. P. 587–621.

[113] Baldi P., Roynette B. Some exact equivalents for Brownian motion in Hölder norm // Probab. Theory Relat. Fields. 1992. V. 93. P. 457–484.

[114] Baldi P., Ben Arous G., Kerkyacharian G. Large deviations and the Strassen theorem in Hölder norm // Stoch. Process. Appl. 1992. V. 42. P. 171–180.

[115] Barbe P. A review on some large deviation results // Publ. Inst. Statist. Univ. Paris. 1994. V. 38. №1. P. 3–24.

[116] Ben Arous G. Méthodes de Laplace et de la phase stationnaire sur l'espace de Wiener // Stochastics. 1988. V. 25. P. 125–153.

[117] Ben Arous G. Développement asymptotique du noyau de la chaleur hypoelliptique sur la diagonale // Ann. Inst. Fourier. 1989. V. 39. P. 73–99.

[118] Ben Arous G. Développement asymptotique du noyau de la chaleur hypoelliptique hors du cutlocus // Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure. 1989.

[119] Ben Arous G., Brunaud M. Méthode de Laplace: Etude variationelle des fluctuations de diffusions de type "champ moyens" // Stochastics and Stoch. Rep. 1990. V. 31. P. 79–144.

[120] Ben Arous G., Léandre R. Décroissance exponentielle du noyau de la chaleur sur la diagonale, I, II // Probab. Theory Relat. Fields. 1991. V. 90. P. 175–202.

[121] Ben Arous G., Ledoux M. Schilder's large deviation principle without topology // Asymptotic Problems in Probability Theory: Wiener Functionals and Asymptotics / ed. K. D. Elworthy, N. Ikeda. New York: Longman, 1993. P. 107–121.

[122] Ben Arous G., Ledoux M. Grandes déviations de Freidlin–Wentzell en norme hölderienne // Lect. Notes Math., 1993 (to appear).

[123] Ben Arous G., Deuschel J.-D., Stroock D. Precise asymptotics in large deviations // Bull. Sci. Math. 1993. V. 117. №1. P. 107–124.

[124] Bentkus V., Rachkauskas A. On probabilities of large deviations in Banach spaces // Probab. Theory Relat. Fields. 1990. V. 86. P. 131–154.

[125] Bentkus V. Theorems of Large Deviations in the Multivariate Invariance Principle // J. Multivariate Anal. 1992. V. 41. №2. P. 297–313.

[126] Berman S. M. Sojourns and extremes of stationary processes // Ann. Probab. 1982. V. 10. P. 1–46.

[127] Berman S. M. Sojourns and extremes of a diffusion process on a fixed interval // Adv. Appl. Probab. 1982. V. 14. №1. P. 811–832.

[128] Berman S. M. Extreme sojourns of diffusion processes // Ann. Probab. 1988. V. 16. P. 361–374.

[129] Berman S. M. Sojourns and Extremes of Stochastic Processes. Belmont, CA: Wadsworth and Brooks/Cole, 1992.

[130] van der Berg M., Lewis J. T. On the asymptotics of a Wiener integral // Proc. Roy. Soc. Edinb. 1987. V. 105 A. P. 195–198.

[131] Bickel P. J., Rosenblatt M. On some global measures of the deviations of density function estimates // Ann. Statist. 1973. V. 1. №6. P. 1071–1095.

[132] Bickel P., Rosenblatt M. Two-Dimensional Random Fields // Multivariate Analysis – 3 / ed. P. R. Krishnaiah. New York: Academic Press, 1973.

[133] Bismut J. M. Large Deviations and Malliavin Calculus. Progress in Mathematics, 45. Basel: Birkhäuser, 1984.

[134] Bloznelis M. On the distribution of the norm for a multidimensional Brownian bridge // Литов. матем. сб. 1991. Т. 31. №1. С. 29–39.

[135] Bolthausen E. On the probability of large deviations in Banach spaces // Ann. Probab. 1984. V. 12. №2. P. 427–435.

[136] Bolthausen E. Laplace approximations for Markov process expectations // Unpublished manuscript, 1985.

[137] Bolthausen E. Laplace approximations for sums of Independent random vectors, I; II // Probab. Theory Relat. Fields. 1986. V. 72. P. 305–318; 1987. V. 76. P. 167–206.

[138] Bolthausen E. On the volume of the Wiener sausage // Ann. Probab. 1990. V. 18. №4. P. 1576–1582.

[139] Bolthausen E. Localization of a two dimensional random walk with an attractive path interaction // Preprint, 1991.

[140] Bolthausen E., Deuschel J.-D., Tamura Y. Precise estimate for large deviations of non-symmetric Markov processes // Ann. Probab. 1994. V. 22.

[141] Bonic R., Frampton J. Smooth Functions on Banach Manifolds // J. Math. Mechan. 1966. V. 15. №5. P. 877–898.

[142] Borell C. The Brunn-Minkowski Inequality in Gauss Space // Invent. Math. 1976. V. 30. P. 207–216.

[143] Breitung K.-W. Asymptotic Approximations for Probability Integrals // Manuscript, 1992. P. 1–108.

[144] Bucklew J. A. Large Deviation Techniques in Decision, Simulation and Estimation. New York: Wiley, 1990.

[145] Cassandro M., Jona-Lasinio G. Critical point behavior and probability theory // Adv. in Physics. 1978. V. 27. P. 913–941.

[146] Chevet S. Gaussian Measures and Large Deviations // Lect. Notes Math. V. 990, 1983. P. 30–46.

[147] Csizár I. Sanov property, generalized I-projection and a conditional limit theorem // Ann. Probab. 1984. V. 12. P. 768–793.

[148] Davies I., Truman A. On the Laplace asymptotic expansion of conditional Wiener integrals and the Bender–Wu formula for x^{2N}-anharmonic oscillators // J. Math. Phys. 1983. V. 24. P. 255–266.

[149] Dawson D. A. Stochastic evolution equations // Math. Bio. Sci. 1972. V. 15. P. 287–316.

[150] Dawson D. A., Gärtner J. Large deviations from the McKean–Vlasov limit for weakly interacting diffusions // Stochastics. 1987. V. 20. P. 247–308.

[151] de Acosta A. Moderate deviations and associated Laplace approximations for sums of independent random vectors // Trans. Amer. Math. Soc. 1992. V. 329. №1. P. 357–375.

[152] Deheuvels P. Multivariate tests of independence // Lect. Notes Math. V. 861, 1981. P. 42–50.

[153] Dembo A., Zeitouni O. Large Deviations Techniques and Applications. Boston: Jones and Bartlett, 1993.

[154] Deuschel J.-D., Stroock D. Large Deviations. New York: Wiley, 1989.

[155] Dmitrovskii V. A. On the integrability of the maximum and the local properties of Gaussian fields // Probability Theory and Mathematical Statistics, Proc. of the Fifth Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics / ed. B. Grigelionis et al. V. 1. Vilnius–Utrecht: Mokslas–VSP, 1990. P. 271–284.

[156] Dobric V., Marcus M. B., Weber M. The distribution of large values of the supremum of Gaussian processes // Astérisque. 1988. V. 157–158. P. 95–127.

[157] Donsker M. D., Varadhan S. R. S. Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time, I; II; III; IV // Comm. Pure Appl. Math. 1975. V. 28. P. 1–47 ; 1975. V. 28. P. 279–301 ; 1976. V. 29. P. 389–461; 1983. V. 36. P. 525–565.

[158] Donsker M. D., Varadhan S. R. S. Asymptotic evaluation of certain Wiener integrals for large time // Functional Integration and its Applications / ed. A.M. Arthur. Oxford: Oxford Univ. Press, 1975. P. 15–33.

[159] Donsker M. D., Varadhan S. R. S. Large deviations for stationary Gaussian processes // Comm. Math. Phys. 1985. V. 97. P. 187–210.

[160] Doss H. Quelques formules asymptotiques pour les petites perturbations de systèmes dynamiques // Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. B. 1980. V. 16. №1. P. 17–28.

[161] Doss H. Démonstration probabiliste de certains développements asymptotiques quasi classiques // Bulletin des Sciences Mathématiques, 2^{eme} Série. 1985. V. 109. P. 179–208.

[162] Doss H., Stroock D. Nouveaux résultats concernant les petites perturbations de systèmes dynamiques // J. Funct. Anal. 1991. V. 101. №2. P. 370–391.

[163] Dudley R. M. Weak convergence of probabilities on nonseparable metric spaces and empirical measures on Euclidean spaces // Illinois J. Math. 1966. V. 10. P. 109–126.

[164] Dupuis P., Ellis R. S. Large deviations for Markov processes with discontinuous statistics, I: General upper bounds, II: Random walks // Ann. Probab. 1991. V. 19. №3. P. 1280–1297; // Probab. Theory Relat. Fields. 1992. V. 91. №2. P. 153–194.

[165] Ehrhard A. Symetrisation dans l'espace de Gauss // Math. Scand. 1983. V. 53. №2. P. 281–301.

[166] Ellis R. S., Rosen J. S. Laplace's method for Gaussian integrals with an application to Statistical Mechanics // Ann. Probab. 1982. V. 10. №1. P. 47–66; 1983. V. 11. №2. P. 456.

[167] Ellis R. S., Rosen J. S. Asymptotic analysis of Gaussian integrals, I: Isolated minimum points, II: Manifold of minimum points // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. V. 273. №2. P. 447–481; // Comm. Math. Phys. 1981. V. 82. P. 153–181.

[168] Ellis R. S. Large Deviations and Statistical Mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 1985.

[169] Elworthy K. D., Truman A. Classical mechanics, the diffusion heat equation and the Schrödinger equation on a Riemannian manifold // J. Math. Phys. 1981. V. 22. P. 2144–2166.

[170] Erkanli A. Laplace approximations for posterior expectations when the mode occurs at the boundary of the parameter space // J. Amer. Statist. Assoc. 1994. V. 89. №425. P. 250–258.

[171] Fang Shizan Grandes déviations pour le processus d'Ornstein–Uhlenbeck // C. R. Acad. Sci., Sér. 1. 1992. V. 314. №4. P. 291–294; // Stochastics and Stoch. Rep. 1994 (to appear).

[172] Faris W., Jona-Lasinio G. Large fluctuations for a nonlinear heat equation with noise // J. Phys. A: Math. Gen. 1982. V. 15. P. 3025–3055.

[173] Fatalov V. R., Richter W.-D. Gaussian probabilities of large deviations for fixed or increasing dimensions // J. Contemp. Math. Analysis (Armenian Acad. Sci.). 1992. V. 27. №1. P. 1–16; // Изв. АН Армении. Матем. 1992. Т. 27. №1.

[174] Fatalov V. R. Exact asymptotics of large deviations for Gaussian measures on Hilbert space // J. Contemp. Math. Analysis (Armenian Acad. Sci.). 1992. V. 27. №5. P. 36–50; // Изв. АН Армении. Матем. 1992. Т. 27. №5.

[175] Fatalov V. R. Asymptotics of large deviation probabilities for Gaussian fields, I, II // J. Contemp. Math. Analysis (Armenian Acad. Sciences). 1992. V. 27. №6. P. 48–70 ; 1993. V. 28. №5. P. 21–44 ; // Изв. АН Армении. Матем. 1992. Т. 27. №6; 1993. Т. 28. №5.

[176] Fatalov V. R., Richter W.-D. Exact asymptotics of large deviations for Gaussian measures on Banach spaces // Math. Nachr. (to appear).

[177] Fernique X. La régularité des fonctions aléatoires d'Ornstein–Uhlenbeck à valeurs dans ℓ^2, le cas diagonal // C. R. Acad. Sci., Sér. 1. 1989. V. 309. P. 59–62.

[178] Fernique X. Fonctions aléatoires à valeurs dans les espaces lusiniens // Expositiones Math. 1990. V. 8. P. 289–364.

[179] Fernique X. Régularité des fonctions aléatoires gaussiennes stationnaires // Probab. Theory Relat. Fields. 1991. V. 88. P. 521–536.

[180] Feynman R. P. Path integrals // Lect. Notes Phys. 1979. V. 106.

[181] Fleming W. H., James M. R. Asymptotic series and exit time probabilities // Ann. Probab. 1992. V. 20. №3. P. 1369–1384.

[182] Föllmer H. Random fields and diffusion processes // Lect. Notes Math. V. 1362, 1988. P. 101–203.
[183] Freidlin M. I. Functional integration and partial differential equations. Princeton: Princeton Univ. Press, 1985.
[184] Freidlin M. I. Semi-linear partial differential equations and limit theorems for large deviations // Lect. Notes Math. V. 1527, 1992. P. 1–109.
[185] Freidlin M. I., Wentzell A. D. Random perturbations of Hamiltonian systems // Mem. Amer. Math. Soc. 1994. V. 109. №523. P. 1–82.
[186] Friedberg R., Luttinger J. M. Density of electronic energy levels in disordered systems // Phys. Rev. 1975. V. B12. №10. P. 4460–4474.
[187] Gaveau B., Moulinier J. M. Integrales oscillantes stochastiques: estimation asymptotique de fonctionnelles caractéristiques // J. Funct. Anal. 1983. V. 54. P. 161–176.
[188] Georgii H. O. Large deviations and maximum entropy principle for interacting random fields on $\mathbb{Z}^d$ // Ann. Probab. 1993. V. 21. №4. P. 1845–1875.
[189] Georgii H. O. Large deviations and the equivalence of ensembles for Gibbsian particle systems with superstable interaction // Probab. Theory Relat. Fields. 1994. V. 99. №2. P. 171–195.
[190] Glimm J., Jaffe A. Quantum Physics. A Functional Integral Point of View. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1981; Глимм Дж., Джаффе А. Математические методы квантовой физики. Подход с использованием континуальных интегралов. М.: Мир, 1984.
[191] Goodman V. Distribution estimates for functionals of the two-parameter Wiener process // Ann. Probab. 1976. V. 4. №6. P. 977–983.
[192] Goodman V., Kuelbs J. Cramér functional estimates for Gaussian measures // Diffusion Processes and Related Topics in Analysis, Progress in Probability, 22. Boston: Birkhäuser, 1990. P. 473–495.
[193] Götze F., Hipp C. Asymptotic expansions for sums of weakly dependent random vectors // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. 1983. V. 64. P. 211–240.
[194] Groeneboom P., Oosterhoff J., Ruymgaart F. H. Large deviation theorems for empirical probability measures // Ann. Probab. 1979. V. 7. P. 553–586.
[195] Gulinsky O. V., Veretennikov A. Yu. Large deviations for discrete-time processes with averaging. Utrecht: VSP, 1993.
[196] Hertle A. On the asymptotic behaviour of Gaussian spherical integrals // Lect. Notes Math. V. 990, 1983. P. 221–234.
[197] Hipp C. Asymptotic expansions in the Central Limit Theorem for compound and Markov processes // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. 1985. V. 69. P. 361–385.
[198] Hoffman-Jørgensen J. Probability in Banach spaces // Lect. Notes Math. V. 598, 1977. P. 1–186.
[199] Hoffmann-Jørgensen J., Shepp L. A. and Dudley R. M. On the lower tail of Gaussian seminorms // Ann. Probab. 1979. V. 7. №2. P. 319–342.
[200] Holley R. A., Kusuoka S., Stroock D. W. Asymptotics of the spectral gap with applications to the theory of simulated annealing // J. Funct. Anal. 1989. V. 83. P. 333–347.
[201] Hogan M. L., Siegmund D. Large deviations for the maxima of some random fields // Adv. Appl. Math. 1986. V. 7. P. 2–22.
[202] Hwang C.-R. Gaussian measure of large balls in a Hilbert space // Proc. Amer. Math. Soc. 1980. V. 78. №1. P. 107–110; 1985. V. 94. №1. P. 188.
[203] Ibragimov I. A., Sudakov V. N., Tsirel'son B. S. Norms of Gaussian sample functions // Lect. Notes Math. V. 550, 1976. P. 20–41.
[204] Iscoe I., McDonald D. Large deviations for ℓ^2-valued Ornstein–Uhlenbeck processes // Ann. Probab. 1989. V. 17. №1. P. 58–73.
[205] Iscoe I., Marcus M. B., McDonald D., Talagrand M., Zinn J. Continuity of ℓ^2-valued Ornstein–Uhlenbeck processes // Ann. Probab. 1990. V. 18. №1. P. 68–84.
[206] Jain N. C. Central limit theorem in Banach spaces // Lect. Notes Math. V. 526, 1976. P. 113–130.

[207] Jain N. C. An Introduction to Large Deviations // Lect. Notes Math. V. 1153, 1985. P. 273–296.

[208] Kallianpur G., Oodaira H. Freidlin–Wentzell type estimates for abstract Wiener spaces // Sankhyā. Ser. A. 1978. V. 40. P. 116–137.

[209] Kifer Yu. Random Perturbations of Dynamical Systems. Boston: Birkhäuser, 1988.

[210] Konstant D. G., Piterbarg V. I. Extreme values of the cyclostationary chi-square random process // Preprint, 1991. P. 1–44.

[211] Kuelbs J., Li W. V. Metric entropy and the small ball problem for Gaussian measures // J. Funct. Anal. 1993. V. 116. P. 133–157.

[212] Kuelbs J., Li W. V. Small ball probabilities for Brownian motion and the Brownian sheet // J. Theoret. Probab. 1993. V. 6. P. 547–577.

[213] Kuelbs J., Li W., Shao Q.-M. Small ball probabilities for Gaussian processes with stationary increments under Hölder norms // Preprint, 1993.

[214] Kuelbs J., Li W. V., Linde W. The Gaussian measure of shifted balls // Probab. Theory Relat. Fields. 1994. V. 98. P. 143–162.

[215] Kusuoka S., Tamura Y. The convergence of Gibbs measures associated with mean field potentials // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. 1A. 1984. V. 31. P. 223–245.

[216] Kusuoka S., Tamura Y. Symmetric Markov processes with mean field potentials // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. 1A. 1987. V. 34. P. 371–389.

[217] Kusuoka S., Tamura Y. Precise estimate for large deviation of Donsker–Varadhan type // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. 1A. 1991. V. 38. P. 533–565.

[218] Kusuoka S., Stroock D. Precise asymptotics of certain Wiener functionals // J. Funct. Anal. 1991. V. 99. №1. P. 1–40.

[219] Kusuoka S., Stroock D. Asymptotics of certain Wiener functionals with degenerate extrema // Comm. Pure Appl. Math. 1994. V. 47. №4. P. 477–501.

[220] Langouche F., Rockaerts D., Tirapegui E. Functional integration and semi-classical expansions. Dordrecht: Reidel, 1982.

[221] Large deviations and applications // 29.11 – 5.12.1992, Tagungsber./Math. Forschungsinst., Oberwolfach, 1992, № 51. P. 1–21.

[222] Léandre R. Minoration en temps petit de la densité d'une diffusion dégénerée // J. Funct. Anal. 1987. V. 74. P. 399–414.

[223] Léandre R. Majoration en temps petit de la densité d'une diffusion dégénerée // Probab. Theory Relat. Fields. 1987. V. 74. P. 289–294.

[224] Ledoux M. A note on large deviations for Wiener chaos // Lect. Notes Math. V. 1426, 1990. P. 1–14.

[225] Ledoux M., Talagrand M. Probability in Banach spaces, Isoperimetry and Processes. Berlin: Springer-Verlag, 1991.

[226] Ledoux M. Isoperimetry and Gaussian analysis // Preprint, 1994.

[227] Li W. V. Comparison results for the lower tail of Gaussian seminorms // J. Theor. Probab. 1992. V. 5. P. 1–31.

[228] Li W. V. On the lower tail of Gaussian measures on ℓ_p // Probability in Banach spaces – 8, Progress in Probability, 30. Boston: Birkhäuser, 1992. P. 106–115.

[229] Li W., Shao Q.-M. Small ball estimates for Gaussian processes under Sobolev type norms // Preprint, 1994.

[230] Lifshits M. A. On the norm distribution of Gaussian and other stable vectors // Proc. of the Fifth Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics / ed. B. Grigelionis et al. V. 2. Vilnius–Utrecht: Mokslas–VSP, 1990. P. 97–104.

[231] Lifshits M. A. On the lower tail probabilities of some series of random variables // Prépublication de l'Institut de recherche mathématique avancée. Strasbourg, 1994.

[232] Linde W. Infinitely divisible and stable measures on Banach spaces. Leipzig: Teubner–Texte Math., Bd. 58, 1983.

[233] Linde W. Gaussian measures of large balls in $\mathbb{R}^n$ // Stable processes and related topics. Boston: Birkhäuser, 1991. P. 1–25.

[234] Linde W. Gaussian measures of large balls in ℓ^p // Ann. Probab. 1991. V. 19. №3. P. 1264–1279.

[235] Lorang G., Roynette B. Un théorème de Schilder pour des fonctionnelles browniennes non régulières // Ann. Inst. H. Poincaré. Probab. et Statist. 1993. V. 29. №4. P. 513–530.

[236] Luttinger J. M. A new method for the asymptotic evaluation of a class of path integrals // J. Math. Phys. 1982. V. 23. №6. P. 1011–1016.

[237] Luttinger J. M. The asymptotic evaluation of a class of path integrals. II // J. Math. Phys. 1983. V. 24. №8. P. 2070–2073.

[238] Lynch J., Sethuraman J. Large deviations for process with independent increments // Ann. Probab. 1987. V. 15. №2. P. 610–627.

[239] Martin-Löf A. Laplace approximation for sums of independent random variables // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. 1982. V. 59. P. 101–115.

[240] Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976; Maslov V. P., Fedoriuk M. V. Semi-classical approximation in quantum mechanics. Dordrecht: Reidel, 1981.

[241] Mayer-Wolf E., Zeitouni O. The probability of small Gaussian ellipsoids and associated conditional moments // Ann. Probab. 1993. V. 21. №1. P. 14–24.

[242] Mayer-Wolf E., Zeitouni O. Onsager–Machlup functionals for non trace class SPDE's // Probab. Theory Relat. Fields. 1993. V. 95. P. 199–216.

[243] McLaughlin D. W. Path integrals, asymptotics and singular perturbations // J. Math. Phys. 1972. V. 13. №5. P. 784–796.

[244] Messer J., Spohn H. Statistical mechanics of the isothermal Lane–Enden equation // J. Stat. Phys. 1982. V. 29. P. 561–578.

[245] Mikami T. Large deviations theorems for empirical measures in Freidlin–Wentzell exit problems // Ann. Probab. 1991. V. 19. №1.

[246] Pickands J. III Upcrossing probabilities for stationary Gaussian processes // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 145. P. 51–73.

[247] Pincus M. Gaussian processes and Hammerstein integral equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 134. P. 193–216.

[248] Piterbarg V. I. High deviations for multidimensional stationary Gaussian processes with independent coordinates // Проблемы устойчивости стахостических моделей / ред. В.М. Золотарев, В.М. Круглов, В.Ю. Королев. М.–Утрехт: ТВП–VSP, 1994. С. 197–230.

[249] Piterbarg V. I., Tyurin Yu. N. Testing for homogeneity of two multivariate samples: A Gaussian random field on a sphere // Math. Meth. Statist. 1993. V. 2. №2. P. 147–164.

[250] Piterbarg V. I. High excursions for nonstationary generalized chi-square processes // Stoch. Process. Appl. 1994. V. 53. №2. P. 307–337.

[251] Qualls C., Watanabe H. Asymptotic properties of Gaussian processes // Ann. Math. Statist. 1972. V. 43. №2. P. 580–596.

[252] Qualls C., Watanabe H. Asymptotic properties of Gaussian random fields // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 177. P. 155–171.

[253] Rezende J. The method of stationary phase for oscillatory integrals on Hilbert spaces // Comm. Math. Physics. 1985. V. 101. P. 187–206.

[254] Richter W.-D. Gaußsche Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen im Banachraum ℓ_p // Wissensch. Z. Techn. Univ. Dresden. 1985. V. 34. №4. P. 60.

[255] Richter W.-D. Multidimensional domains of large deviations // Limit Theorems in Probability and Statistics. Colloquia Math. Soc. János Bolyai. V. 57. Amsterdam, 1990. P. 443–458.

[256] Rossignol S. Développements asymptotiques d'intégrales de Laplace sur l'espace de Wiener dans le cas dégéneré // C. R. Acad. Sci., Sér. 1. 1993. V. 317. №10. P. 971–974.

[257] Samorodnitsky G., Taqqu M. S. Stable Random Processes. Pacific Grove, CA: Wadsworth and Brooks/Cole, 1990.

[258] Samorodnitsky G. Probability tails of Gaussian extrema // Stoch. Process. Appl. 1991. V. 38. P. 55–84.

[259] Sazonov V. V. Normal approximation – some recent advances // Lect. Notes Math. V. 879, 1981. P. 1–105.
[260] Sawyer S. Laplace's method, stationary phase, saddle points, and a theorem of Lalley // Harmonic Analysis and Discrete Potential Theory (Frascati, 1991). New York: Plenum, 1992. P. 51–67.
[261] Schilder M. Some asymptotic formulas for Wiener integrals // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 125. P. 63–85.
[262] Schmuland B. Sample path properties of ℓ^p-valued Ornstein–Uhlenbeck processes // Canad. Math. Bull. 1990. V. 33. №3. P. 358–366.
[263] Schulman L. S. Techniques and applications of path integration. New York and Toronto: Wiley, 1981.
[264] Siegmund D. Boundary crossing probabilities and statistical application // Ann. Statist. 1986. V. 14. P. 361–404.
[265] Simon B. Functional Integration and Quantum Physics. New York: Academic Press, 1979.
[266] Simon B. Trace Ideals and Their Applications. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1979.
[267] Slaby M. On large deviations of Gaussian measures in Banach spaces // Probability in Banach spaces – 8, Progress in Probability, 30. Boston: Birkhäuser, 1992. P. 228–244.
[268] Slepian D. The one-sided barrier problem for the Gaussian noise // Bell System Techn. J. 1962. V. 41. №2. P. 463–501.
[269] Stolz W. Une méthode élémentaire pour l'évalution de petites boules browniennes // C. R. Acad. Sci., Sér. 1. 1993. V. 316. P. 1217–1220.
[270] Strait P. T. Sample function regularity for Gaussian processes with the parameter in a Hilbert space // Pacific J. Math. 1966. V. 19. №1. P. 159–173.
[271] Stroock D. W. An Introduction to the Theory of Large Deviations. New York: Springer-Verlag, 1984.
[272] Sun J. Tail probabilities of the maxima of Gaussian random fields // Ann. Probab. 1993. V. 21. P. 34–71.
[273] Talagrand M. Small tails for the supremum of a Gaussian processes // Ann. Inst. H. Poincaré. Ser. B. 1988. V. 24. P. 307–315.
[274] Talagrand M. The small ball problem for the Brownian sheet // Ann. Probab. 1994. V. 22. №3. P. 1331–1354.
[275] Talagrand M. Sharper bounds for Gaussian and empirical processes // Ann. Probab. 1994. V. 22. №1. P. 28–76.
[276] Talagrand M. Supremum of some canonical processes // Amer. Math. J. 1994 (to appear).
[277] Uhlenbeck G. E., Ornstein L. S. On the theory of Brownian motion // Phys. Rev. 1930. V. 36. P. 823–841.
[278] Varadhan S. R. S. Asymptotic probabilities and differential equations // Comm. Pure Appl. Math. 1966. V. 19. P. 261–286.
[279] Varadhan S. R. S. Diffusion processes in a small time interval // Comm. Pure Appl. Math. 1967. V. 20. P. 659–685.
[280] Varadhan S. R. S. Large deviations and applications. Philadelphia: SIAM, 1984.
[281] Varadhan S. R. S. Large deviations and applications // Lect. Notes Math. V. 1362, 1988. P. 1–49.
[282] Varopoulos N. Small time Gaussian estimates of heat diffusion kernels, I: The semigroup technique // Bull. Sci. Math. 1989. V. 113. P. 253–277.
[283] Watanabe S. Analysis of Wiener functionals (Malliavin calculus) and its applications to heat kernels // Ann. Probab. 1987. V. 15. №1. P. 1–39.
[284] Watanabe S. Short time asymptotic problems in Wiener functional integration theory. Applications to heat kernels and index theorems // Lect. Notes Math. V. 1444, 1990. P. 1–62.
[285] Weber M. Sur la densité de la distribution du maximum d'un processus gaussien // J. Math. Kyoto Univ. 1985. V. 25. P. 515–521.

[286] Weron A. Stable processes and measures: A survey // Lect. Notes Math. V. 1080, 1984. P. 306–364.
[287] Wiegel F. W. Path integral methods in statistical mechanics // Phys. Rep. 1975. V. 16. P. 57–114.
[288] Wiener N. Differential space // J. Math. and Phys. 1923. V. 2. P. 131–174.
[289] Wu L. M. Grandes déviations pour les processus de Markov essentiellement irréductible, I: Temps discret; II: Temps continu; III: Quelques applications // C. R. Acad. Sci., Sér. 1. 1991. V. 312. P. 608–614 ; 1992. V. 314. P. 941–946; 1993. V. 316. №8. P. 853–858.
[290] Yeh J. Wiener measure in a space of functions of two variables // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. V. 95. P. 443–450.
[291] Yurinskii V. V. Exponential inequalities for sums of random vectors // J. Multivariate Anal. 1966. V. 6. P. 473–499.
[292] Богачев В. И. Функции Онзагера–Маклупа для гауссовских мер // ДАН (в печати).
[293] Икеда Н., Ватанабе Ш. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1987.
[294] Фаталов В. Р. Большие уклонения L^p-нормы винеровского процесса со сносом. (в печати).
[295] Ciesielski Z. On the isomorphisms of the spaces H_α and m // Bull. Acad. Polon Scie. 1960. V. 8. P. 217–222.
[296] Deuschel J.-D., Wang K. Large deviations for the occupation time functional of a Poisson system of independent Brownian particle // Stoch. Process. Appl. 1994. V. 52. №2. P. 183–209.
[297] Dobrushin R. L., Shlosman S. B. Large and moderate deviations in the Ising model // Probability Contributions to Statistical Mechanics / ed. R.L. Dobrushin. Advances in Sov. Math., 20. Providence: Amer. Math. Soc., 1994. P. 91–219.
[298] Imkeller P. On exact tails for limiting distributions of U-statistics in the second Gaussian chaos // Chaos expansions, multiple Wiener–Itô integrals and their applications (Guanajuato, 1992). Boca Raton: Probab. Stochastics Ser., CRC, 1994. P. 179–204.
[299] Iscoe I., McDonald D. Asymptotics of absorption probabilities for Ornstein–Uhlenbeck processes // Stochast. Stochast. Rep. 1992. V. 39. №1. P. 43–51.
[300] Iscoe I., McDonald D. Asymptotics of exit times for Markov jump processes, I // Ann. Probab. 1994. V. 22. №1. P. 372–397.
[301] Lifshits M. A. Gaussian Random Functions. Berlin: Klüwer, 1995; Лифшиц М. А. Гауссовские случайные функции. Киев: ТВіМС, 1995.
[302] Lindgren G. Extreme values and crossings for the chi-square processes and other functions of multidimensional Gaussian processes, with reliability applications // Adv. Appl. Probab. 1980. V. 12. P. 764–774.
[303] Льюис Дж., Фистер К. Термодинамическая теория вероятностей: Некоторые аспекты больших уклонений // УМН. 1995. Т. 50. №2. С. 47–88.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
04.04.1995