В. А. Шлык, Условие ε-охвата для N-компактов, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1991, том 196, 154–161

В.А.Шлык

УСЛОВИЕ ε-ОБХВАТА ДЛЯ N-КОМПАКТОВ

1. Известно, [1, теорема 10], что если E – NED-множество в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ или, иначе говоря, устранимое множество для класса регулярных функций с ограниченным интегралом Дирихле, то двумерная мера Лебега $L_2(E)$ множества E равна нулю и любые две точки a, b из $\mathbb{C}\setminus E$ можно соединить кривой $\gamma \subset \mathbb{C}\setminus E$ длины $s(\gamma)$, сколь угодно близкой к расстоянию $d(a,b)$ между ними (свойство проницаемости компакта E).

Более слабая проницаемость относительно вещественной оси присуща N-компакту E, дополнение которого до $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ есть минимальная область в смысле Кебе [2,3] (или, другими словами, нормальная область в смысле Гретша [2,3]) при отображении на плоскость с прямолинейными разрезами, параллельными вещественной оси. Именно, $L_2(E)=0$ и любые две точки $a, b \in \mathbb{C}\setminus E$, $\operatorname{Re} a = \operatorname{Re} b$, можно соединить кривой $\gamma \in \mathbb{C}\setminus E$ длины, сколь угодно близкой к расстоянию $d(a,b)$. С другой стороны, классический пример Кебе [4] показывает, что проницаемость компакта E относительно всех направлений не гарантирует минимальность области $\overline{\mathbb{C}}\setminus E$ в указанном выше смысле.

Ниже вводится понятие ε-обхвата компакта E относительно прямой. Оно обобщает соответствующее свойство проницаемости и позволяет установить новые точные характеристики N-компактов и NED-множеств.

2. Пусть H^k и L_k – соответственно k-мерные меры Хаусдорфа и Лебега. Положим $\ell(y)=\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z = y\}$, $-\infty<y<\infty$. Будем говорить, что компакт $E\subset\mathbb{C}$ удовлетворяет условию ε-обхвата относительно вещественной оси, если

1) $L_2(E)=0$;

2) для каждой борелевской функции $\rho:\mathbb{C}\to[0,\infty]$, $\rho\in L^2(\mathbb{C})$, по произвольному заданному $\varepsilon>0$ можно указать на прямой $\ell(y)$, где $\ell(y)\cap E\neq\emptyset$, конечное число попарно непересекающихся сегментов $[a_m, b_m]$, $m=\overrightarrow{1,m_1}$, покрывающих компакт $\ell(y)\cap E$ и имеющих суммарную длину, меньшую $H^1(\ell(y)\cap E)+\varepsilon$. При этом для L_1-почти всех таких y концы сегмента $[a_m, b_m]$ не принадлежат E и соединимы в $\mathbb{C}\setminus E$ спрямляемой кривой λ_m таким образом, что

$$\sum_{m=1}^{m_1}\int_{\lambda_m}\rho\, ds<\varepsilon. \qquad (1)$$

Аналогично введем понятие ε-обхвата компакта E относительно прямой $\ell_\theta = \ell_{\theta+\pi}$, образующей угол θ с вещественной осью. Более того, заменив в определении ε-обхвата $L^2(\mathbb{C})$ на $L^n(\mathbb{R}^n), L_1$ на L_{n-1}, сходным образом сформулируем условие ε-обхвата для компакта $E \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, относительно, например, координатной x_j-оси.

3. Пусть $\Pi = \{z = x+iy \in \mathbb{C} : a_1 < x < b_1,\ a_2 < y < b_2\}$ – невырожденный координатный прямоугольник. Положим

$$A_1 = (a_1, a_2),\ A_2 = (b_1, a_2),\ A_3 = (b_1, b_2),\ A_4 = (a_1, b_2),$$

$$\sigma_0 = \{z \in \mathbb{C} : x = a_1, a_2 \leqslant y \leqslant b_2\},\ \sigma_1 = \{z \in \mathbb{C} : x = b_1, a_2 \leqslant y \leqslant b_2\}.$$

Пусть $\Gamma(\sigma_0, \sigma_1, \Pi \setminus E)$ (соответственно, $\Gamma(\sigma_0, \sigma_1, \Pi)$) – семейство всех спрямляемых кривых, расположенных в $\Pi \setminus E$ (соответственно, в Π) и соединяющих σ_0, σ_1. Его 2-модуль [3] обозначим через $m_2(\sigma_0, \sigma_1, \Pi \setminus E)$ (соответственно, через $m_2(\sigma_0, \sigma_1, \Pi)$).

ТЕОРЕМА I. E – N-компакт в том и только в том случае, когда E удовлетворяет условию ε-обхвата относительно ℓ_0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $\Pi \supset E$. Тогда (см. [3]) $m_2(\sigma_0, \sigma_1, \Pi) = m_2(\sigma_0, \sigma_1, \Pi \setminus E)$. $G = \Pi \setminus E$ – область и $L_2(E) = 0$. Пусть G_j – конечносвязная подобласть G, внешняя граница которой совпадает с внешней границей G, причем $\overline{G}_j \subset G_{j+1}$, $\bigcup_{j=1}^{\infty} G_j = G$. Известно [4], что существует однолистное конформное отображение f_j области G_j на область B_j, внешняя граница которой является контуром прямоугольника $\Pi_j = A_1 A_2 A_3^j A_4^j$, а внутренними граничными компонентами служат точки или отрезки прямых, параллельных вещественной оси. При этом $\Pi_j \subset \Pi$ и

$$f_j(A_1) = A_1,\ f_j(A_2) = A_2,\ f_j(A_3) = A_3^j,\ f_j(A_4) = A_4^j.$$

В силу необходимости условия теоремы можно считать, что последовательность f_j, $j \in N$, сходится равномерно внутри G к функции $f(z) \equiv z$. Положим $E^j = \Pi_j \setminus B_j$. Функцию, обратную к $w = f_j(z)$, $z \in G_j$, обозначим через $z = g_j(w)$, где $w \in B_j$, и пусть $\rho_j(w) = \rho(g_j(w))|g_j'(w)|$ при $w \in B_j$ и $\rho_j(w) = g_j'(w) = 0$ при $w \in \Pi \setminus B_j$. Так как g_j и g_j' сходятся при $j \to \infty$ равномерно внутри G соответственно к тождественному отображению и единице, то по теореме Лузина ρ_j сходится поточечно L_2-почти везде в Π к ρ. Аналогично, учитывая условие $\rho \in L^2(\Pi)$ и однолистность f_j, по заданному $\delta_1 > 0$ компакт E можно заключить в открытое множество $O \Subset \Pi$ таким образом, чтобы при $j \geqslant j_0$ выполнялись условия

$$\int_O \rho^2 \, dL_2 < \delta_1, \quad \int_O \rho_j^2 \, dL_2 < \delta_1.$$

Тем самым в силу теоремы Егорова имеем

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\Pi}|\rho(z)-\rho_j(z)|^2 dL_2=0.$$

Отсюда

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\ell(y)\cap\Pi}|\rho(x,y)-\rho_j(x,y)|^2 dx=0$$

для всех $y\in(a_2,b_2)\setminus K_1$, где $K_1\subset(a_1,b_1)$ и $L_1(K_1)=0$.

Пусть K_2 - множество всех точек $y\in(a_2,b_2)$, для каждой из которых выполняется хотя бы одно из приведенных ниже требований:

1) $\int_{\ell(y)\cap\Pi}\rho^2(x,y)\,dx=\infty$;

2) $\ell(y)\cap\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}E^j\right)\neq\emptyset$;

3) $H^1(\ell(y)\cap E)>0$;

4) функция $\int_{\ell(y)\cap\Pi}\rho^2(x,y)\,dx$, $y\in(a_2,b_2)$, не является аппроксимативно непрерывной в точке y.

По построению, $H^1(K_2)=0$. Зададим $\varepsilon_1>0$ и выберем некоторую точку $y_0\in(a_2,b_2)\setminus(K_1\cup K_2)$. Покроем $E\cap\ell(y_0)$ конечным числом прямолинейных непересекающихся сегментов $q_1,\dots,q_K\subset\ell(y_0)$ суммарной длины, меньшей ε_1, и с концами, расположенными вне E. Восстановим из концов этих сегментов параллельно y-оси сонаправленные прямолинейные отрезки $m_1,\dots,m_S\subset\Pi\setminus E$ одинаковой длины. Уменьшая, если требуется, сегменты $q_1,\dots,q_K$, выбор отрезков $m_1,\dots,m_S$ подчиним условию

$$\sum_{p=1}^{S}\int_{m_p}\rho\,dH^1<\varepsilon_1, \tag{2}$$

где ε_1 - заданное положительное число.

Выберем $y_1\in(a_2,b_2)\setminus(K_1\cup K_2)$ достаточно близким к y_0 и таким, чтобы прямая $\ell(y_1)$ пересекалась со всеми отрезками m_1, ..., m_S, образуя при этом попарно непересекающиеся сегменты $\tilde q_1,\dots,\tilde q_K$, где $\{\operatorname{Re} z: z\in q_p\}=\{\operatorname{Re} z: z\in\tilde q_p\}$ при $p=\overline{1,K}$ и $\int_{\ell(y_1)\cap\Pi}\rho^2 dx\le\int_{\ell(y_0)\cap\Pi}\rho^2 dx+\varepsilon_1$. Несколько расширим сегменты $\tilde q_1,\dots,\tilde q_K$ до попарно непересекающихся сегментов $n_1,\dots,$

u_K из $l(y_1)\cap\Pi$, для которых дуги $q_j(u_1), \dots, q_j(u_K)$ по-прежнему пересекают соответствующие отрезки $m_1, \dots, m_s$ при $j \geqslant j_0$ и $\sum_{p=1}^{K} H^1(u_p) < 2\varepsilon_1$. Этого можно добиться в силу равномерной сходимости функций f_j, g_j при $j \to \infty$ к тождественному отображению в достаточно малой окрестности каждого отрезка m_j, $j=\overrightarrow{1,s}$. Воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского, в силу выбора y_0, y_1 получим при достаточно больших j

$$\sum_{p=1}^{K}\int\limits_{g_i(u_p)}\rho\,ds=\sum_{p=1}^{K}\int\limits_{u_p}\rho_j\,dx\leqslant\Big(\int\limits_{l(y_0)\cap\Pi}\rho^2dx+\varepsilon_1\Big)^{1/2}\sqrt{2\varepsilon_1}.\qquad(3)$$

Возьмем теперь в (I) в качестве кривых λ_m каждую компоненту связности множества $\big(\bigcup_{p=1}^{K} q_j(u_p)\big)\cup\big(\bigcup_{p=1}^{s} m_p\big)$. Тогда одновременное выполнение условий (2) и (3) при малых ε_1 и возможность произвола в выборе $y_0\in(a_2,b_2)\setminus(K_1\cup K_2)$ показывают справедливость условия ε -обхвата для компакта E относительно вещественной оси. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\Gamma_1=\{l(y)\cap\Pi : y\in(a_2,b_2)\}$, где $E\subset\Pi$. Тогда (см. [5]) 2-модуль $m_2(\Gamma_1)$ семейства Γ_1 равен $m_2(б_0,б_1,\Pi)$. Пусть ρ - допустимая борелевская метрика для семейства $\Gamma(б_0,б_1,\Pi\setminus E)$ в проблеме модуля $m_2(б_0,б_1,\Pi\setminus E)$ и $\int\limits_{\Pi\setminus E}\rho^2 dL_2<\infty$. Положим $\rho=0$ для $\mathbb{C}\setminus(\Pi\setminus E)$. Ясно, что $\rho\in L^2(\mathbb{C})$ и ввиду заданного условия для компакта E ρ - допустимая метрика в обобщенном смысле в проблеме модуля $m_2(\Gamma_1)$. Учитывая произвол в выборе ρ , получаем $m_2(б_0,б_1,\Pi)=m_2(\Gamma_1)\leqslant m_2(б_0,б_1,\Pi\setminus E)$. Отсюда $m_2(б_0,б_1,\Pi\setminus E)=m_2(б_0,б_1,\Pi)$, значит, E - N -компакт (см. [3]). Достаточность и вместе с ней теорема доказаны.

4. Пусть $G=\Pi\setminus E$, $E\subset\Pi$, и $f=(f_1,f_2):G\to\mathbb{C}$ - топологическое отображение, для которого координатные функции f_1, f_2 принадлежат соболевскому пространству $L_2^1(G)$ (см. [6]).

Положим

$$\rho_f(z)=\begin{cases}\left(|\operatorname{grad} f_1|^2+|\operatorname{grad} f_2|^2\right)^{1/2}, \text{если } z\in G \text{ и } \operatorname{grad} f_1,\\ \operatorname{grad} f_2 \text{ одновременно существуют в точке } z\ ;\\ 0 \quad \text{в остальных точках } \mathbb{C}\ .\end{cases}$$

Измеримость по Борелю функции $\rho_f(z)$ следует из известных фактов (см., например, [5, с.17]). Обозначим через $E(y,f)$ множество предельных значений функции f на $\ell(y)\cap E$, $y\in(a_2,b_2)$, вдоль G. Из анализа доказательства теоремы I нетрудно заметить, что на самом деле N-компакт удовлетворяет более сильному условию "двухстороннего" ε-обхвата относительно ℓ_0. Точнее, $L_2(E)=0$ и для каждой борелевской функции $\rho:\mathbb{C}\to[0,\infty]$, $\rho\in L^2(\mathbb{C})$, по произвольному заданному $\varepsilon>0$ компакт $E\cap\ell(y)$, где $\ell(y)\cap E\neq\emptyset$, можно для L_1-почти всех таких y заключить в систему замкнутых простых кривых $\lambda_1, \dots, \lambda_{m_1}\subset\mathbb{C}\setminus E$ суммарной длины $<\varepsilon$ и удовлетворяющих условию

$$\sum_{m=1}^{m_1}\int_{\lambda_m}\rho\, ds<\varepsilon.$$

При этом выбор $\lambda_1, \dots, \lambda_{m_1}$ можно осуществить таким образом, чтобы данное отображение f было абсолютно непрерывной функцией на указанных кривых.

Это замечание при $\rho=\rho_f$ вместе с теоремой I показывает, что минимальность области $\overline{\mathbb{C}}\setminus E$ обусловлена выполнением следующего обобщенного N-свойства [7] вдоль линий $y=\mathrm{const}$ для каждого гомеоморфизма $f=(f_1,f_2):G\to\mathbb{C}$, $f_1,f_2\in L_2^1(G)$.

Для однолистных конформных отображений f это N-свойство установлено в [8] .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $L_2(E)=0$ и $E\subset\Pi$. Тогда E - N-компакт в том и только в том случае, когда каждый гомеоморфизм $f=(f_1,f_2):G\to\mathbb{C}$, где $f_1,f_2\in L_2^1(G)$, допускает непрерывное продолжение изнутри G на отрезок $\ell(y)\cap\Pi$ для L_1-почти всех $y\in(a_2,b_2)$, удовлетворяющее условию $H^1(E(y,f))=0$.

Из теорем I, 2 вытекает следующая характеристика NED-множеств.

ТЕОРЕМА 3. E - NED-множество в том и только в том случае, когда E удовлетворяет условию ε-обхвата относительно ℓ_0 и $\ell_{\pi/2}$.

5. Вяйселя (см.[9]), затем Асеев и Сычев [9] рассмотрели свойства NED-множеств в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$. Следующее утверждение является частичным аналогом теоремы 3 для пространственных NED-множеств.

ТЕОРЕМА 4. Пусть E - компакт σ-конечной H^{n-1}-меры в $\mathbb{R}^n$. Тогда E - NED-множество в том и только в том случае, когда E удовлетворяет условию ε-обхвата относительно каждой координатной x_j-оси, $j=\overrightarrow{1,n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $\Pi=\{x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n:$ $a_j<x_j<b_j,\ j=\overrightarrow{1,n}\}$ – n-мерный координатный прямоугольник такой, что $E\subset\Pi$, $\Pi'=\{x=(x_1,\dots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}:$ $a_j<x_j<b_j,\ j=\overrightarrow{1,n-1}\}$. Пусть $\Gamma_j=\Gamma(\sigma_{0,j},\sigma_{1,j},\Pi\setminus E)$ – семейство всех спрямляемых кривых, расположенных в $\Pi\setminus E$ и соединяющих стороны $\sigma_{0,j},\sigma_{1,j}$ прямоугольника Π, параллельные гиперплоскости $x_j=0$. Положим $l(x')=\{(x',x_n)\in\mathbb{R}^n:-\infty<x_n<\infty\}$,

$$T_n=\{l(x')\cap\Pi:x'\in\Pi'\},\ T_n^1=\{l(x')\cap\Pi:x'\in\Pi',\operatorname{card}(l(x')\cap E)\leqslant\operatorname{card}\mathbb{N}\}.$$

По условию, n-модули семейств T_n, T_n^1 удовлетворяют равенству $m_n(T_n)=m_n(T_n^1)$. Пусть $\rho:\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$ – борелевская функция из класса $L^n(\mathbb{R}^n)$. Положим

$$\rho_1=\begin{cases}\rho+1, & x\in\Pi;\\ \rho, & x\in\mathbb{R}^n\setminus\Pi.\end{cases}$$

Возьмем отрезок γ из T_n^1. Не ограничивая общности, будем считать множество $\gamma\cap E$ последовательностью $x^1,x^2,\dots$. Поскольку $H^1(\gamma\cap E)=0$, то компакт $\gamma\cap E$ можно покрыть конечным числом замкнутых шаров $B_1,\dots,B_m$ таких, что

$$\sum_{j=1}^{m}H^1(\gamma\cap B_j)<\varepsilon \text{ и } \gamma\cap E\Subset B=\bigcup_{j=1}^{m}B_j\subset\Pi,$$

где ε – заданное положительное число.

Ясно, что точка $y^1=x^1$ разбивает γ на два отрезка γ_0^1, γ_1^1, где $\gamma_0^1\cap\gamma_1^1=\{x^1\}$. Шар $B(y^1,\varepsilon_1)=\{x\in\mathbb{R}^n:|x-y^1|<\varepsilon_1\}$, где $\varepsilon_1>0$, выберем таким образом, что $\overline{B}(y^1,\varepsilon_1)\subset B$, $\varepsilon_1<\varepsilon/2$, и $\partial B(y^1,\varepsilon_1)\cap\gamma_j^1\neq\emptyset$, $j=0,1$. По условию (см. доказательство леммы 4.I из [5, с.68]), n-модуль $m_n(\gamma_0^1,\gamma_1^1,B(y^1,\varepsilon_1)\setminus E)$ семейства $\Gamma^1=\Gamma(\gamma_0^1,\gamma_1^1,B(y^1,\varepsilon_1)\setminus E)$ всех спрямляемых кривых, расположенных в $B(y^1,\varepsilon_1)\setminus E$ и соединяющих $\gamma_0^1\setminus\{y^1\}$, $\gamma_1^1\setminus\{y^1\}$, равен ∞. Поэтому найдется кривая $\lambda_1\in\Gamma^1$, соединяющая точку $c_1\in\gamma_0^1\setminus\{y^1\}$ с точкой $d_1\in\gamma_1^1\setminus\{y^1\}$. При этом $\int_{\lambda_1}(\rho+1)\,ds<\varepsilon_1$.

Пусть теперь $y^2=x^k$ – первый элемент последовательности $\{x^k\}$, который не принадлежит интервалу (c_1,d_1). Здесь возможны две ситуации. В первой ситуации пусть $y^2\neq c_1,d_1$. Точка y^2 разбивает γ на два отрезка γ_0^2, γ_1^2, где $\gamma_0^2\cap\gamma_1^2=\{y^2\}$.

Выберем шар $B(y^2,\varepsilon_2)$ так, чтобы $\overline{B}(y^2,\varepsilon_2)\cap[c_1,d_1]=\emptyset$ и $B(y^2,\varepsilon_2)\subset B$, $\varepsilon_2<\varepsilon/2^2$. По условию, найдется кривая $\lambda_2\in\Gamma_2=\Gamma(\gamma_0^1,\gamma_1^2,B(y^2,\varepsilon_2)\setminus E)$, которая соединяет точки $c_2\in\gamma_0^2\setminus\{y^2\}$ и $d^2\in\gamma_1^2\setminus\{y^2\}$. При этом

$$\int_{\lambda_2}(\rho+1)\,ds<\varepsilon_2.$$

Во второй ситуации пусть, например, $y^2=c_1$. В этом случае возьмем в качестве γ_0^2 кривую λ_1, в качестве γ_1^2, $c_1\in\gamma_1^2$ – отрезок на γ, дополнительный к (c_1,d_1). Повторяя приведенные выше рассуждения, найдем кривую $\tilde\lambda_2\in\Gamma_2$, соединяющую некоторую точку $d_2\in\gamma_1^2\setminus\{y^2\}$ с точкой $\tilde c_2$, расположенной на λ_1. При этом $\int_{\tilde\lambda_2}(\rho+1)\,ds<\varepsilon_2$ и в качестве λ_2 возьмем $\lambda_1\cup\tilde\lambda_2$, в качестве c_2 возьмем c_1. Аналогично определим y^k, c_k, d_k, $B(y^k,\varepsilon_k)$, λ_k по заданным $y_1,\dots,y^{k-1}$; $c_1,\dots,c_{k-1}$; $d_1,\dots,d_{k-1}$; $B(y^1,\varepsilon_1),\dots,B(y^{k-1},\varepsilon_{k-1})$; $\lambda_1,\dots,\lambda_{k-1}$, где $k>2$. Покажем, что эта процедура закончится на m_1-м шаге. В самом деле, допуская противное, можно считать, что $y_k\longrightarrow y\in E\cap\gamma$ при $k\longrightarrow\infty$. Поскольку $y=x_{m_0}^{m_0}$, то начиная, по крайней мере, с m_0-го шага элемент x^{m_0} должен принадлежать одному из интервалов $(c_1,d_1),\dots,(c_{m_0},d_{m_0})$. Поэтому элементы последовательности $\{y^k\}$ при достаточно больших номерах $k\geqslant k_0$ принадлежат одному из этих интервалов. Это противоречит выбору y^k при $k>k_0$. Тем самым требуемое свойство установлено. Наконец, выбирая в определении ε-обхвата в качестве $[a_m,b_m]$ компоненты связности множества $\bigcup_{k=1}^{m_1}[c_k,d_k]$, а в качестве λ_m -компоненты связности множества $\bigcup_{k=1}^{m_1}\lambda_k$, обеспечим выполнение условий данного определения для компакта E (относительно x_n-оси). Аналогично проверим выполнение условий данного определения для E относительно остальных координатных осей. Необходимость доказана.

Достаточность следует из рассуждений при доказательстве достаточности условия теоремы I и из предложения 5 из [10].

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Используя дифференциальные свойства интегралов в $\mathbb{R}^n$ (см. [7]) и свойства N_p-компактов [10], результаты теорем I и 3 можно распространить на случай N_p-компактов и NC_p-множеств (см. [10]) в $\mathbb{R}^n$, где $p\in(1,\infty)$, $n\geqslant 2$.

Литература

I. A h l f o r s L., B e u r l i n g A. Conformal invariants and functions-theoretic null-sets. - Acta Math., 1950, vol.83, N 1-2, p.101-129.
2. S a r i o L., O i k a w a K. Capacity functions. Berlin: Springer, 1969.
3. Д ж е н к и н с Д. Однолистные функции и конформные отображения. М., I962.
4. Т а м р а з о в П.М. Конформно-инвариантные модули и круговая симметризация. В кн.: Метрические вопросы теории функций и отображений. Киев: Наукова думка, I974, вып.5, с.I27-I46.
5. С ы ч е в А.В. Модули и пространственные квазиконформные отображения. Новосибирск, I983.
6. С а к с С. Теория интеграла. М., I949.
7. М а з ь я В.Г. Пространства С.Л.Соболева Л.: ЛГУ, I985.
8. Ш л ы к В.А. К теории нормальных областей. В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 9. Зап.научн.семин.ЛОМИ, I988, т.I68, с.I80-I86.
9. А с е е в В.В., С ы ч е в А.В. О множествах, устранимых для пространственных квазиконформных отображений. - Сиб.мат. журн., I974, т.I5, № 6, с.I2I3-I227.
I0. Ш л ы к В.А. Строение компактов, порождающих нормальные области и устранимые особенности для пространства $L^1_p(D)$. - Матесб., I990, т.I8I, № II, с.I558-I572.