МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 2022 год, том 34, номер 5, стр. 105-122

ГИБРИДНАЯ МОДЕЛЬ СТАЦИОНАРНОГО ПЛАЗМЕННОГО ДВИГАТЕЛЯ С УЧЁТОМ КОНЕЧНОЙ МАССЫ ЭЛЕКТРОНОВ

© *2022 г.* ***М.Б. Гавриков, А.А. Таюрский***

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН
mbgavrikov@yandex.ru, tayurskiy2001@mail.ru

DOI: 10.20948/mm-2022-05-07

Предложена математическая модель для исследования процессов в стационарном плазменном двигателе с учётом ионизации рабочего вещества – ксенона, основанная на гибридных уравнениях электромагнитной гидродинамики плазмы, учитывающих в полном объёме инерцию электронов. Выбор модели электромагнитной гидродинамики для исследования плазменных процессов предопределяется их мелкомасштабностью и низкой концентрацией частиц плазмы в стационарном плазменном двигателе. Подробно рассмотрен 1D2V случай плоской симметрии, для которого построен численный алгоритм исследования решений гибридных уравнений электромагнитной гидродинамики, базирующийся на методе макрочастиц. Дано решение ряда принципиальных вопросов: вычисление средних величин, интерполяция, построение начального распределения макрочастиц, выбор граничных условий для электрического поля и т.д. Приведены результаты расчётов с учётом и без учёта индукционных полей в плазменном двигателе. Влияние индукционных полей, генерируемых плазменными токами, на процессы в стационарном плазменном двигателе и роль инерции электронов ранее не изучались, и полученные результаты являются оригинальными. В частности, предложена новая нетрадиционная схема расчёта электрического поля на базе обобщённого закона Ома, который в электромагнитной гидродинамике сводится к краевой задаче для эллиптической системы уравнений на компоненты электрического поля и в том числе требует постановки краевых условий. Важным результатом является необходимость пространственного и временного осреднения электромагнитных полей при расчёте ускорения плазмы двигателя с учётом индукционного поля.

Ключевые слова: стационарный плазменный двигатель (СПД), гибридная электромагнитная гидродинамика (ЭМГД), метод макрочастиц, обобщённый закон Ома, ионизация плазмы, кинетические уравнения, уравнение характеристик.

HYBRID MODEL OF A STATIONARY PLASMA THRUSTER TAKING INTO ACCOUNT THE FINAL ELECTRON MASS

M.B. Gavrikov, A.A. Taiurskii

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences

A mathematical model is proposed for studying the processes in a stationary plasma thruster (SPT) taking into account the ionization of the working substance – Xenon, based on the hybrid equations of electromagnetic hydrodynamics of the plasma, which fully take into account the inertia of electrons. The choice of an electromagnetic hydrodynamics model for studying plasma processes is predetermined by their small scale and low concentration of plasma particles in a stationary plasma thruster. The 1D2V case of plane symmetry is considered in detail, for which a numerical algorithm for investigating solutions of hybrid electromagnetic hydrodynamics equations is constructed, based on the method of macroparticles. The solution of a number of fundamental issues is given: the calculation of average values, interpolation, construction of the initial distribution of macroparticles, the choice of boundary conditions for the electric field, etc. The results of calculations with and without taking into account the induction fields in the plasma thruster are presented. The effect of induction fields generated by plasma currents on processes in a stationary plasma thruster and the role of electron inertia have not been studied before, and the results obtained are original. In particular, a new unconventional scheme for calculating the electric field based on the generalized Ohm's law is proposed, which in electromagnetic hydrodynamics is reduced to a boundary value problem for an elliptic system of equations for the components of the electric field and, among other things, requires setting boundary conditions. An important result is the need for spatial and temporal averaging of electromagnetic fields when calculating the acceleration of the thruster plasma, taking into account the induction field.

Key words: stationary plasma thruster (SPT), hybrid electromagnetic hydrodynamics (EMHD), macroparticle method, generalized Ohm's law, plasma ionization, kinetic equations, equation of characteristics.

1. Введение

Стационарные плазменные двигатели (СПД) были предложены А.И. Морозовым в 1971 г. и почти 50 лет успешно и безальтернативно используются для коррекции орбит космических летательных аппаратов [1–4]. Согласно упрощённой принципиальной схеме, приведённой на рис.1, СПД представляет собой коаксиальную камеру с керамическими боковыми стенками, в торцах которой расположены анод и катод с подведённой к ним разностью потенциалов, приводящей к появлению в камере электрического поля **E**. Кроме того, система обмоток с постоянными токами создаёт в камере почти радиальное магнитное поле **H**.

Нейтральный газ – ксенон Xe – подаётся в СПД со стороны анода (концентрация $n_{\mathrm{Xe}} \sim 2 \cdot 10^{13} \mathrm{см}^{-3}$, поток Xe 0.8 мг/с), ионизуется посредством ударной ионизации электронами, возникающие ионы ксенона (концентрация $n_i \sim 5 \cdot 10^{11} \mathrm{см}^{-3}$) ускоряются продольным электрическим полем **E** до скоростей порядка ~15 км/с и покидают камеру в сторону катода, нейтрали-

зуясь на нём. В результате возникает реактивная сила тяги, на получение которой и направлена работа СПД.

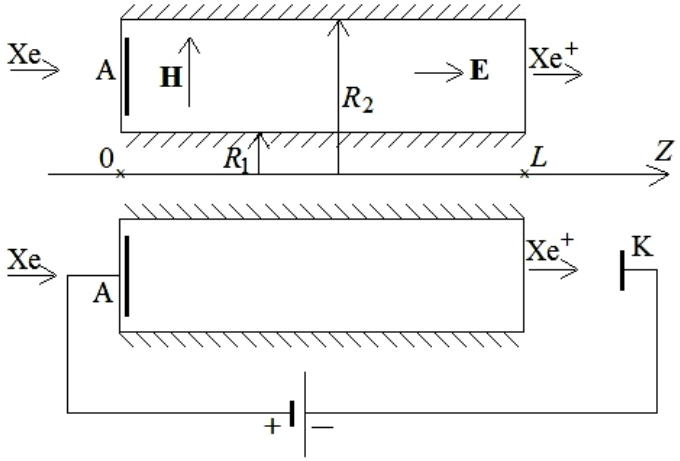

Рис.1. Принципиальная схема СПД.

Типичные значения параметров установки СПД-100М [5]: $L = 2.5$ см, $R_1 = 3.5$ см, $R_2 = 5$ см, $H \sim 200$ Гс, дебаевский радиус $r_D \sim 5 \cdot 10^{-3}$ см, ларморовские радиусы электронов и ионов $r_{\Lambda i} \sim 100$ см, $r_{\Lambda e} \sim 2 \cdot 10^{-1}$ см, температура электронов $T_e \sim 15$ эв, время непрерывной работы двигателя после выхода на квазистационарный режим $\sim 10^4$ ч.

Обычно плазма в СПД сильно замагничена, а магнитное поле **H** почти радиальное, по крайней мере, в зоне ускорения ионов. Как следствие, электроны двигаются по спиралям радиуса $r_{\Lambda e}$ вдоль силовых линий магнитного поля. Учитывая $r_{\Lambda i} >> L$, траектории ионов магнитное поле практически не искривляет. На физическом уровне строгости отсюда следует, что в гидродинамическом приближении для электронов $\mathbf{v}_e \| \mathbf{H}$, а T_e постоянна вдоль силовых линий магнитного поля. С другой стороны, в скрещенных полях **E**, **H** электроны дрейфуют со скоростью $c[\mathbf{E},\mathbf{H}] / H^2$, т.е. с учётом $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$, в азимутальном направлении. Таким образом, электроны “привязаны” к силовым линиям магнитного поля **H**, вдоль которых они двигаются между боковыми стенками камеры, отражаясь от последних по определённому закону. При этом электроны вращаются в азимутальном направлении и почти не перемещаются вдоль оси камеры. В итоге в СПД возникает электронное облако, вращающееся вокруг оси установки и совершающее радиальные движения между боковыми керамическими стенками камеры. Атомы Xe, попадая в это облако, ионизуются электронным ударом, а возникающие ионы Xe^+ ускоряются продольным электрическим полем **E**, продираясь сквозь неподвижное в осевом направлении электронное облако.

Нарисованная картина носит весьма грубый, ориентировочный характер. Открытыми остаются два принципиальных вопроса. Во-первых, какова природа электрического поля, ускоряющего ионы и, во-вторых, как велика роль индукционного электромагнитного поля, порождаемого плазменными токами, будет ли от него зависеть и насколько существенно, например, сила тяги СПД? Если эта роль ничтожно мала, то расчёт процессов в СПД сильно упрощается – необходимо исследовать динамику плазмы в камере установки с учётом объёмной ионизации и рассеяния электронов и ионов на боковых стенках во внешнем электромагнитном поле, создаваемом обмотками катушек СПД и разностью потенциалов между анодом и катодом.

По первому вопросу в настоящее время нет единой точки зрения. В ряде работ [6] исходят из электрической природы поля **E** и необходимости учёта объёмного разделения зарядов в плазме. В других [7, 8] считается, что поле **E** имеет электромагнитную природу и вычисляется из обобщённого закона Ома. В типичном случае пренебрегая инерцией электронов и полагая плазму квазинейтральной, $n=n_i=n_e$, из уравнения импульсов для электронов получим выражение для электрического поля (обобщённый закон Ома) $\mathbf{E} = \nabla P_e / (en) - [\mathbf{v}_e, \mathbf{H}] / c$. С электромагнитной природой электрического поля в СПД тесно связано представление о *термолизованном потенциале*. Для стационарных течений в СПД, представляющих основной интерес, вводя потенциал Ф электрического поля, $\mathbf{E}= -\nabla\Phi$, и учитывая $\mathbf{v}_e \parallel \mathbf{H}$, постоянство T_e вдоль силовых линий магнитного поля и уравнение состояния электронов $p_e = k_Б n T_e$ ($k_Б$ – постоянная Больцмана), из обобщённого закона Ома получим, что величина $\Phi - (k_Б T_e / e)\ln n$, называемая термолизованным потенциалом, сохраняется вдоль силовых линий магнитного поля. Идея термолизованного потенциала введена А.И. Морозовым [4] и используется во многих математических и численных исследованиях по СПД [8, 9].

Учёт индукционного электромагнитного поля наиболее проблематичен, поскольку требует построения математической модели динамики плазмы в СПД, удовлетворяющей двум, на первый взгляд, взаимоисключающим требованиям. С другой стороны, для плазмы в СПД безразмерный параметр

$$\xi = c(m_i m_e)^{1/2} e^{-1} (4\pi(m_i + m_e)n)^{-1/2} \cong c m_e^{1/2} e^{-1} (4\pi n)^{-1/2}$$

(называемый числом Будкера [10] или модифицированным параметром обмена [11]) имеет ~1 и значит [12] необходимо учитывать инерцию электронов. С другой стороны, $r_D \ll L$, плазму в СПД следует считать квазинейтральной. Перечисленным требованиям удовлетворяет гибридная модель

электромагнитной гидродинамики (ЭМГД) плазмы, изложенная применительно к СПД в п.2. На дискретном уровне аналогичные подходы использовались для исследования разлёта плазменного сгустка [13] и в некоторых других задачах [14].

В п.3 рассмотрен численный метод макрочастиц исследования решений 1D2V задачи, возникающей в случае плоской симметрии уравнений гибридной ЭМГД-модели СПД. В п.4 приведены и обсуждены некоторые результаты расчётов решений 1D2V-задачи.

2. Гибридная ЭМГД-модель плазмы в СПД

Перечислим физические допущения, лежащие в основании математической модели плазмы в СПД: 1° – плазма трёхкомпонентная, состоящая из электронов, ионов Xe и нейтралов (атомы Xe); 2° – кратность заряда иона Z=1; 3° – плазма в СПД квазинейтральная; 4° – токи смещения равны нулю; 5° – инерция электронов конечна; 6° – ионы и нейтралы подчиняются кинетическим уравнениям, а электроны рассматриваются в гидродинамическом приближении; 7° – электроны, возникающие при ионизации, имеют нулевые импульсы и энергии.

Перечисленным физическим допущениям удовлетворяет гибридная модель электромагнитной гидродинамики (ЭМГД) плазмы [12], которая применительно к плазме СПД сводится к следующим положениям.

Кинетика ионов и нейтралов. Пусть $f_i(t,\mathbf{x},\mathbf{v})$, $f_0(t,\mathbf{x},\mathbf{v})$ – функции распределения ионов и нейтралов по скоростям. Постулируются следующие кинетические уравнения для f_i, f_0, учитывающие процесс объёмной ионизации:

$$\partial f_i/\partial t+\left\langle \mathbf{v},\nabla_{\mathbf{x}} f_i\right\rangle+\left\langle \mathbf{F},\nabla_{\mathbf{v}} f_i\right\rangle=\beta n_i f_0,$$

$$\partial f_0/\partial t+\left\langle \mathbf{v},\nabla_{\mathbf{x}} f_0\right\rangle=-\beta n_i f_0,$$

$$\mathbf{F}(t,\mathbf{x},\mathbf{v})=em_i^{-1}(\mathbf{E}+c^{-1}[\mathbf{v},\mathbf{H}])-\mathbf{R}_i m_i^{-1}n_i^{-1},$$

$$\mathbf{R}_i=e^2 n_i n_e\sigma^{-1}(\mathbf{v}_i-\mathbf{v}_e)=\mathbf{j}en_i\sigma^{-1},$$

где $\beta=\beta(T_e)$ – заданная функция электронной температуры (коэффициент ионизации), σ – проводимость плазмы, $n_i=n_e$, $\mathbf{v}_e=\mathbf{v}_i-\mathbf{j}/(en_i)$ и

$$n_i=\int\limits_{\mathbb{R}^3} f_i d\mathbf{v},\quad \mathbf{v}_i=n_i^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\mathbf{v}f_i d\mathbf{v}.$$

В простейшем случае $\beta\equiv\beta_0=\text{const}$, для типичных параметров СПД β_0=10^{-8}см^3/с. В более сложном случае $\beta(T)$=$\alpha\max\{T-T_*,0\}$, где $\alpha>0$, T_* – заданные константы.

Гидродинамика электронов. С учётом допущения 7° при гидродинамическом описании электронов меняется только уравнение неразрывности, и мы имеем [15]:

$$\partial\rho_e / \partial t + \mathrm{div}\rho_e \mathbf{v}_e = \beta\rho_e n_0, \quad \rho_e = m_e n_e, \quad n_0 = \int\limits_{\mathbb{R}^3} f_0 d\mathbf{v},$$

$$\partial\rho_e \mathbf{v}_e / \partial t + \mathrm{Div}\rho_e \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}_e = -\nabla P_e - e n_e (\mathbf{E} + c^{-1}[\mathbf{v}_e, \mathbf{H}]) - \mathbf{R}_e + \mathrm{Div}\Pi_e,$$

$$\rho_e T_e dS_e / dt = m_i / m_\Sigma \cdot \sigma^{-1} j^2 - \mathrm{div}\mathbf{q}_e + \mathrm{tr}(\Pi_e D_e) + Q_e,$$

где $d / dt = \partial / \partial t + \mathbf{v}_e \cdot \nabla$, $m_\Sigma = m_i + m_e$, $\mathbf{R}_e = -\mathbf{R}_i$, Π_e – тензор вязких напряжений в электронной жидкости, а в энтропийном уравнении (уравнении энергии) $\mathbf{q}_e$ – поток тепла, Q_e – энергия, получаемая от ионов при упругих столкновениях, $D_e = \mathrm{def}\mathbf{v}_e$ – тензор деформаций для электронов. Выражения для $\mathbf{q}_e$, Π_e, Q_e приведены в [15–18], а спитцеровская проводимость σ вычисляется по известной формуле [15] $\sigma = \sigma_0 T_e^{3/2}$, где $\sigma_0 = 0.905 \cdot 10^7$. При проведении расчётов считалось $\mathbf{q}_e = 0$, $\Pi_e = 0$, $Q_e = 0$.

Считая электроны идеальным политропным газом с показателем адиабаты $\gamma > 1$, имеем

$$\varepsilon_e = (\gamma - 1)^{-1} P_e / \rho_e, \quad T_e = m_e P_e / (k_B \rho_e), \quad S_e = k_B m_e^{-1} (\gamma - 1)^{-1} \ln(P_e \rho_e^{-\gamma}) + \mathrm{const}.$$

Переписывая уравнение энергии электронов относительно T_e, получим

$$\partial T_e / \partial t + \mathbf{v}_e \nabla T_e + (\gamma - 1) T_e \mathrm{div}\mathbf{v}_e = (\gamma - 1)\{\ldots\} / (k_B n_e) + (\gamma - 1) T_e \beta n_0,$$

где $\{\ldots\}$ – правая часть уравнения энергии и $\gamma = 5/3$.

Уравнения электродинамики. Поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{j}$, учитывая 4°, ищутся из законов электродинамики Максвелла

$$c^{-1}\partial\mathbf{H} / \partial t + \mathrm{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \mathrm{div}\mathbf{H} = 0, \quad \mathrm{rot}\mathbf{H} = 4\pi c^{-1}\mathbf{j}.$$

Недостающее уравнение для $\mathbf{E}$, называемое *обобщённым законом Ома*, получается из уравнения импульсов для ионов, являющегося следствием уравнения кинетики для f_i [12]:

$$\mathbf{E} + \frac{c^2 \lambda_i \lambda_e}{4\pi \lambda_\Sigma n_i} \mathrm{rotrot}\mathbf{E} + \frac{\lambda_i \lambda_e}{\lambda_\Sigma} \beta n_0 \mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c}[\mathbf{v}_i, \mathbf{H}] + \frac{1}{e n_i \lambda_\Sigma} \mathrm{Div} W,$$

$$W = \lambda_i \lambda_e (\mathbf{j} \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{j}) + \lambda_i \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}}{4\pi} - \frac{\lambda_i \lambda_e}{e n_i} \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + \left[\lambda_e P_i - \lambda_i \left(\frac{H^2}{8\pi} + P_e \right) \mathrm{I}_3 \right] + \lambda_i \Pi_e,$$

где P_i – тензор внутренних напряжений ионов, $\mathbf{v}_0$ – средняя скорость атомов ксенона, и

$$\mathbf{v}_0=\frac{1}{n_0}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\mathbf{v}f_0d\mathbf{v},\quad P_i=\left[P_i^{k\ell}\right],\quad P_i^{k\ell}=m_i\int\limits_{\mathbb{R}^3}(v^k-v_i^k)(v^\ell-v_i^\ell)f_id\mathbf{v},\quad e_i=Ze=e,$$

где $\lambda_\Sigma=\lambda_i+\lambda_e$, $\lambda_i=m_i/e$, $\lambda_e=m_e/e$, I_3 – единичный трёхмерный тензор, W называется *холловским тензором*, поскольку его слагаемые определяют отклонение электрического поля $\mathbf{E}$ от направления тока $\mathbf{j}$ в плазме (эффект Холла).

Уравнение неразрывности для электронов – следствие уравнения кинетики для ионов и получается из последнего интеграцией его по скоростному пространству [12]. Таким образом, с учётом обобщённого закона Ома от гидродинамики электронов остаётся только уравнение энергии, записанное относительно температуры T_e.

В итоге получаем следующую замкнутую определённую систему интегро-дифференциальных уравнений для нахождения функций f_i, f_0, T_e, $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$, определяющих динамику плазмы в СПД и составляющих содержание гибридной ЭМГД-модели плазмы в СПД

$$\frac{\partial f_i}{\partial t}+\left\langle\mathbf{v},\nabla_{\mathbf{x}}f_i\right\rangle+\left\langle\mathbf{F},\nabla_{\mathbf{v}}f_i\right\rangle=\beta n_if_0,\qquad\frac{\partial f_0}{\partial t}+\left\langle\mathbf{v},\nabla_{\mathbf{x}}f_0\right\rangle=-\beta n_if_0,$$

$$\frac{\partial T_e}{\partial t}+\mathbf{v}_e\cdot\nabla T_e+(\gamma-1)T_e\mathrm{div}\mathbf{v}_e=\frac{\gamma-1}{k_Бn_e}\left\{\frac{m_i}{m_\Sigma}\frac{j^2}{\sigma}-\mathrm{div}\mathbf{q}_e+\mathrm{tr}(\Pi_eD_e)+Q_e\right\}+(\gamma-1)T_e\beta n_0,$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}+\mathrm{rot}\mathbf{E}=0,\quad\mathrm{div}\mathbf{H}=0,\quad\mathbf{j}=\frac{c}{4\pi}\mathrm{rot}\mathbf{H},\qquad(1)$$

$$\mathbf{E}+\frac{c^2\lambda_i\lambda_e}{4\pi\lambda_\Sigma en_i}\mathrm{rotrot}\mathbf{E}+\frac{\lambda_i\lambda_e}{\lambda_\Sigma}\beta n_0\mathbf{v}_0=\frac{\mathbf{j}}{\sigma}-\frac{1}{c}[\mathbf{v}_i,\mathbf{H}]+\frac{1}{en_i\lambda_\Sigma}\mathrm{Div}W,$$

$$n_i=\int\limits_{\mathbb{R}^3}f_id\mathbf{v},\quad n_0=\int\limits_{\mathbb{R}^3}f_0d\mathbf{v},\quad\mathbf{v}_i=\frac{1}{n_i}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\mathbf{v}f_id\mathbf{v},\quad\mathbf{v}_0=\frac{1}{n_0}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\mathbf{v}f_0d\mathbf{v},\quad\mathbf{v}_e=\mathbf{v}_i-\frac{\mathbf{j}}{en_i},$$

где β, σ – известные функции от T_e, выражения для которых, равно как и для поля $\mathbf{F}(t,\mathbf{x},\mathbf{v})$, тензоров W, D_e указаны выше, $n_e=n_i$, $P_e=k_Бn_eT_e$.

Система (1) должна быть дополнена начальными и граничными условиями, о которых имеет смысл говорить применительно к конкретным задачам. Заметим только, что рассеяние электронов и ионов на боковых стенках может учитываться не только граничным условием, но и эффективным увеличением спитцеровской проводимости σ [19].

Для стационарных течений в СПД из обобщённого закона Ома имеем следующее выражение для электрического поля $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$:

$$\mathbf{E} = -\frac{\lambda_i\lambda_e}{\lambda_\Sigma}\beta n_0\mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c}[\mathbf{v}_i,\mathbf{H}] + \frac{\lambda_i}{cen_i\lambda_\Sigma}[\mathbf{j},\mathbf{H}] +$$

$$\frac{1}{en_i\lambda_\Sigma}\mathrm{Div}\{\lambda_i\lambda_e(\mathbf{j}\cdot\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i\cdot\mathbf{j}) - \frac{\lambda_i\lambda_e}{en_i}\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} + (\lambda_e P_i - \lambda_i P_e \mathrm{I}_3) + \lambda_i\Pi_e\ .$$

Подставляя в это соотношение $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_e + \mathbf{j}/(en_i)$, заключаем, что потенциал Φ может быть термолизован (см. п.1) лишь в исключительных случаях, а электрическое поле в стационарных течениях плазмы в СПД возбуждается, в том числе вязкими напряжениями в электронах.

Рассмотрим решения системы (1), обладающие плоской симметрией $(\partial/\partial y = \partial/\partial x = 0)$, вида $f_i = \delta(v_x) f_i(t,z,v_y,v_z)$, $f_0 = \delta(v_x)\delta(v_y)\delta(v_z - v_a) n_a(t,z)$, где v_a – известная скорость атомов Xe на входе в СПД, для которых $E_x = 0$, $H_y = H_z = 0$ и заданное внешнее магнитное поле направлено вдоль оси x, $\mathbf{H}_{ext} = (H_0,0,0)$. Тогда уравнение кинетики для f_0 равносильно уравнению для концентрации нейтралов n_a: $\partial n_a/\partial t + v_a\partial n_a/\partial z = -\beta n n_a$, и для нахождения функций f_i, n_a, E_y, H_x, E_z, T_e в безразмерном виде получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f_i}{\partial t} + v_z\frac{\partial f_i}{\partial z} + \varepsilon_*\Big[E_y + (H_x + H_0)v_z - \nu_m j_y\Big]\frac{\partial f_i}{\partial v_y} + \\
&+\varepsilon_*\Big[E_z - (H_x + H_0)v_y\Big]\partial f_i/\partial v_z = k_I n n_a \delta(v_y)\delta(v_z - v_a), \\
&\frac{\partial n_a}{\partial t} + v_a\frac{\partial n_a}{\partial z} = -\beta n n_a, \quad \frac{\partial H_x}{\partial t} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0, \quad j_y = \frac{\partial H_x}{\partial z}, \\
&E_y - \frac{\lambda_i}{\lambda_\Sigma}\frac{\xi^2}{n}\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \nu_m j_y - (H_x + H_0)v_{iz} + \frac{\xi^2}{n}\frac{\lambda_i}{\lambda_\Sigma}\frac{\partial j_y v_{iz}}{\partial z}, \\
&E_z = (H_x + H_0)v_{iy} - \frac{\lambda_i}{\lambda_\Sigma}\sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_e}}\frac{\kappa\xi}{n}(H_x + H_0)j_y - \kappa\zeta\xi\frac{\lambda_i}{\lambda_\Sigma}\sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_e}}\frac{1}{n}\frac{\partial n T_e}{\partial z} - \frac{\lambda_e}{\lambda_\Sigma}\frac{k_I}{\varepsilon_*}n_a v_a, \\
&\frac{\partial T_e}{\partial t} + v_{iz}\frac{\partial T_e}{\partial z} + (\gamma - 1)T_e\frac{\partial v_{iz}}{\partial z} = (\gamma - 1)\frac{m_i}{m_\Sigma}\frac{\nu_m}{\zeta}\frac{j_y^2}{n} + (\gamma - 1)k_I T_e n_a, \\
&n = \int\limits_{\mathbb{R}^2} f_i dv_y dv_z, \quad v_{iy} = \frac{1}{n}\int\limits_{\mathbb{R}^2} v_y f_i dv_y dv_z, \quad v_{iz} = \frac{1}{n}\int\limits_{\mathbb{R}^2} v_z f_i dv_y dv_z,
\end{aligned} \tag{2}$$

где числа подобия ε_*, ξ, ζ, κ, ν_m, k_I вычисляются по формулам

$$\varepsilon_* = [t]\omega_{ci}, \quad \omega_{ci} = \frac{e[H]}{cm_i}, \quad \nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma[L][v]} = \frac{\nu_{m0}}{T_e^{3/2}}, \quad \nu_{m0} = \frac{c^2}{4\pi\sigma_0[T]^{3/2}[L][v]},$$

$$k_I = \beta_0[n][t], \quad \xi = \frac{c(\lambda_i\lambda_e)^{1/2}}{[L](4\pi[\rho])^{1/2}}, \quad \kappa = \frac{v_A}{[v]}, \quad \zeta = \frac{k_Б[T]}{m_i v_A^2}, \quad v_A = \frac{[H]}{(4\pi[\rho])^{1/2}}.$$

Здесь характерные скобки обозначают характерный масштаб величины и считаются выполненными соотношения

$$[E] = \frac{[H][v]}{c}, \quad [t] = \frac{[L]}{[v]}, \quad [j] = \frac{c}{4\pi}\frac{[H]}{[L]}, \quad [f_i] = \frac{[n]}{[v]^2}, \quad [\rho] = m_i[n].$$

К системе (2) приводит допущение, что радиальные процессы в СПД не вносят существенный вклад в ускорение ионов вдоль оси. В частности, можно пренебречь радиальным движением электронов, их рассеянием на боковых стенках установки и пристеночной проводимостью [20]. Если выпрямить коаксиальную камеру установки посредством экспоненциального отображения, то ось r перейдёт в ось x, ось φ – в ось y, в частности, в системе (2) E_y – это азимутальное электрическое поле, j_y – плотность азимутального тока, H_x – индукционное радиальное магнитное поле.

3. Метод макрочастиц

Численное решение системы (1) упирается в дискретизацию уравнений кинетики, которые чаще всего приближённо решаются методом макрочастиц [21–24]. Математические аспекты метода макрочастиц рассмотрены в [25]. Проанализируем сначала случай, когда ионизация отсутствует (β=0), а плазма заполняет ограниченную область $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Введём точки $(\mathbf{r}_j(t), \mathbf{v}_j(t)) \in D \times \mathbb{R}^3$, $t \geq 0$, $1 \leq j \leq N$, называемые *макрочастицами*, эволюция которых подчиняется *уравнениям характеристик* кинетического уравнения для f_i:

$$d\mathbf{r}_j / dt = \mathbf{v}_j, \quad d\mathbf{v}_j / dt = \varepsilon_*(\mathbf{E}(t,\mathbf{r}_j) + [\mathbf{v}_j, \mathbf{H}(t,\mathbf{r}_j)] - \nu_m \mathbf{j}(t,\mathbf{r}_j)), \quad 1 \leq j \leq N. \qquad (3)$$

Система (3) решается в области $D \times \mathbb{R}^3$ с определёнными начальными и граничными условиями для каждого $1 \leq j \leq N$. По расположению макрочастиц функция распределения $f = f_i$ аппроксимируется "простой" функцией распределения $f_{N,\varepsilon} = f_\varepsilon$ в каждый момент времени t:

$$f(t,\mathbf{r},\mathbf{v}) \cong f_\varepsilon(t,\mathbf{r},\mathbf{v}) \underset{\text{def}}{=} \sum_j q_j \delta_\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t))\Delta_\varepsilon((\mathbf{v} - \mathbf{v}_j(t)), \quad \varepsilon > 0, t \geq 0, z,$$

где здесь и ниже суммирование по j ведётся по всем макрочастицам, числа $q_j > 0$, $1 \le j \le N$ заданы и называются *массами макрочастиц* и предполагается: (A) $\delta_\varepsilon \ge 0$, $\Delta_\varepsilon \ge 0$; (B) $\int\limits_{\mathbb{R}^3} \delta_\varepsilon(\mathbf{r})d\mathbf{r}=1=\int\limits_{\mathbb{R}^3} \Delta_\varepsilon(\mathbf{v})d\mathbf{v}$, (C) δ_ε, Δ_ε при $\varepsilon \to 0$ сходятся к δ-функции в нуле; причём считается $\Delta_\varepsilon(\mathbf{v})$ – чётная функция, $0 \in \mathrm{supp}\delta_e$ компактен и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mathrm{diamsupp}\delta_\varepsilon=0$. Обычно полагают $\Delta_\varepsilon(\mathbf{v})=$ $=(\sqrt{\pi}\varepsilon)^{-3}\exp(-v^2/\varepsilon^2)$. Выбор $\delta_\varepsilon(\mathbf{r})$ более важен, поскольку от него зависят формулы для средних величин: $n(t,\mathbf{r}) \cong \sum\limits_j q_j \delta_\varepsilon(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j(t))$, $\mathbf{v}(t,\mathbf{r}) \cong$ $\cong n^{-1}\sum\limits_j q_j \mathbf{v}_j(t)\delta_\varepsilon(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j(t))$, $\mathbf{r} \in D$, $t \ge 0$. Функции $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, T_e в (3) получаются из решения уравнений электродинамики и энергии в области $D \subseteq \mathbb{R}^3$ по некоторой разностной схеме, в которой $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, T_e аппроксимируются сеточными функциями, заданными в узлах $\{\mathbf{r}^k\}_{1\le k\le M}$, $\mathbf{r}^k \in D$ некоторой пространственной сетки в области *D*. При этом $n(t,\mathbf{r}^k)$, $\mathbf{v}(t,\mathbf{r}^k)$ следует вычислять по скорректированным формулам так, чтобы масса и импульс в области *D* сохранялись с течением времени. Для получения нужных формул вводятся области $\{D_k\}_{1\le k\le M}$ с непересекающимися внутренностями, для которых $\mathbf{r}^k \in \mathrm{Int}D_k$, $1 \le k \le M$, $D \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{M} D_k$ и для всех достаточно малых ε и любого $1 \le j \le N$ в каждый момент времени верно включение $\mathrm{supp}\delta_\varepsilon(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j(t)) \subseteq$ $\subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{M} D_k$. Тогда искомые формулы для подсчёта *n* и **v** в узлах сетки имеют вид

$$
\begin{aligned}
n(t,\mathbf{r}^k) &= \sum_j \frac{q_j}{\left|D_k \cap D\right|} \int\limits_{D_k} \delta_\varepsilon(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j(t))d\mathbf{r}, \quad 1 \le k \le M, \\
\mathbf{v}(t,\mathbf{r}^k) &= (n(t,\mathbf{r}^k))^{-1} \sum_j \frac{q_j \mathbf{v}_j(t)}{\left|D_k \cap D\right|} \int\limits_{D_k} \delta_\varepsilon(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j(t))d\mathbf{r}, \quad 1 \le k \le M,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где $\left|A\right|$ означает меру Лебега A множества $A \subseteq \mathbb{R}^3$. С другой стороны, для решения системы (3) необходимо по сеточным функциям $\mathbf{H}(t,\mathbf{r}^k)$, $\mathbf{E}(t,\mathbf{r}^k)$, $T_e(t,\mathbf{r}^k)$ восстановить $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$, T_e во всей области D или хотя бы в точках-местоположениях макрочастиц $\mathbf{r}_j(t)$ с помощью некоторой интерполяции. Основная интерполяционная формула имеет вид:

$$U(\mathbf{r}_j(t)) = \sum_k U(\mathbf{r}^k) \int\limits_{D_k} \delta_\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)) d\mathbf{r}, \qquad (5)$$

где суммирование по k ведётся по всем узлам пространственной сетки, U – интерполируемая величина (компоненты полей $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$, T_e). В итоге система (3) решается посредством схемы Эйлера с пересчётом с учётом формул (4), (5), дополненных разностной схемой решения уравнений электродинамики и энергии, привязанной к узлам $\mathbf{r}^k$. В совокупности указанные процедуры составляют содержание метода макрочастиц.

Эти построения конкретизируются применительно к 1D2V-системе (2). Тогда $D=[0,L]$, $x^k=kh$, $0 \le k \le M$, $h=L/M$, $D_k=[x^k - h/2,\ x^k+h/2]$, $0 \le k \le M$. Положим

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1/(2\varepsilon), & |x| \le \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases} \quad \text{или} \quad \delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} (\varepsilon - |x|)/\varepsilon^2, & |x| \le \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon . \end{cases}$$

Другие способы выбора $\delta_\varepsilon(x)$ см. в [22], где приведены результаты вычисления интегралов в (4) и (5) для разных $\varepsilon > 0$. При $\varepsilon \le h/2$ масса и импульс в области D будут сохраняться, при $\varepsilon > h/2$ это не так и для исправления указанного дефекта необходимо вводить заграничные узлы x^k и заграничные области D_k.

При построении разностной схемы возникает отсутствовавшая в МГД-теории плазмы дополнительная проблема постановки граничных условий для поля **E**. Данное поле в гибридной ЭМГД-модели плазмы ищется из обобщённого закона Ома, который равносилен [12] эллиптической системе уравнений в частных производных для компонент поля **E**. В частности, в одномерной задаче (2) необходимо задать граничные условия для E_y на концах $z=0$, $z=L$ отрезка $[0,L]$.

Из физических соображений на входе ($z=0$) и на выходе ($z=L$) из камеры установки надо поставить либо условие $j_y=0$, либо $\partial j_y / \partial z = 0$. Тогда из обобщённого закона Ома получим для поля E_y либо краевое условие 1-го рода (если $j_y = 0$), либо краевое условие третьего рода (если $\partial j_y / \partial z = 0$). Например, из условий $j_y(0)=j_y(L)=0$, справедливых в каждый момент времени, и очевидного равенства $\partial^2 E_y / \partial z^2 = \partial j_y / \partial t$, являющегося следствием закона Фарадея $j_y = \partial H_x / \partial z$, получим $\partial^2 E_y / \partial z^2 \equiv 0$ и тогда из обобщённого закона Ома для E_y в системе (2) следует

$$E_y(0)=\left[-(H_x(0)+H_0)+\frac{\xi^2}{n(0)}\frac{\lambda_i}{\lambda_\Sigma}\frac{\partial j_y}{\partial z}(0)\right]v_{iz}(0)$$

и аналогичное равенство для $E_y(L)$, где правая часть вычисляется на нижнем временном слое посредством разностных аппроксимаций.

На левом конце z=0 для системы (3) ставится условие зеркального отражения, на правом конце $z=L$ частица, достигшая границы, покидает область [0,L] и далее в расчётах не участвует. Наконец, ионизация учитывается на каждом временном шаге τ после завершения вычисления параметров СПД на верхнем слое M+1 макрочастиц – по одной в каждом узле x^s с параметрами $z_s=(s-1)h$, $v_{ys}=0$, $v_{zs}=v_a$, $q_s=\tau k_I n_s^0(n_{a,s}^1+n_{a,s}^0)/2$, $T_s=T_*$ – температура ионизации Xe, $1\le s\le M+1$, где верхний индекс указывает на номер временного слоя – нижний (0) или верхний (1). Указанные макрочастицы добавляются к уже имеющимся. Детальное описание алгоритма расчёта содержится в [26].

4. Некоторые результаты расчётов

Рассмотрим численное решение системы (2) в двух случаях: (I) индукционные поля в плазме СПД равны нулю – $E_y=0$, $H_x=0$, $E_z\equiv E_0=\text{const}$; (II) индукционные поля ненулевые, причём граничные условия для E_y определяются равенствами $j_y(0)=j_y(L)=0$.

В качестве характерных масштабов приводимых на графиках величин используются следующие значения: [L]=1 см, [v]=10^4 см /с, $[n]=5\cdot10^{11}$ см$^{-3}$, $[F_T]=10^{-2}$ Г, $[t]=10^{-4}$ с, $[H]=200$ гс, $[E]=500$ В/см.

В случае (I) плазма движется во внешнем постоянном и однородном электромагнитном поле $H_x\equiv H_0$, $E_y=0$, $E_z\equiv E_0$. Результаты расчётов для входных данных $k_I=1$, $v_a=0.1$, $n_a=10$, $\varepsilon_*=1$, $E_0=1$, $H_0=1$ представлены на рис.2. В этом случае $M=100$, $N=100$, начальное число макрочастиц равно 10^4, $q=10^{-3}$, начальное распределение концентрации атомов Xe $n_{0,a}(z)=2n_a/(2+10^5 z)$ – быстроспадающая гипербола. Как показывают расчёты, при $t\to+\infty$ наступает стабилизация течения плазмы в СПД, что нетипично для метода макрочастиц, сила тяги F_T выходит на установление, $F_T\to120$ при $t\to+\infty$, ускорение плазмы $v_z(L)/v_z(0)$ достигает 7.5. Как показали расчёты, течение плазмы в СПД с учётом ионизации во внешних полях очень чувствительно к значению коэффициента ионизации k_I – при

увеличении k_I сила тяги F_T выходит на квазипериодический режим с резко растущей амплитудой (рис.3).

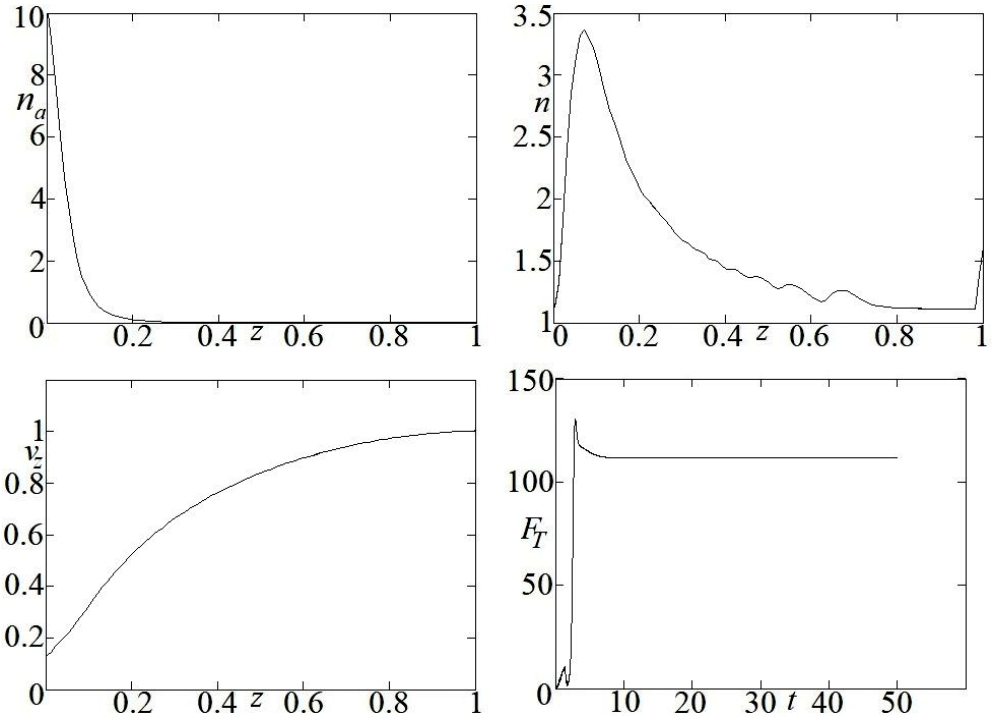

Рис.2. Установившиеся параметры плазмы $n_a(t,z)$, $n(t,z)$, $v_z(t,z)$ и сила тяги $F_T(t)$ для $k_I = 1$, $v_a = 0.1$, $n_a = 10$, $\varepsilon_* = 1$, $E_0 = 1$, $H_0 = 1$.

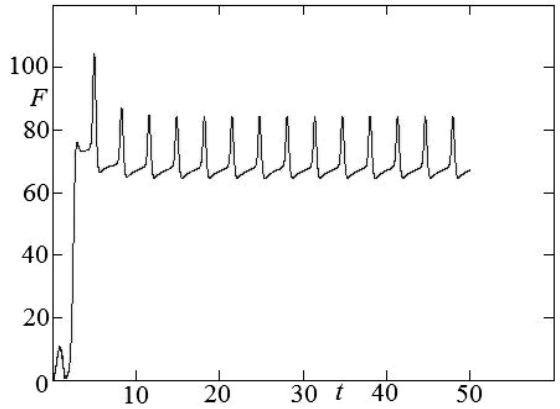

Рис.3. Сила тяги $F_T(t)$ для $k_I = 1.1$, $v_a = 0.1$, $n_a = 10$, $\varepsilon_* = 1$, $E_0 = 1.9$, $H_0 = 1.9$.

В случае (II) два варианта расчётов представлены на рис.4, 5. Они отличаются способом осреднения электромагнитного поля, которое надо выполнить перед расчётом движения макрочастиц. На рис.4 представлены расчёты для осреднения полей H_x, E_y, E_z, j_y, ν_m по формуле

$$f(z) \to \hat{f}(z) \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\ell h} \int_{z-\ell h}^{z+\ell h} \tilde{f}(x)dx, \quad 0 \le z \le L, \tag{6}$$

где $1 \le \ell \le M$, $h = L/M$, а $\tilde{f}(z)$ – функция, продолжающая $f(z)$ на отрезок $[-L, L]$ по чётности и затем на всю прямую $\mathbb{R}$ по $2L$-периодичности. Результаты на рис.5 отвечают модифицированному осреднению по формуле

$$f(z) \to \hat{f}(z) = \frac{1}{\text{def}\; b(z) - a(z)} \int_{a(z)}^{b(z)} f(x)dx, \quad 0 \le z \le L,$$

$$a(z) = \max\{z - \ell h, 0\}, \quad b(z) = \min\{z + \ell h, L\}, \quad 1 \le \ell \le M. \qquad (7)$$

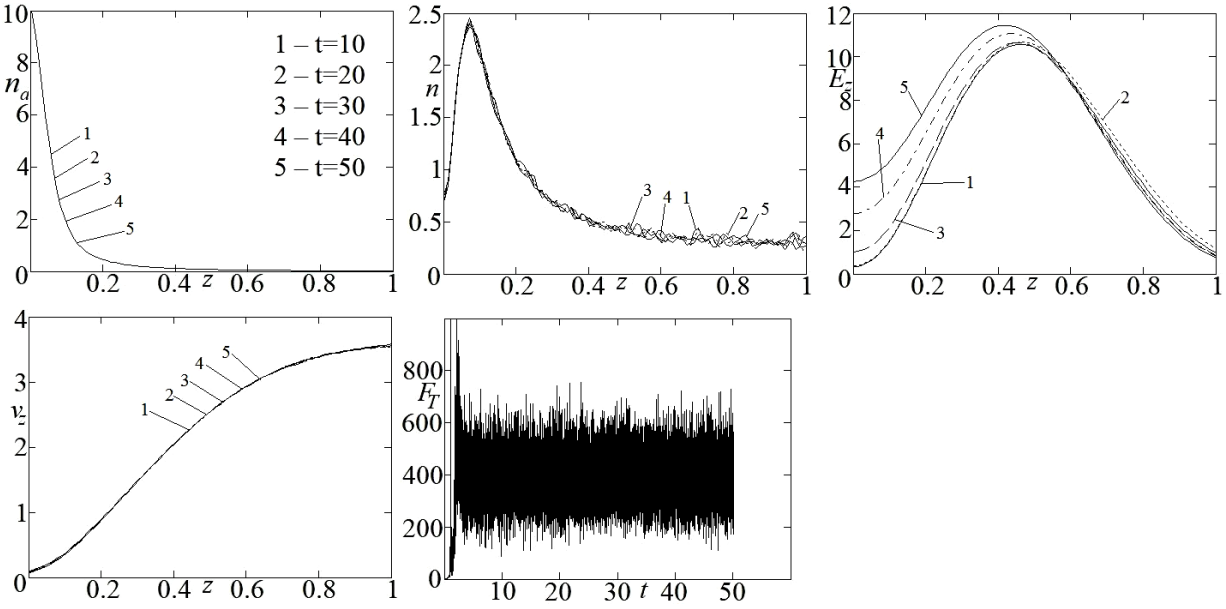

Рис.4. Параметры плазмы $n_a(t,z)$, $n(t,z)$, $v_z(t,z)$, $E_z(t,z)$ и сила тяги $F_T(t)$ с осреднением полей в различные моменты времени для $k_I = 1$, $\nu_a = 0.1$, $n_a = 10$, $\varkappa = 1$, $\xi = 0.532$, $\varepsilon_* = 1$, $\zeta = 0.061$, $H_0 = 1$.

Результаты, представленные на рис.4, 5, соответствуют M=100, N_1=100, $\ell = 20$ и для каждой из функций $f = H_x, E_y, \ldots, \nu_m$ процедуры осреднения (6) или (7) на каждом временном шаге выполняются пятикратно. Согласно п.2, $H_x, \ldots, \nu_m$ являются макроскопическими полями, характерные масштабы которых, в соответствии с электронной теорией Лоренца [27], должны быть много больше размера макрочастиц, имеющих порядок $\sim h$. Чтобы добиться соблюдения этого требования, и необходимо осреднение. Формулы осреднения подбираются экспериментально, имея целью получения квазистационарных режимов течения плазмы в СПД. Представленные варианты на рис.4,5 отвечают данным q=10^{-3}, k_I=1, ν_a=0.1, n_a=10, $\varkappa$=1, ξ=0.532, ε_*=1, ζ=0.061, H_0=1. Качественное поведение плазмы в СПД в обоих вариантах примерно одинаковое. Учёт индукционных полей привёл к существенному

росту ускорения плазмы $v_z(L)/v_z(0)$ и, как следствие, увеличению среднего значения силы тяги F_T, равному ≅400. При этом продольное электрическое поле E_z качественно совпадает с экспериментальным [3], особенно для варианта рис.4. При осреднении полей по формулам (6), (7) происходит выход динамики плазмы в СПД на квазистационарный режим. Период колебаний F_T составляет $\cong 40\tau$, где $\tau = h / \max\limits_{0 \le z \le L} v_z(z)$ – временной шаг.

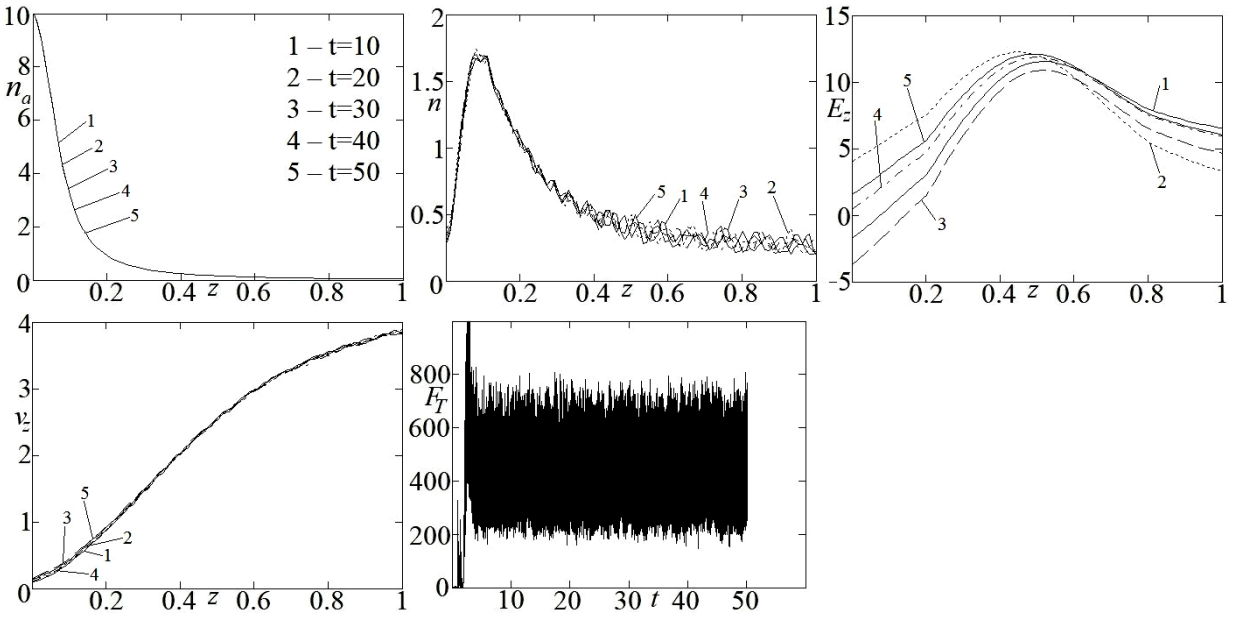

Рис.5. Параметры плазмы $n_a(t,z)$, $n(t,z)$, $v_z(t,z)$, $E_z(t,z)$ и сила тяги $F_T(t)$ с модифицированным осреднением полей в различные моменты времени для $k_I = 1$, $v_a = 0.1$, $n_a = 10$, $\kappa = 1$, $\xi = 0.532$, $\varepsilon_* = 1$, $\zeta = 0.061$, $H_0 = 1$.

5. Заключение

Рассмотрена гибридная модель динамики плазмы в СПД, учитывающая конечность массы электрона. Она отличается от гибридных МГД-моделей плазмы сложной формой обобщённого закона Ома, который в настоящей работе представляет собой эллиптическую систему уравнений в частных производных относительно компонент электрического поля. Ключевой проблемой при исследовании процессов в СПД является роль индукционных электромагнитных полей, порождаемых плазменными токами. Если индукционными полями пренебречь, то задача расчёта СПД сильно упрощается, хотя остаётся нетривиальной. Как показало численное исследование в 1D2V-случае, учёт индукционных полей требует (по аналогии с электронной теорией Лоренца) осреднение их при расчёте по пространству и времени. В работе на примере 1D2V-задачи предложены способы осреднения,

приводящие в итоге к физически достоверным результатам. Следует подчеркнуть, что по ряду причин, изложенных в п.4, без осреднения электромагнитного поля расчёт параметров плазмы в СПД приводит к физически абсурдным результатам. Важность предложенного метода для приложений прежде всего в возможности учета и оценки роли индукционных полей в ускорении плазмы. В этом отношении предложенный метод оригинален, поскольку до сих пор существовали только экспертные оценки вклада индукционных полей в ускорение плазмы в СПД. Как показало исследование, индукционные поля ответственны за существенное увеличение ускорения плазмы и силы тяги в СПД, хотя порядок этого увеличения "вероятно" завышен. В то же время предложенный метод необходимо дополнить учётом рассеяния электронов и ионов на боковых стенках камеры СПД, что невозможно сделать в рамках 1D2V-задачи. Указанное рассеяние приведёт, скорее всего, к уменьшению роли индукционных полей и скорректирует полученный нами рост силы тяги в СПД.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *К.Н. Козубский, В.М. Мурашко, В.П. Рылов, Ю.В. Трифонов, В.П. Ходенко, В.П. Ким, Г.А. Попов, В.А. Обухов.* СПД работает в космосе // Физика плазмы, 2003, т.29, №3, с.277-792;
   K.N. Kozubsky, V.M. Murashko, V.P. Rylov, Yu.V. Trifonov, V.P. Khodenko, V.P. Kim, G.A. Popov, V.A. Obukhov. SPD rabotaet v kosmose // Fizika plazmy, 2003, t.29, №3, s.277-792.
2. *V. Kim, K.N. Kozubsky, V.M. Murashko, A.V. Semenkin.* History of the Hall Thrusters Development in USSR // Paper IEPC-2007-142. 30th International Electric Propulsion Conference. September 17–20, 2007. Florence. Italy.
3. *В.П. Ким, А.В. Семенкин, С.А. Хартов.* Конструктивные и физические особенности двигателей с замкнутым дрейфом электронов. – М.: Изд-во МАИ, 2016, 160 с.;
   V.P. Kim, A.V. Semenkin, S.A. Khartov. Konstruktivnye i fizicheskie osobennosti dvigatelei s zamknutym dreifom elektronov. – M.: Izd-vo MAI, 2016, 160 s.
4. *А.И. Морозов.* Введение в плазмодинамику. – М.: Физматлит, 2006, 576 с.;
   A.I. Morozov. Vvedenie v plazmodinamiku. – M.: Fizmatlit, 2006, 576 s.
5. *O.A. Mitrofanova, R.Yu. Gnizdor, V.M. Murashko, A.I. Koryakin, A.N. Nesterenko.* New Generation of SPT-100 // 32nd International Electric Propulsion Conference, Wiesbaden, Germany. September 11–15, 2011, 7 p. IEPC-2011-041.
6. *L. Garrigues, A. Héron, J.C. Adam, J.P. Boeuf.* Hybrid and Particle-In-Cell Models of a Stationary Plasma Thruster // Plasma Source Sci. Technol., 2000, №9, p.219-226.
7. *А.А. Быков, В.Ю. Попов, А.Г. Свешников, С.А. Якунин.* Внутренние переходные слои потенциала в сильно замагниченной плазме // Математическое моделирование, 1989, т.1, №6, с.33-47;

A.A. Bykov, V.Iu. Popov, A.G. Sveshnikov, S.A. Iakunin. Vnutrennie perekhodnye sloi potentsiala v silno zamagnichennoi plazme // Matematicheskoe modelirovanie, 1989, t.1, №6, s.33-47.

8. *A.I. Morozov, V.V. Savelyev*. Fundamentals of Stationary Plasma Thruster Theory // Reviews of Plasma Physics, 2000, v.21, p.203-391.
9. *Б.И. Волков, С.А. Якунин.* Математические задачи плазмооптики. – М.: Знание, 1982, 64 с. (Новое в жизни, науке, технике. Сер. "Математика, кибернетика"; № 11);
   B.I. Volkov, S.A. Iakunin. Matematicheskie zadachi plazmooptiki. – M.: Znanie, 1982, 64 s. (Novoe v zhizni, nauke I tekhnike. Ser. "Matematika, kibernetika"; № 11).
10. *Г.И. Будкер.* Собрание трудов. – М.: Наука, 1982, 576 с.;
    G.I. Budker. Sobranie trudov. – M.: Nauka, 1982, 576 s.
11. *А.И. Морозов, Л.С. Соловьёв.* Стационарные течения плазмы в магнитном поле // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. – М.: Атомиздат, 1974, вып.8, с.3-87;
    A.I. Morozov, L.S. Solov'ev. Steady-state plasma flow in a magnetic field, Rev. Plasma Phys., M.A. Leontovich, Ed., 1980, v.8, p.1-104.
12. *М.Б. Гавриков.* Двухжидкостная электромагнитная гидродинамика. – М.: КРАСАНД, 2018, 584 с.;
    M.B. Gavrikov. Dvukhzhidkostnaia elektromagnitnaia gidrodinamika. – M.: KRASAND, 2018, 584 s.
13. *В.А. Вшивков, Г.И. Дудникова, Ю.П. Захаров, А.М. Оришич.* Генерация плазменных возмущений при бесстолкновительном взаимодействии плазменных потоков. – Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1987, препринт №20-87, 48 с.;
    V.A. Vshivkov, G.I. Dudnikova, Iu.P. Zakharov, A.M. Orishich. Generatsiia plazmennykh vozmushchenii pri besstolknovitelnom vzimodeistvii plazmennykh potokov. – Novosibirsk: ITPM SO AN SSSR, 1987, preprint №20-87, 48 s.
14. *L. Vshivkova, G. Dudnikova, K. Vshivkov.* Hybrid Numerical Model of Shock Waves in Collisionless Plasma // AIP Conf. Proc., 2016, 1773, 110017.
15. *Л. Спитцер.* Физика полностью ионизованного газа. – М.: Мир, 1965, 212 с.;
    L. Spitzer. Physics of Fully Ionized Gases, 2nd ed. – New York: Interscience, 1962, 170 p.
16. *В.С. Имшенник.* О теплопроводности плазмы // Астрономический журнал, 1961, т.38, №4, с.652-655;
    V.S. Imshennik. O teploprovodnosti plazmy // Astronomicheskii Zhurnal, 1961, t.38, N 4, s.652-655.
17. *С. Чэпмен, Т. Каулинг.* Математическая теория неоднородных газов. – М.: ИЛ, 1960;
    S. Chapman, T.G. Cowling. The Mathematical Theory of Non-uniform Gase. – Cambridge University Press, 1952.
18. *Л.Д. Ландау.* Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия // ЖЭТФ, 1937, т.7, №2, с.203-209;
    L.D. Landau. Kineticheskoe uravnenie v sluchae kulonovskogo vzaimodeistviia // JETF, 1937, t.7, N 2, s.203-209.
19. *J.P. Boeuf.* Tutorial: Physics and modeling of Hall thrusters // Journal of Applied Physics, 2017, 121, 011101.
20. *А.И. Морозов.* Эффект пристеночной проводимости в хорошо замагниченной плазме // ПМТФ, 1968, №3, с.19-23;

A.I. Morozov. Effect pristenochnoi provodimosti v khorosho zamagnichennoi plazme // PMTF, 1968, №3, s.19-23.

21. *Ю.С. Сигов.* Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы. Избранные труды / Сост. Г.И. Змиевская, В.Д. Левченко – М.: Физматлит, 200, 288 с.;
Iu.S. Sigov. Vuchislitelnyi eksperiment: most mezhdu proshlym i budushchim fiziki plazmy. Izbrannye trudy / Sost. G.I. Zmievskaia, V.D. Levchenko – M.: Fizmatlit, 2001, 288 s.
22. *Ю.А. Березин, В.А. Вшивков.* Метод частиц в динамике разреженной плазмы. – Новосибирск: Наука, 1980, 95 с.;
Iu.A. Berezin, V.A. Vshivkov. Metod chastits v dinamike razriazhennoi plazmy. – Novosibirsk: Nauka, 1980, 95 s.
23. *Р. Хокни, Дж. Иствуд.* Численное моделирование методом частиц. – М.: Мир, 1987, 640 с.;
R.W. Hockney, J.W. Eastwood. Computer simulation using particles. – NY: McGraw-Hill, 1981.
24. *Ч. Бэдсел, А. Ленгдон.* Физика плазмы и численное моделирование. – М.: Энергоатомиздат, 1989, 452 с.;
C.K. Birdsall, A.B. Langdon. Plasma Physics via Computer Simulation. – NY: McGraw-Hill, 1985.
25. *А.А. Арсеньев.* Лекции о кинетических уравнениях. – М.: Наука, 1992, 216 с.;
A.A. Arsen'ev. Lektsii o kineticheskikh uravneniiakh. – M.: Nauka, 1992, 216 s.
26. *М.Б. Гавриков, А.А. Таюрский.* Гибридная модель стационарного плазменного двигателя. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2021, препринт №35, 48 с.;
M.B. Gavrikov, A.A. Taiurskii. Gibridnaia model statsionarnogo plazmennogo dvigatelia. – M.: IPM im. M.V. Keldysha, 2021, preprint №35, 48 s.
27. *Г.А. Лоренц.* Теория электромагнитного поля. – М.: ОНТИ, 1933;
H.A. Lorentz. De theorie van Maxwell (1900–1902). – Leiden: Brill, 1925.

Поступила в редакцию 28.12.21
После доработки 17.03.22
Принята к публикации 18.04.22