В. К. Андреев, И. И. Рыжков, Групповая классификация и точные решения уравнений термодиффузии,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 4, 508–517

https://www.mathnet.ru/de11261

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 4, с. 508–517

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958

ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОДИФФУЗИИ

© 2005 г. В. К. Андреев, И. И. Рыжков

1. Основная система уравнений. Рассмотрим конвективное движение бинарной смеси в предположении, что ее плотность линейно зависит от температуры и концентрации легкой компоненты: $\rho = \rho_0(1 - \beta_1 T - \beta_2 C)$. Здесь ρ_0 – плотность смеси при средних значениях температуры и концентрации, а T и C – отклонения от средних значений, которые предполагаются малыми; β_1 – коэффициент теплового расширения смеси, а β_2 – концентрационный коэффициент плотности ($\beta_2 > 0$), поскольку C – концентрация легкой компоненты. Уравнения конвективного движения смеси в приближении Обербека–Буссинеска принимают вид

$$\boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\rho_0^{-1}\nabla p + \nu\Delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{g}(\beta_1 T + \beta_2 C), \tag{1}$$

$$T_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla T = \chi\Delta T, \tag{2}$$

$$C_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla C = d\Delta C + \alpha d\Delta T, \tag{3}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{u}$ – вектор скорости, p – превышение давления над гидростатическим, ν, χ – коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности смеси, d – коэффициент диффузии, α – параметр термодиффузии. Все характеристики среды предполагаются постоянными, соответствующими средним значениям температуры и концентрации. В случае нормальной термодиффузии $\alpha < 0$, а при аномальном эффекте $\alpha > 0$. В уравнении (1) $\boldsymbol{g} = (0, 0, -g)$, где g – ускорение силы тяжести (ось z направлена вертикально вниз). В случае нормальной термодиффузии поток легкой компоненты направлен в сторону нагретой границы, что приводит к увеличению подъемной силы. В случае же аномальной термодиффузии легкая компонента диффундирует в сторону холодной границы, что уменьшает подъемную силу; при определенном значении параметра α возможно механическое равновесие.

Основная алгебра Ли операторов, допускаемая системой (1)–(4) в случае $\boldsymbol{g} = 0$, $\alpha \neq 0$, найдена в работе [1]. Поставим задачу групповой классификации системы относительно постоянных α, β_1, β_2, χ, d. Будем считать, что $\boldsymbol{g} \neq 0$, а постоянные α, β_1, β_2 могут обращаться в нуль, означая отсутствие соответствующих членов в уравнениях. Заметим, что с точки зрения группового анализа случай $\boldsymbol{g} = 0$ эквивалентен случаю $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

2. Решение определяющих уравнений. В дальнейшем будем использовать следующие обозначения: $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, x^3)$ – точка пространства R^3, $\boldsymbol{u} = (u^1, u^2, u^3)$ – вектор скорости. Пусть $h(t)$, $f(t, \boldsymbol{x})$ – некоторые функции. Тогда их производные обозначаются в соответствии с равенствами

$$\frac{dh}{dt} = h', \quad \frac{d^2h}{dt^2} = h'', \quad \frac{\partial f}{\partial t} = f_t, \quad \frac{\partial f}{\partial x^i} = f_i, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^i} = f_{ti}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j} = f_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3,\ i \le j).$$

Используя эти обозначения, запишем систему (1)–(4) в координатной форме

$$u^i_t + u^1u^i_1 + u^2u^i_2 + u^3u^i_3 + p_i/\rho_0 - \nu(u^i_{11} + u^i_{22} + u^i_{33}) = 0, \quad i = 1, 2, \tag{5}$$

$$u^3_t + u^1u^3_1 + u^2u^3_2 + u^3u^3_3 + p_3/\rho_0 - \nu(u^3_{11} + u^3_{22} + u^3_{33}) + g(\beta_1 T + \beta_2 C) = 0, \tag{6}$$

$$T_t + u^1T_1 + u^2T_2 + u^3T_3 - \chi(T_{11} + T_{22} + T_{33}) = 0, \tag{7}$$

$$C_t + u^1C_1 + u^2C_2 + u^3C_3 - d(C_{11} + C_{22} + C_{33}) - \alpha d(T_{11} + T_{22} + T_{33}) = 0, \tag{8}$$

$$u_1^1 + u_2^2 + u_3^3 = 0. \tag{9}$$

Инфинитезимальный оператор, допускаемый системой, будем искать в виде

$$X = \xi^t \frac{\partial}{\partial t} + \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^i \frac{\partial}{\partial u^i} + \eta^p \frac{\partial}{\partial p} + \eta^T \frac{\partial}{\partial T} + \eta^C \frac{\partial}{\partial C},$$

считая, что его компоненты зависят от всех зависимых и независимых переменных. Для формирования определяющих уравнений нужно подействовать продолженным оператором $\underset{2}{X}$ на уравнения (5)–(9) и перейти на многообразие, задаваемое этой системой. Однако система (5)–(9) не находится в инволюции, что затрудняет выделение внешних и внутренних переменных. Добавим к системе ее дифференциальное следствие [2]

$$(u_1^1)^2 + (u_2^2)^2 + (u_3^3)^2 + 2(u_2^1 u_1^2 + u_3^1 u_1^3 + u_3^2 u_2^3) + (p_{11} + p_{22} + p_{33})/\rho_0 + g(\beta_1 T_3 + \beta_2 C_3) = 0, \tag{10}$$

получаемое дифференцированием уравнений (5), (6) по x^1, x^2, x^3 соответственно и использованием (9). При переходе на многообразие также будем учитывать дифференциальные следствия из уравнения (9)

$$u_{t1}^1 + u_{t2}^2 + u_{t3}^3 = 0, \quad u_{1i}^1 + u_{2i}^2 + u_{3i}^3 = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \tag{11}$$

Система (5)–(11) находится в инволюции [2]. Теперь нетрудно выделить внешние переменные u_{11}^1, u_{11}^2, u_{11}^3, p_{11}, T_{11}, C_{11}, u_{t3}^3, u_{13}^3, u_{23}^3, u_{33}^3, u_1^1. Действуя продолженным оператором $\underset{2}{X}$ на уравнения (5)–(11) и переходя на соответствующее многообразие, получаем систему определяющих уравнений, решение которой после ряда преобразований представляется в виде

$$\begin{gathered}
\xi^t = 2c_4 t + c_0, \quad \xi^1 = c_4 x^1 + c_1 x^2 + c_2 x^3 + f_1(t), \quad \xi^2 = -c_1 x^1 + c_4 x^2 + c_3 x^3 + f_2(t), \\
\xi^3 = -c_2 x^1 - c_3 x^2 + c_4 x^3 + f_3(t), \quad \eta^1 = -c_4 u^1 + c_1 u^2 + c_2 u^3 + f_1'(t), \\
\eta^2 = -c_1 u^1 - c_4 u^2 + c_3 u^3 + f_2'(t), \quad \eta^3 = -c_2 u^1 - c_3 u^2 - c_4 u^3 + f_3'(t), \\
\eta^p = -\rho_0 (f_1''(t) x^1 + f_2''(t) x^2 + f_3''(t) x^3 + c_7 g \beta_1 x^3 + c_{10} g \beta_2 x^3) - 2c_4 p + q(t), \\
\eta^T = c_5 T + c_6 C + c_7, \quad \eta^C = c_8 C + c_9 T + c_{10}.
\end{gathered} \tag{12}$$

Здесь $c_0, \ldots, c_{10}$ – групповые константы, $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $q(t)$ – произвольные гладкие функции. Групповые константы связаны с постоянными α, β_1, β_2, χ, d системой классифицирующих уравнений

$$\begin{gathered}
\beta_1(c_5 + 3c_4) + \beta_2 c_9 = 0, \quad \beta_1 c_2 = 0, \quad \beta_2(c_8 + 3c_4) + \beta_1 c_6 = 0, \quad \beta_1 c_3 = 0, \\
\alpha d(c_8 - c_5) + (\chi - d) c_9 = 0, \quad \beta_2 c_2 = 0, \quad (\chi - d) c_6 = 0, \quad \beta_2 c_3 = 0, \quad \alpha c_6 = 0.
\end{gathered} \tag{13}$$

Замечание 1. Как показывают вычисления, решение (12) и система (13) получаются независимо от того, действуем ли мы продолженным оператором $\underset{2}{X}$ на уравнения (5)–(11) или только на уравнения (5)–(9). Таким образом, любое преобразование, допускаемое системой (5)–(9), допускается и ее дифференциальными следствиями (10), (11).

3. Групповая классификация. Исходя из формул (12) и системы (13), выделим алгебры операторов, допускаемые системой в зависимости от значений входящих в нее постоянных. Результаты групповой классификации представлены в табл. 1. В первых трех столбцах указаны значения постоянных α, β_1, β_2, в четвертом – базисные операторы, а в пятом – дополнительные операторы, допускаемые системой в случае $\chi = d$.

Таблица 1

α	β_1	β_2	Операторы	$\chi = d$
0	0	0	$X_0,\ X_{ij},\ F_i,\ Q,\ Z,\ T^1,\ T^3,\ C^1,\ C^3$	$T^2,\ C^2$
0	0	$\neq 0$	$X_0,\ X_{12},\ F_i,\ Q,\ Z^C,\ U^C,\ T^1,\ T^3$	T^2
0	$\neq 0$	0	$X_0,\ X_{12},\ F_i,\ Q,\ Z^T,\ U^T,\ C^1,\ C^3$	C^2
0	$\neq 0$	$\neq 0$	$X_0,\ X_{12},\ F_i,\ Q,\ \overline{Z},\ U^T,\ U^C$	$R^1,\ R^2$
$\neq 0$	0	0	$X_0,\ X_{ij},\ F_i,\ Q,\ Z,\ T^3,\ C^3,\ R,\ L$	
$\neq 0$	0	$\neq 0$	$X_0,\ X_{12},\ F_i,\ Q,\ \overline{Z},\ U^C,\ T^3$	
$\neq 0$	$\neq 0$	0	$X_0,\ X_{12},\ F_i,\ Q,\ \overline{Z},\ U^T,\ C^3,\ L$	
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$X_0,\ X_{12},\ F_i,\ Q,\ \overline{Z},\ U^T,\ U^C$ $\alpha = \beta_1(d-\chi)/\beta_2 d, \quad \chi \neq d : R^1$	

В последнем случае при указанном значении постоянной α допускается оператор R^1. Операторы, представленные в табл. 1, имеют следующий вид:

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_{ij} = x^j \frac{\partial}{\partial x^i} - x^i \frac{\partial}{\partial x^j} + u^j \frac{\partial}{\partial u^i} - u^i \frac{\partial}{\partial u^j},$$

$$F_i = f_i(t)\frac{\partial}{\partial x^i} + f_i'(t)\frac{\partial}{\partial u^i} - \rho_0 x^i f_i''(t)\frac{\partial}{\partial p}, \quad i = 1,2,3 \quad (i < j),$$

$$Q = q(t)\frac{\partial}{\partial p}, \quad Z = 2t\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\left(x^i \frac{\partial}{\partial x^i} - u^i \frac{\partial}{\partial u^i}\right) - 2p\frac{\partial}{\partial p},$$

$$U^T = -\rho_0\beta_1 g x^3 \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial T}, \quad U^C = -\rho_0\beta_2 g x^3 \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial C}, \tag{14}$$

$$T^1 = T\frac{\partial}{\partial T}, \quad T^2 = C\frac{\partial}{\partial T}, \quad T^3 = \frac{\partial}{\partial T}, \quad C^1 = C\frac{\partial}{\partial C}, \quad C^2 = T\frac{\partial}{\partial C}, \quad C^3 = \frac{\partial}{\partial C},$$

$$R = T^1 + C^1, \quad R^1 = \beta_2 T^1 - \beta_1 C^2, \quad R^2 = \beta_2 T^2 - \beta_1 C^1, \quad Z^T = Z - 3T^1,$$

$$Z^C = Z - 3C^1, \quad \overline{Z} = Z - 3R, \quad L = [\alpha d T + (d-\chi)C]\frac{\partial}{\partial C}.$$

4. Групповые свойства уравнений диффузии и переноса тепла. В случае $\beta_1 = \beta_2 = 0$ уравнения (1), (4) образуют систему уравнений Навье–Стокса, описывающую движение вязкой несжимаемой жидкости. Пусть $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}) = (u^1, u^2, u^3)$, $p(t,\boldsymbol{x})$ – некоторое решение уравнений Навье–Стокса. Подставляя его в (2), (3), получаем

$$T_t + \boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})\cdot\nabla T = \chi\Delta T, \tag{15}$$

$$C_t + \boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})\cdot\nabla C = d\Delta C + \alpha d\Delta T. \tag{16}$$

Представляет интерес следующий вопрос: какие преобразования допускает система (15), (16) в случае, когда $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})$ – произвольное решение уравнений Навье–Стокса? Таким образом, возникает задача о нахождении алгебры Ли операторов, допускаемой системой (15), (16), в которую входят “произвольные элементы” – компоненты вектора скорости u^1, u^2, u^3.

Инфинитезимальный оператор, допускаемый системой, будем искать в виде

$$X = \xi^t \frac{\partial}{\partial t} + \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \xi^3 \frac{\partial}{\partial x^3} + \eta^T \frac{\partial}{\partial T} + \eta^C \frac{\partial}{\partial C},$$

считая, что его компоненты зависят от всех зависимых и независимых переменных. Переход на многообразие здесь осуществляется исключением величин T_{11}, C_{11} из уравнений (15), (16). Для представления решения определяющих уравнений введем следующие обозначения: $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \boldsymbol{u} = (\omega^1, \omega^2, \omega^3)^*$ – вихрь, $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)^*$ – компоненты оператора X, $\boldsymbol{u_x} = \partial \boldsymbol{u}/\partial \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{\omega_x} = \partial \boldsymbol{\omega}/\partial \boldsymbol{x}$ – матрицы Якоби,

$$H(t) = \begin{pmatrix} h'(t) & h_1(t) & h_2(t) \\ -h_1(t) & h'(t) & h_3(t) \\ -h_2(t) & -h_3(t) & h'(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{h}(t) = \begin{pmatrix} h_3'(t) \\ -h_2'(t) \\ h_1'(t) \end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях решение определяющих уравнений дается формулами

$$\xi^t = 2h(t), \quad \boldsymbol{\xi} = H(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t), \quad \eta^T = s(t, \boldsymbol{x})T + c_2 C + T^0(t, \boldsymbol{x}), \tag{17}$$

$$\eta^C = [(\chi/d)s(t, \boldsymbol{x}) + s_1(t)]C + [-\alpha s(t, \boldsymbol{x}) + s_2(t)]T + C^0(t, \boldsymbol{x}).$$

Функции h, H, $\boldsymbol{f}$, s, s_1, s_2, T^0, C^0 и постоянная c_2 удовлетворяют системе уравнений

$$T_t^0 + \boldsymbol{u} \cdot \nabla T^0 = \chi \Delta T^0, \tag{18}$$

$$C_t^0 + \boldsymbol{u} \cdot \nabla C^0 = d\Delta C^0 + \alpha d \Delta T^0, \tag{19}$$

$$2\chi \nabla s = 2h\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{u_x}(H\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}) + 2h'\boldsymbol{u} - H\boldsymbol{u} - H'\boldsymbol{x} - \boldsymbol{f}', \tag{20}$$

$$s_t + \boldsymbol{u} \cdot \nabla s = \chi \Delta s, \tag{21}$$

$$\alpha d s_1 + (\chi - d)s_2 = 0, \quad (\chi - d)\Delta s + s_1' d/\chi = 0, \quad \alpha\chi\Delta s - s_2' = 0, \tag{22}$$

$$(\chi - d)c_2 = 0, \quad \alpha c_2 = 0. \tag{23}$$

Применяя операцию rot к уравнению (20), получаем условие равенства смешанных производных от функции s по переменным x^1, x^2, x^3:

$$2h\boldsymbol{\omega}_t + \boldsymbol{\omega_x}(H\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}) + 3h'\boldsymbol{\omega} - H\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{h} = 0. \tag{24}$$

Покажем, что если $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})$ – произвольное решение уравнений Навье–Стокса, то из (24) следует $H = 0$, $h = 0$, $\boldsymbol{f} = 0$. Для этого достаточно привести хотя бы одно решение, для которого имеют место указанные равенства.

Пример точного решения уравнений Навье–Стокса. Введем безразмерные переменные $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}/L$, $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u}/U$, $t' = tU/L$, $p' = p/(\rho_0 U^2)$, в которых уравнения Навье-Стокса примут вид

$$\boldsymbol{u}'_{t'} + (\boldsymbol{u}' \cdot \nabla)\boldsymbol{u}' = -\nabla p' + \frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta \boldsymbol{u}', \tag{25}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}' = 0, \tag{26}$$

где $\mathrm{Re} = UL/\nu$ – число Рейнольдса. Дальнейшие рассуждения относятся только к безразмерным переменным, поэтому для простоты знак штрих можно опустить. Положим $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ и будем искать решение в виде

$$u^1 = xA_z(t, z) + yB(t, z), \quad u^2 = xC(t, z) + yD_z(t, z), \quad u^3 = -A(t, z) - D(t, z), \tag{27}$$

где A, B, C, D – неизвестные функции. Уравнение (26) здесь выполнено тождественно. Пусть $D = A$, $B = \gamma A$, $C = -\gamma^{-1} A$, где $\gamma \neq 0$ – произвольная постоянная. Подстановка решения (27) в (25) приводит к системе

$$2AA_{zz} - A_z^2 + A^2 - 2E(t) = 0, \tag{28}$$

$$A_t - A_{zz}/\mathrm{Re} = 0, \tag{29}$$

при этом давление определяется формулой

$$p = E(t)(x^2 + y^2) - 2A^2 + q(t) \tag{30}$$

с произвольной функцией $q(t)$. Исследуя систему (28), (29) на совместность, найдем единственное решение

$$A(t,z) = e^{-t/\mathrm{Re}}(\lambda \sin z + \mu \cos z) + \tau, \quad E(t) = -\frac{\lambda^2 + \mu^2}{2} e^{-2t/\mathrm{Re}} + \frac{\tau^2}{2},$$

где λ, μ, τ – произвольные постоянные. Определяя давление из формулы (30), получаем представление решения в виде

$$\begin{gathered}
u^1 = e^{-t/\mathrm{Re}}[x(\lambda\cos z - \mu\sin z) + \gamma y(\lambda\sin z + \mu\cos z)] + \tau\gamma y,\\
u^2 = e^{-t/\mathrm{Re}}\left[-\frac{1}{\gamma}x(\lambda\sin z + \mu\cos z) + y(\lambda\cos z - \mu\sin z)\right] - \frac{\tau}{\gamma}x,\\
u^3 = -2e^{-t/\mathrm{Re}}(\lambda\sin z + \mu\cos z) - 2\tau,\\
p = e^{-2t/\mathrm{Re}}\left[(\lambda^2 - \mu^2)\cos 2z - 2\lambda\mu\sin 2z - \frac{\lambda^2+\mu^2}{2}(x^2+y^2)\right] -\\
-4\tau e^{-t/\mathrm{Re}}(\lambda\sin z + \mu\cos z) + \frac{\tau^2}{2}(x^2+y^2) + \overline{q}(t),
\end{gathered} \tag{31}$$

где $\overline{q}(t) = q(t) - e^{-2t/\mathrm{Re}}(\lambda^2 + \mu^2) - 2\tau^2$. Решение (31) удобно записать в цилиндрических координатах

$$\begin{gathered}
u^r = re^{-t/\mathrm{Re}}\left[\lambda\cos z - \mu\sin z + \frac{1}{2}\left[\gamma - \frac{1}{\gamma}\right]\sin 2\varphi(\lambda\sin z + \mu\cos z + \tau e^{t/\mathrm{Re}})\right],\\
u^\varphi = -re^{-t/\mathrm{Re}}\left[\gamma\sin^2\varphi + \frac{1}{\gamma}\cos^2\varphi\right](\lambda\sin z + \mu\cos z + \tau e^{t/\mathrm{Re}}),\\
u^z = -2e^{-t/\mathrm{Re}}(\lambda\sin z + \mu\cos z) - 2\tau,\\
p = e^{-2t/\mathrm{Re}}\left[(\lambda^2 - \mu^2)\cos 2z - 2\lambda\mu\sin 2z - \frac{\lambda^2+\mu^2}{2}r^2\right] -\\
-4\tau e^{-t/\mathrm{Re}}(\lambda\sin z + \mu\cos z) + \frac{\tau^2}{2}r^2 + \overline{q}(t).
\end{gathered} \tag{32}$$

В случае $\gamma = \pm 1$ компоненты вектора скорости не зависят от угла φ и решение (32) описывает осесимметрическое движение.

Переход к исходным переменным и подстановка решения (31) при $\lambda = \mu = 1$, $\tau = 0$, $\gamma \neq \pm 1$ в уравнение (24) приводят к $H = 0$, $h = 0$, $\boldsymbol{f} = 0$. Тогда из (20)–(22) следует, что $s = c_1$, $s_1 = c_3^*$, $s_2 = c_4^*$, где c_1, c_3^*, c_4^* – произвольные постоянные. Положим $c_3 = c_1\chi/d + c_3^*$, $c_4 = -\alpha c_1 + c_4^*$, в результате чего формулы (17) и уравнения (20)–(23) примут вид

$$\xi^t = \xi^1 = \xi^2 = \xi^3 = 0, \quad \alpha d(c_3 - c_1) + (\chi - d)c_4 = 0, \quad \eta^T = c_1T + c_2C + T^0(t,\boldsymbol{x}), \quad (\chi - d)c_2 = 0,$$

$$\eta^C = c_3C + c_4T + C^0(t,\boldsymbol{x}), \quad \alpha c_2 = 0,$$

где функции T^0, C^0, согласно (18), (19), являются произвольными решениями системы (15), (16) (в частности, $T^0 = \mathrm{const}$, $C^0 = \mathrm{const}$). Базис алгебры Ли операторов, допускаемой системой (15), (16) в случае, когда $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})$ – произвольное решение уравнений Навье–Стокса, приведен в табл. 2.

Таблица 2

α	Операторы	$\chi = d$
0	T^1, C^1, T^0, C^0	T^2, C^2
$\neq 0$	R, L, T^0, C^0	

Здесь

$$T^0 = T^0(t, \boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial T}, \quad C^0 = C^0(t, \boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial C}. \tag{33}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\alpha = 0$, а постоянные β_1, β_2 могут быть отличны от нуля. В частности, если $\beta_1 = 0$, $\beta_2 \neq 0$ ($\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 = 0$), уравнения (1), (3), (4) ((1), (2), (4)) представляют собой замкнутую систему, решение которой дается функциями $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})$, $p(t, \boldsymbol{x})$, $C(t, \boldsymbol{x})$ ($T(t, \boldsymbol{x})$) и может быть найдено независимо от уравнения (2) ((3)). Здесь достаточно рассмотреть случай $\beta_1 = 0$, $\beta_2 \neq 0$, так как при $\alpha = 0$ уравнения (2) и (3) имеют одинаковую структуру с точки зрения группового анализа.

Найдем алгебру операторов, допускаемую уравнением

$$T_t + \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}) \cdot \nabla T = \chi \Delta T, \tag{34}$$

где $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})$ вместе с функциями $p(t, \boldsymbol{x})$, $C(t, \boldsymbol{x})$ есть произвольное решение уравнений (1), (3), (4). Инфинитезимальный оператор для уравнения (34) запишем в виде

$$X = \xi^t \frac{\partial}{\partial t} + \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \xi^3 \frac{\partial}{\partial x^3} + \eta^T \frac{\partial}{\partial T},$$

считая, что его компоненты зависят от t, x^1, x^2, x^3, T. Решение определяющих уравнений есть

$$\xi^t = 2h(t), \quad \boldsymbol{\xi} = H(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t), \quad \eta^T = s(t, \boldsymbol{x})T + T^0(t, \boldsymbol{x}), \tag{35}$$

где функции h, H, $\boldsymbol{f}$, T^0, s удовлетворяют уравнениям (18), (20), (21). В качестве решения уравнений (1), (3), (4), для которого из (24) следует, что $H = 0$, $\boldsymbol{f} = 0$, $h = 0$, можно взять решение (31) (при $\lambda = \mu = 1$, $\tau = 0$, $\gamma \neq \pm 1$) с давлением $\bar{p} = p - \rho_0 g \beta_2 x^3$ и концентрацией $C = 1$. Тогда из (20), (21) имеем $s = c_1 = \mathrm{const}$, и формулы (35) принимают вид $\xi^t = \xi^1 = \xi^2 = \xi^3 = 0$, $\eta^T = c_1 T + T^0(t, \boldsymbol{x})$. Таким образом, уравнение (34) допускает операторы T^1, T^0 (см. (14), (33)), а уравнение

$$C_t + \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}) \cdot \nabla C = d\Delta C$$

(в случае $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 = 0$) – операторы C^1, C^0.

5. Условия на поверхности раздела. В дальнейшем будем считать, что смесь находится в условиях полной невесомости ($\boldsymbol{g} = 0$). Тогда уравнения (1)–(4) образуют систему вязкой теплопроводной жидкости, дополненную уравнением (3) для концентрации. Базис алгебры Ли операторов для данной системы представлен в табл. 1 (случай $\alpha \neq 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$).

Пусть имеется движение двух смесей с общей поверхностью раздела Γ, так что $\boldsymbol{u}_j$, p_j, θ_j, C_j – соответственно вектор скорости, давление, температура и концентрация в области Ω_j, $j = 1, 2$ (здесь температура обозначена через θ). Если s – поверхностная концентрация на Γ, то коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = \sigma(\theta, s)$ и очень часто эта зависимость линейная:

$$\sigma(\theta, s) = \sigma_0 - \sigma_s s - \sigma_\theta \theta \tag{36}$$

с некоторыми постоянными $\sigma_0 > 0$, σ_s, $\sigma_\theta > 0$. Условия на поверхности раздела Γ имеют вид [3]

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2 \equiv \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = v_n, \quad \theta_1 = \theta_2, \tag{37}$$

$$(P_2 - P_1)\boldsymbol{n} = 2\sigma(\theta, s)H\boldsymbol{n} + \nabla_\Gamma \sigma, \tag{38}$$

$$k_2\frac{\partial\theta_2}{\partial n} - k_1\frac{\partial\theta_1}{\partial n} = \varkappa\theta\nabla_\Gamma\cdot\boldsymbol{u} + \omega(\theta_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla_\Gamma\theta), \tag{39}$$

$$s_t + \nabla_\Gamma\cdot(\boldsymbol{u}s) - d_\Gamma\Delta_\Gamma s = j_{n_2} - j_{n_1}. \tag{40}$$

Здесь введены следующие обозначения: $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор нормали к Γ, направленный из Ω_1 в Ω_2; $P_j = -p_jE + 2\rho_{0j}\nu_jD_j$ – тензор напряжений; H – средняя кривизна Γ ($H > 0$, если Γ выпукла наружу Ω_1); $\nabla_\Gamma = \nabla - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\nabla)$ – поверхностный градиент; $\boldsymbol{u}$, θ – значения векторов скоростей и температур смесей, попарно совпадающих на Γ в силу условий (37), так что $\nabla_\Gamma\cdot\boldsymbol{u}$ есть поверхностная дивергенция вектора $\boldsymbol{u}$; d_Γ – коэффициент поверхностной диффузии; функции $\varkappa(\theta, s)$ и $\omega(\theta, s)$ определены равенствами

$$\varkappa = -\partial\sigma/\partial\theta, \quad \omega = \partial(\sigma + \varkappa\theta)/\partial\theta.$$

Для зависимости (36) $\varkappa = \sigma_\theta$ и $\omega = 0$. В условии (40)

$$j_{n_{1,2}} = -d_{1,2}\left(\frac{\partial C_{1,2}}{\partial n} + \alpha_{1,2}\frac{\partial\theta_{1,2}}{\partial n}\right) \tag{41}$$

представляют собой потоки вещества с Γ в области $\Omega_{1,2}$. За счет процессов адсорбции-десорбции

$$j_{n_{1,2}} = K_A^{1,2}C_{1,2} - K_D^{1,2}s, \tag{42}$$

где $K_A^{1,2}$, $K_D^{1,2}$ – коэффициенты адсорбции и десорбции соответственно (при наличии химических реакций зависимость (42) может быть и нелинейной).

В некоторых процессах можно пренебречь процессами поверхностно-активных веществ (ПАВ) вдоль Γ. Тогда $s = 0$ и вместо условия (40) будет

$$d_2\left(\frac{\partial C_2}{\partial n} + \alpha_2\frac{\partial\theta_2}{\partial n}\right) = d_1\left(\frac{\partial C_1}{\partial n} + \alpha_1\frac{\partial\theta_1}{\partial n}\right). \tag{43}$$

Кроме того, $C_1 = \gamma C_2$ на Γ, где γ – постоянная равновесная Генри.

Если Ω_1 представляет собой пассивный газ, а Ω_2 – смесь, то Γ называется свободной границей. Тогда $P_1 = p_{\text{gas}}E$, $\nu_1 = 0$. В (37) остается только второе кинематическое условие, а (39) заменяется условием теплового контакта

$$k_2\frac{\partial\theta_2}{\partial n} + \gamma_2(\theta_2 - \theta_{\text{gas}}) = Q.$$

Для переноса ПАВ вдоль Γ будет уравнение (40), где $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_2$, а $j_{n_1} = 0$, $j_{n_2} = K_A^2C_2 - K_D^2s$. Кроме указанных условий, задаются начальные данные при $t = 0$ и граничные условия на твердых стенках (см. [3]).

Замечание 2. Вместо условия (39) часто берется равенство потоков тепла

$$k_2\frac{\partial\theta_2}{\partial n} = k_1\frac{\partial\theta_1}{\partial n},$$

так как слагаемые в правой части (39) обычно дают малый вклад [4].

Замечание 3. Если Γ задана неявно уравнением $f(\boldsymbol{x}, t) = 0$, то кинематическое условие $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = v_n$ принимает вид $f_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla f = 0$.

Выделим из (14) следующую совокупность операторов:

$$X_0^j, \quad X_1^j = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad X_2^j = \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad X_3^j = \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad X_{12}^j, \quad X_{13}^j, \quad X_{23}^j,$$

$$X_4^j = t\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial u_1^j}, \quad X_5^j = t\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial u_2^j}, \quad X_6^j = t\frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial u_3^j}.$$

Указанная совокупность операторов образует алгебру Ли; ей соответствует 10-ти параметрическая группа G_{10}^j – группа Галилея (на самом деле индекс j можно опустить, так как эти группы действуют одинаково).

Утверждение 1. *Пусть H – интранзитивная подгруппа прямого произведения группы Галилея и бесконечномерной группы G_Q^j, порожденной Q^j. Если Γ – неособое инвариантное многообразие группы H в пространстве (t, x^1, x^2, x^3), то условия (37)–(40) также инвариантны относительно H.*

Расширение группы H происходит, когда $\rho_{01} = \rho_{02}$, т.е. при равенстве плотностей. При этом $H \subset G_{10}^j \otimes G_Q^j \otimes G_F^j$, где G_F^j – подгруппа, порожденная операторами F_i из (14).

Другое расширение происходит, когда $\sigma(\theta, C) = a_1\theta^{1/2} + a_2 C^{1/2}$, где a_1, a_2 – постоянные. При этом допускается расширенный оператор растяжения $Z - 2R$. Сопоставляя (41) и (42), а также уравнение (40), видим, что (40) допускает оператор $Z - 2R$, если коэффициенты адсорбции и десорбции совпадают.

Утверждение, аналогичное утверждению 1, имеет место и для задачи со свободной границей.

Замечание 4. Представляет определенный интерес вопрос: для каких потоков $j_{n_{1,2}}(C_{1,2}, s)$ происходит максимальное расширение группы G_{10}^j? В частности, оператор $Z-2R-\partial/\partial s$ будет допускаться уравнением (40), например, при $j_n = a^1 C^{3/2} + b^1 s^3$, где a^1, b^1 – постоянные.

6. Точные решения.

Деформация плоского слоя. Рассмотрим движение смеси в двумерной постановке (индекс j опущен). Пусть $\langle \partial/\partial x,\ t\partial/\partial x + \partial/\partial u,\ \partial/\partial\theta,\ \partial/\partial C\rangle$ – четырехпараметрическая подгруппа. Здесь инвариантных решений нет, однако существуют частично инвариантные решения вида

$$u = u(x, y, t), \quad v = v(y, t), \quad p = p(y, t), \quad \theta = \theta(x, y, t), \quad C = C(x, y, t). \tag{44}$$

Из граничного условия (38), где $P_1 = -p_{\text{gas}}E$, и (36) вытекает, что

$$\theta(x, y, t) = a(y, t)x^2 + b(y, t), \quad C(x, y, t) = h(y, t)x^2 + g(y, t) \tag{45}$$

с новыми неизвестными функциями a, b, h, g.

Свободная граница $y = l(t)$ такая, что $dl/dt = v(l(t), t)$. После подстановки решений (44), (45) в (1)–(4) и в граничные условия, соответствующие задаче со свободной границей, получим начально-краевую задачу для функций u, v, p, a, b, h, g, которая редуцируется к более простой в лагранжевых координатах (см. [4]). Эта задача описывает деформацию плоского слоя под действием эффекта Соре с одной или двумя $(y = \pm l(t))$ свободными границами.

Деформация цилиндра. Имеется осесимметрический аналог предыдущего решения. Пусть r, φ, z – цилиндрические координаты, u, v, w – проекции скорости на эти координаты, а $\langle \partial/\partial\varphi,\ \partial/\partial z,\ t\partial/\partial z + \partial/\partial w,\ \partial/\partial\theta,\ \partial/\partial C\rangle$ – пятипараметрическая подгруппа. Тогда частично инвариантное решение имеет вид (с учетом граничного условия (37))

$$u = u(r, t), \quad w = zm(r, t), \quad p = p(r, t), \quad \theta = a(r, t)z^2 + b(r, t), \quad C = h(r, t)z^2 + g(r, t),$$

а свободная граница – круглый цилиндр $r = l(t)$. В результате возникает начально-краевая задача относительно функций u, m, p, a, b, h, g и l; ее решение описывает эволюцию жидкого цилиндрического столба (или слоя) под действием эффекта Соре.

Двухслойное движение с плоской границей раздела. Рассмотрим плоское движение двух смесей с поверхностью раздела. Пусть H – одномерная подгруппа

$$\langle \partial/\partial x + A\partial/\partial\theta_j + B\partial/\partial C_j\rangle,$$

где A, B – не равные нулю постоянные. Среди H-инвариантных решений возьмем следующие:

$$u_j = u_j(y,t), \quad v_j = 0, \quad p_j = p_j(y,t), \quad \theta_j = Ax + T_j(y,t), \quad C_j = Bx + K_j(y,t). \tag{46}$$

Если зависимость $\sigma(\theta, s)$ линейная (см. (36)), то решение (46) можно интерпретировать как движение с H-инвариантной границей раздела $y = 0$. Ясно, что $p_j = p_j(t)$; положим для простоты $p_j = 0$. Функции u_j, T_j, K_j и s удовлетворяют системе уравнений

$$u_{jt} = \nu_j u_{jyy}, \quad T_{jt} + Au_j = \chi_j T_{jyy}, \quad K_{jt} + Bu_j = d_j K_{jyy} + \alpha_j d_j T_{jyy}, \tag{47}$$

$$s_t + us_x - d_\Gamma s_{xx} = (K_A^2 - K_A^1)Bx + K_A^2 K_2 - K_A^1 K_1 + (K_D^1 - K_D^2)s.$$

Последнее уравнение в (47) выполнено при $y = 0$, в нем $u = u_1(0,t) = u_2(0,t)$. Кроме того, при $y = 0$

$$\rho_{02}\nu_2 u_{2y} - \rho_{01}\nu_1 u_{1y} = -A\sigma_\theta - B\sigma_c = \text{const}, \tag{48}$$

$$u_1(0,t) = u_2(0,t), \quad T_1(0,t) = T_2(0,t), \quad k_1 T_{1y}(0,t) = k_2 T_{2y}(0,t).$$

Начальные условия при $t = 0$ возьмем в виде

$$u_j = 0, \quad T_j = 0, \quad K_j = 0, \quad s = s_0(x). \tag{49}$$

Граничные условия на твердых стенках $y = l_1 > 0$, $y = -l_2 < 0$ таковы:

$$u_1(l_1,t) = 0, \quad T_1(l_1,t) = 0, \quad K_{1y}(l_1,t) + \alpha_1 T_{1y}(l_1,t) = 0, \tag{50}$$

$$u_2(-l_2,t) = 0, \quad T_2(-l_2,t) = 0, \quad -K_{2y}(-l_2,t) + \alpha_2 T_{2y}(-l_2,t) = 0.$$

Если стенок нет (одной или обеих), то ставятся условия ограниченности u_j, T_j, K_j при $y \to \pm\infty$.

Заметим, что задача (47)–(50) может быть решена методом разделения переменных. В стационарном случае ее решение выписывается в явном виде (учтены условия для u_j и T_j при $y = 0$)

$$u_j = a_{1j}y + a_2, \quad T_j = \frac{A}{6\chi_j}a_{1j}y^3 + \frac{a_2 A y^2}{2\chi_j} + b_{1j}y + b_2,$$

$$K_j = \left(\frac{B}{d_j} - \frac{A}{\chi_j}\alpha_j\right)\left(\frac{a_{1j}y^3}{6} + \frac{a_2 y^2}{2}\right) + n_{1j}y + n_{2j}$$

с постоянными a_{1j}, a_2, b_{1j}, b_2, n_{1j}, n_{2j}, которые находятся из граничных условий (48) и (50). Конечно, к этим условиям необходимо добавить еще два соотношения из определения потоков вещества (41) и (42) при $y = 0$:

$$-d_1(K_{1y} + \alpha_1 T_{1y}) = K_A^1(K_1 + Bx) - K_D^1 s, \quad -d_2(K_{2y} + \alpha_2 T_{2y}) = K_A^2(K_2 + Bx) - K_D^2 s. \tag{51}$$

Из (51) и выражений для K_j, T_j следует, что $s = \text{const}$ при $B = 0$ (исключим нефизичный случай $K_A^1 = K_A^2$, $K_D^1 = K_D^2$). Тогда из последнего уравнения (47) получим при $y = 0$

$$s = (K_A^2 K_2 - K_A^1 K_1)/(K_D^2 - K_D^1). \tag{52}$$

Таким образом находим

$$a_{11} = \frac{A\sigma_\theta}{\rho_{02}\nu_2 l + \rho_{01}\nu_1}, \quad a_{12} = -la_{11}, \quad a_2 = -l_1 a_{11}, \quad l = \frac{l_1}{l_2},$$

$$b_{11} = \frac{Al_1 l_2 a_{11}}{3(k+l)}\left(\frac{l}{\chi_1} - \frac{1}{\chi_2}\right), \quad b_{12} = kb_{11}, \quad k = \frac{k_1}{k_2}, \quad b_2 = \frac{A}{3\chi_1}a_{11}l_1^3 - l_1 b_{11}.$$

Постоянные n_{11}, n_{12} находятся из третьего и шестого условий (50). Наконец, постоянные n_{21} и n_{22} определяются из (51) с учетом (52).

Заметим, что в этом решении при $\alpha_j = 0$ распределение концентрации по оси y становится линейным. Если эффект Соре присутствует, то это распределение всегда кубическое.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00934).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреев В.К., Пухначев В.В.* // Численные методы механики сплошной среды. 1983. Т. 14. № 5. С. 3–23.
2. *Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н.* Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск, 1984.
3. *Андреев В.К., Захватаев В.Е., Рябицкий Е.А.* Термокапиллярная неустойчивость. Новосибирск, 2000.
4. *Pukhnachev V.V.* // Fluid Dynamics Transactions. Warsaw, 1989. V. 14. P. 145–204.

Институт вычислительного моделирования СО РАН,
г. Красноярск

Поступила в редакцию
26.05.2003 г.