Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Д. А. Короткин, Конечнозонные решения уравнения цилиндрически-симметричного магнетика Гайзенберга, *Матем. заметки*, 1990, том 48, выпуск 3, 143–145

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.172
22 марта 2025 г., 22:12:22

Математические заметки

том 48 выпуск 3 сентябрь 1990

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

# КОНЕЧНОЗОННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОГО МАГНЕТИКА ГАЙЗЕНБЕРГА

**Д. А. Короткин**

Теория построения конечнозонных решений нелинейных дифференциальных уравнений берет свое начало в работах С. П. Новикова, Б. А. Дубровина, В. Б. Матвеева, А. Р. Итса и И. М. Кричевера (см. обзоры [1, 2] и монографию [3]). В работах Р. Ф. Бикбаева, А. И. Бобенко и А. Р. Итса [4, 5] с помощью синтеза идей конечнозонного интегрирования и техники обобщенной матричной задачи Римана были получены конечнозонные решения уравнения Ландау—Лифшица. В работе [6] были построены новые $U$ — $V$ пары с «переменным спектральным параметром» для ряда физически интересных уравнений («деформированной» системы Максвелла—Блоха, «деформированного» уравнения Ландау—Лифшица и др.). В работах автора и В. Б. Матвеева [7, 8] получены алгебро-геометрические решения наиболее важного представителя этого класса — стационарного аксиально-симметричного уравнения Эйнштейна. В [8], кроме того, получены конечнозонные решения «деформированной» системы Максвелла—Блоха.

В данной работе получены конечнозонные решения другого физически важного уравнения такого типа — уравнения цилиндрически-симметричного магнетика Гайзенберга:

$$\boldsymbol{S}_t = \boldsymbol{S} \times \left(\boldsymbol{S}_{xx} + \frac{1}{x}\, \boldsymbol{S}_x\right), \qquad \boldsymbol{S} \in \mathbf{R}^3, \quad |\boldsymbol{S}| = 1, \tag{1}$$

где $\times$ — векторное произведение, $\boldsymbol{S}$ — вектор намагниченности. Уравнение (1) является условием совместности следующей линейной системы [6]

$$\begin{gathered} \Psi_x = \frac{\lambda x}{2i}\, S\Psi, \qquad \lambda = \frac{1}{2(z+t)}, \qquad S = \sum_{a=1}^{3} S_a \sigma_a, \\ \Psi_t = \frac{i\lambda^2 x^2}{2}\, S + \frac{\lambda x}{2}\, S_x S, \end{gathered} \tag{2}$$

где $\sigma_a$ $(a = 1, 2, 3)$ — матрицы Паули, $z \in \mathbf{C}$ — спектральный параметр, $\Psi(z, t, x)$ — матричная $2 \times 2$ функция.

Мы будем строить функцию $\Psi(z, t, x)$, удовлетворяющую следующей системе аксиом.

1. Все особенности $\Psi(z)$ на $\mathbf{C}$ являются регулярными, за исключением точки $(-t)$, т. е. логарифмические производные $\Psi_t \Psi^{-1}$ и $\Psi_x \Psi^{-1}$ в них голоморфны.

2. При $z = -t$ $\Psi$ имеет существенную особенность вида

$$\Psi(z) \underset{z \sim -t}{\simeq} (\Phi_0 + \Phi_1 (z+t) + \ldots) \exp\left[\frac{x^2}{4i}\, \sigma_3 \lambda\right]. \tag{3}$$

© Д. А. Короткин, 1990

3. $\Psi\,(z=\infty)=\text{const}\equiv C$.

Легко проверить, что удовлетворяющая перечисленным требованиям функция $\Psi$ решает систему (2); при этом

$$S=\Phi_0\sigma_3\Phi_0^{-1}. \tag{4}$$

Для построения $\Psi$ рассмотрим гиперэллиптическую вещественную риманову поверхность $\mathcal{L}$ рода $g$, задаваемую уравнением

$$\omega^2=\prod_{i=1}^{g+1}(z-E_i)(z-F_i);\ E_1,F_1\in\mathbf{R};\ E_i=\bar{F}_i,\ \text{либо}\ E_i,F_i\in\mathbf{R},\ (i=2,\ldots,g+1).$$

Введем на $\mathcal{L}$ стандартные объекты конечнозонного интегрирования (подробности см. в [1—3]): канонический базис циклов $(a_i,b_i)$ $i=1,\ldots,g$; $dU_i\,(P)$ $(i=1,\ldots,g)$ — соответствующий базис голоморфных абелевых дифференциалов, $U\,(P)$ — преобразование Абеля, $\mathbf{B}$ — матрица $b$-периодов, $\theta\,(y\mid\mathbf{B})$ — тэта-функция Римана, $y\in\mathbf{C}^g$.

Зададим $\Psi\,(z)$ на первом листе $\mathcal{L}$ формулой

$$\Psi\,(z)=\begin{pmatrix}\varphi\,(z^1) & \varphi\,(z^2)\\ \psi\,(z^1) & \psi\,(z^2)\end{pmatrix},$$

где $z^i$ — точка на $i$-м листе $\mathcal{L}$, имеющая проекцию $z$ на $\mathbf{C}$, $\varphi$ и $\psi$ — функции на $\mathcal{L}$, задаваемые формулами

$$\varphi\,(P)=\frac{\theta\,(U\,(P)-D+(x^2/4i)\,W-V)\,\theta\,(U\,(\infty^1)-D)}{\theta\,(U\,(P)-D)\,\theta\,(U\,(\infty^1)-D+(x^2/4i)\,W-V)}\exp\left\{\left(\frac{x^2}{4i}\,\Omega+\omega^*\right)\Big|_{\infty^1}^{P}\right\},$$

$$\psi\,(P)=\frac{\theta\,(U\,(P)-D+(x^2/4i)\,W+V)\,\theta\,(U\,(\infty^2)-D)}{\theta\,(U\,(P)-D)\,\theta\,(U\,(\infty^2)-D+(x^2/4i)\,W+V)}\exp\left\{\left(\frac{x^2}{4i}\Omega+\omega\right)\Big|_{\infty^2}^{P}\right\},$$

где $\Omega\,(P)$ — нормированный (все $a$-периоды нулевые) интеграл 2-го рода с полюсами в точках $(-t^1)$ и $(-t^2)$ и вычетами $+1$ и $-1$ соответственно; $2\pi i W\,(t)$ его вектор $b$-периодов; $\omega\,(P)$ — нормированный интеграл третьего рода с полюсами $\infty^1$, $E_1$, $F_1$ и вычетами $+1$, $-1/2$ и $-1/2$ соответственно; $V$ — его вектор $b$-периодов; $\omega^*\,(P)\equiv\omega\,(P^*)$ — также интеграл третьего рода с вектором $b$-периодов — $2\pi iV$ ($*$ — инволюция на $\mathcal{L}$, переставляющая листы). Вектор $V$ легко выражается через преобразование Абеля: $V=U\,(\infty^1)-(1/2)\,U\,(E_1+F_1)$. $D$ — произвольный вещественный вектор общего положения, равный, с точностью до вектора римановых констант, преобразованию Абеля от дивизора полюсов.

То, что определенная таким образом функция $\Psi$ удовлетворяет аксиоматике, проверяется аналогично [4, 5]. Заметим, что если аксиоматике удовлетворяет функция $\Psi$, то ей удовлетворяет и функция $R\Psi Q$, где $R$ и $Q$ — постоянные невырожденные матрицы. Наша функция $\Psi$ отвечает выбору в (3) $C=I$. Выбирая начальной точкой преобразования Абеля $E_1$ и учитывая предыдущее замечание, получаем элементы матрицы $\Phi_0$ из (4)

$$(\Phi_0)_{11}=\frac{\theta\,(U\,(-t^1)+(x^2/4i)\,W-D-V)}{\theta\,(U\,(\infty^1)+(x^2/4i)\,W-D-V)}\exp\left\{\omega\,(P)\Big|_{-t^1}^{-t^2}-\frac{x^2}{4i}\,\Omega\,(P)\Big|_{\infty^2}^{\infty^1}\right\},$$

$$(\Phi_0)_{12}=\frac{\theta\,(U\,(-t^2)+(x^2/4i)\,W-D-V)}{\theta\,(U\,(\infty^1)+(x^2/4i)\,W-D-V)},$$

$$(\Phi_0)_{21}=\frac{\theta\,(U\,(-t^1)+(x^2/4i)\,W-D+V)}{\theta\,(U\,(\infty^2)+(x^2/4i)\,W-D+V)},$$

$$(\Phi_0)_{22}=\frac{\theta\,(U\,(-t^2)+(x^2/4i)\,W-D+V)}{\theta\,(U\,(\infty^2)+(x^2/4i)\,W-D+V)}\exp\left\{\omega\,(P)\Big|_{-t^1}^{-t^2}-\frac{x^2}{4i}\,\Omega\,(P)\Big|_{\infty^1}^{\infty^2}\right\}.$$

Аналогично тому, как в [5] проверялась вещественность решений уравнения Ландау—Лифшица, легко проверить, что вектор **S**, определенный в [4], будет вещественным.

При каждом $t$ наше решение почтипериодично по $x^2$. Зависимость от $t$ является более сложной и требует отдельного анализа.

Ленинградский институт
авиационного приборостроения

Поступило
12.04.90

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубровин Б. А. // УМН. 1981. Т. 36, № 2. С. 11—81. 2. Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. // УМН. 1976. Т. 31, № 1. С. 55—137. 3. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 4. Бобенко А. И. // Функцион. анализ и его прил. 1985. Т. 19, № 1. С. 15—31. 5. Бикбаев Р. Ф., Бобенко А. И., Итс А. Р. Уравнение Ландау — Лифшица. Теория точных решений (1, 2) // Препринт ДонФТИ — 84—6,7 (81, 82). Донецк, 1984. 6. Бурцев С. П., Захаров В. Е., Михайлов А. В. // ТМФ. 1987. Т. 70, № 3. С. 323—341. 7. Короткин Д. А. // ТМФ. 1988. Т. 77, № 1. С. 25—41. 8. Короткин Д. А., Матвеев В. Б. // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1, № 2. С. 77—102.

## КРИТЕРИИ $M$-ИДЕАЛОВ КОМПАКТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

**Э. Ф. Оя**

**1.** Пусть $X$ — банахово пространство (над полем вещественных или комплексных чисел) и $Y$ — его подпространство. Обозначим через $Y^{\perp}$ аннулятор подпространства $Y$ в сопряженном пространстве $X^*$. Говорят, что $Y$ есть $M$-идеал в $X$, если существует такой непрерывный линейный проектор $P$ в $X^*$, что $\operatorname{Ker} P = Y^{\perp}$ и $\| f \| = \| Pf \| + \| f - Pf \|$ при всех $f \in X^*$.

Свыше десяти лет интенсивно изучается вопрос, для каких $X$ подпространство компактных операторов $K(X)$ является $M$-идеалом в банаховом пространстве $L(X)$ всех непрерывных линейных операторов в $X$ (см., например, [1—4] и содержащиеся там библиографии). Один из наиболее общих результатов в этой области принадлежит П. Харманду и О. Лима [2] и гласит: *если $K(X)$ является $M$-идеалом в $L(X)$, то существует такая сеть операторов $(T_\alpha)$, $T_\alpha \in K(X)$, $\| T_\alpha \| \leqslant 1$, что*

$$\lim\nolimits_\alpha T_\alpha x = x \quad \forall x \in X, \qquad \lim\nolimits_\alpha T_\alpha^* g = g \; \forall g \in X^*. \tag{1}$$

Цель настоящей работы — дополнить эти необходимые условия до достаточных. Это делается в теореме 2, доказательство которой опирается на теорему 1, устанавливающую общий критерий $M$-идеала. Отметим, что в отличие от общепринятой методики, в своих доказательствах мы не пользуемся свойством трех шаров Альфсена—Эффроса.

**2.** Обозначим через $I$ единичный оператор в $X$, а через $B_X = \{x \in X: \| x \| \leqslant 1\}$ и $S_X = \{x \in X: \| x \| = 1\}$ — единичные шар и сферу пространства $X$. Если $U_\alpha \in L(X)$, то положим $U^\alpha = I - U_\alpha$.

ТЕОРЕМА 1. *Если существует такая сеть $(U_\alpha)$, $U_\alpha \in B_{L(X)}$, что $\operatorname{Im} U_\alpha \subset Y$ при всех $\alpha$ и $\lim_\alpha g(U_\alpha y) = g(y)$ при всех $y \in Y$ и $g \in Y^*$, то $Y$ является $M$-идеалом в $X$ тогда и только тогда, когда при всех $f \in B_{X^*}$, $x \in B_X$, $y \in B_Y$ или при всех $f \in S_{X^*}$, $x \in S_X$, $y \in S_Y$*

$$\overline{\lim}_\alpha \, | f(U_\alpha y + U^\alpha x) | \leqslant 1. \tag{2}$$

© Э. Ф. Оя, 1990 