А. С. Фомин, Арифметический метод доказательства локальной теоремы для серий независимых целочисленных случайных векторов,
Матем. заметки, 1980, том 28, выпуск 5, 791–800

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 28, № 5 (1980)

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СЕРИЙ НЕЗАВИСИМЫХ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

А. С. Фомин

Пусть $\mathbf{Z}$ — аддитивная группа действительных целых чисел, $\mathbf{Z}^d = \mathbf{Z} \times \ldots \times \mathbf{Z}$ — ее прямое произведение (d-мерная решетка); $\{\bar{\xi}_l^{(n)}\}_{l=1}^n$ — n-я серия независимых одинаково распределенных в серии $\mathbf{Z}^d$-значных случайных векторов $\bar{\xi}_l^{(n)} = (\xi_{l1}^{(n)}, \ldots, \xi_{ld}^{(n)})$, $l = 1, \ldots, n$; $n = 1, 2, \ldots$. Считаем вектор математических ожиданий векторов серии нулевым, а дисперсии компонент σ_{ni}^2, $i = 1, \ldots, d$, конечными, но зависящими от номера серии n.

Обозначим $R^{(n)} = \|\rho_{ij}^{(n)}\|$ матрицу коэффициентов корреляции компонент векторов серии, а связанную с $R^{(n)}$ квадратичную форму предполагаем положительно определенной.

Плотность d-мерного нормального распределения в точке $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ определяется формулой

$$f(\bar{x}) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} (\det R^{(n)})^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum\nolimits_{i,\, j=1}^{d} \alpha_{ij} x_i x_j\right\},$$

где $\|\alpha_{ij}^{(n)}\|$ — матрица, обратная $\|\rho_{ij}^{(n)}\|$.

Используем стандартные обозначения: характеристическую функцию векторов серии обозначим $\varphi(\bar{t})$; $\mathsf{P}\{\bar{\xi}_1^{(n)} = \bar{m}\} = p(\bar{m})$, $\bar{m} = (m_1, \ldots, m_d) \in \mathbf{Z}^d$; $\bar{S}_n = \sum_{k=1}^n \bar{\xi}_k^{(n)} = (S_{n1}, \ldots, S_{nd})$; $\mathsf{P}\{\bar{S}_n = \bar{z}\} = \mathsf{P}_n(\bar{z})$, $\bar{z} = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbf{Z}^d$; $B_{ni}^2 = \mathsf{D}S_{ni} = n\sigma_{ni}^2$, $i = 1, \ldots, d$; $\bar{\zeta}_n = (S_{n1}/B_{n1}, \ldots, S_{nd}/B_{nd})$, $\frac{\bar{z}}{B_n} = \left(\frac{z_1}{B_{n1}}, \ldots, \frac{z_d}{B_{nd}}\right)$.

Определение. Будем говорить, что последовательность серий случайных векторов удовлетворяет локальной предельной теореме, если при $n \to \infty$ равномерно по $\bar{z} = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbf{Z}^d$

$$B_{n1} \ldots B_{nd} P_n(\bar{z}) - f\left(\frac{\bar{z}}{B_n}\right) \to 0.$$

Предполагая, что $\beta_{ni} = \mathsf{M} \mid \xi_{1i}^{(n)}|^3 < \infty$, $i = 1, \ldots, d$, обозначим

$$\alpha_n = K \max_{1 \leqslant i \leqslant d} \max \left\{ \frac{\beta_{ni}^2}{\sigma_{ni}^4 \Delta_n^2 n}, \frac{\sigma_{ni}}{\sqrt{n}} \right\} \ln n,$$

где K — некоторая постоянная, $\Delta_n = \det R^{(n)}$.

Определение. Будем говорить, что для последовательности серий выполняется условие А, если для любого $q \in \mathbf{Z}$, $q \geqslant 2$, и любого $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_d)$, $a_i \in \mathbf{Z}$, $i = 1, \ldots, d$, $(a_1, \ldots, a_d, q) = 1$;

$$\max_{0 \leqslant r \leqslant q-1} \mathsf{P}\{(\bar{a} \cdot \bar{\xi}_1^{(n)}) \equiv r \pmod{q}\} \leqslant 1 - \alpha_n.$$

Это арифметическое условие аналогично условиям, используемым в работах [1] и [2].

ТЕОРЕМА. *Пусть при $n \to \infty$ для всех $i = 1, \ldots, d$*

$$\beta_{ni} = o(\sigma_{ni}^3 \Delta_n^2 \sqrt{n}).$$

Тогда существует постоянная $C(d)$, зависящая лишь от размерности пространства, такая, что если, начиная с некоторого n, выполнено условие А с константой $K \geqslant C(d)$, то имеет место локальная предельная теорема.

Доказательство. Стандартными приемами (см., например, [1]) сведем оценку выражения $B_{n1} \ldots B_{nd} P_n(\bar{z}) - f(\bar{z}/B_n)$ к оценке интеграла

$$I_n = B_{n1} \ldots B_{nd} \int_{G_1 \setminus G_2} |\varphi(2\pi \bar{t})|^n \, d\bar{t}, \tag{1}$$

где $G_1 = \{\bar{t} = (t_1, \ldots, t_d) : |t_i| \leqslant 1/2, \ i = 1, \ldots, d\}$; $G_2 = \{\bar{t} : |t_i| \leqslant x_{ni}, \ i = 1, \ldots, d\}$; $x_{ni} = \theta(d) \sigma_{ni}^2 \Delta_n \beta_{ni}^{-1}$, $i = 1, \ldots, d$, $\theta(d)$ — некоторая постоянная, зависящая лишь от размерности пространства.

Так как условие А подразумевает, что $\alpha_n < 1$, то из определения α_n следует, что $\sigma_{ni} = o(\sqrt{n})$, $i = 1, \ldots, d$. Отсюда $B_{ni} = \sigma_{ni} \sqrt{n} = o(\sqrt{n})$, $i = 1, \ldots, d$, и $B_{n1} \ldots$

$\ldots B_{nd} = o(n^d)$. Поэтому $I_n = o(1)$, если только в области интегрирования $|\varphi(2\pi\bar{t})| < n^d$. Это неравенство будет выполнено, если для всех $\bar{t} \in G_1 \setminus G_2$ имеет место неравенство

$$|\varphi(2\pi\bar{t})| < 1 - C_1(d)\frac{\ln n}{n}$$

с некоторой постоянной $C_1(d) \geqslant d$. Обозначим

$$E_n = \left\{\bar{t}\colon\ |t_i| \leqslant \frac{1}{2},\ i = 1, \ldots, d,\ |\varphi(2\pi\bar{t})| \geqslant \right.$$

$$\left. \geqslant 1 - C_1(d)\frac{\ln n}{n}\right\},$$

$$A_n = \{\bar{t}\colon\ |t_i| \leqslant B_{ni}^{-1},\ i = 1, \ldots, d\}.$$

ЛЕММА 1. *При выполнении условий теоремы $A_n \subset E_n$ при достаточно больших n.*

Доказательство. При доказательстве этой леммы мы будем существенно использовать известный результат А. Бикялиса [3], который в нашем случае одинаково распределенных слагаемых состоит в следующем.

Обозначим через $Q_n(\bar{t})$ и $\beta_n(\bar{t})$ соответственно второй и третий абсолютный моменты случайной величины

$$\left(\frac{\bar{t}}{\sigma_n} \cdot \bar{\xi}_1^{(n)}\right), \qquad \frac{\bar{t}}{\sigma_n} = \left(\frac{t_1}{\sigma_{n1}}, \ldots, \frac{t_d}{\sigma_{nd}}\right)$$

и через $\varphi_n(\bar{t})$ — характеристическую функцию введенного выше вектора нормированных сумм $\bar{\zeta}_n$. Тогда для всех $\bar{t}$ таких, что $\beta_n(\bar{t})/Q_n(\bar{t}) \leqslant (1/8)\sqrt{n}$ выполняется неравенство

$$\left|\varphi_n(\bar{t}) - \exp\left\{-\frac{1}{2}Q_n(\bar{t})\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 4^d \frac{\beta_n(\bar{t})}{\sqrt{n}} \exp\left\{-\frac{1}{4}Q_n(\bar{t})\right\}. \qquad (2)$$

Покажем вначале, что

$$A_n \subset D_n =$$

$$= \left\{\bar{t}\ :\ \frac{\beta_n(\bar{t}\cdot B_n)}{Q_n(\bar{t}\cdot B_n)} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{8},\ \bar{t}\cdot B_n = (t_1 B_{n1}, \ldots, t_d B_{nd})\right\}.$$

Действительно, в силу неравенства $(|a_1| + \ldots + |a_d|)^3 \leqslant$

$\leqslant d^2 (|a_1|^3 + \ldots + |a_d|^3)$ получаем

$$\frac{\beta_n(\bar{t}\cdot B_n)}{Q_n(\bar{t}\cdot B_n)} \leqslant \frac{d^2\sqrt{n}(|t_1|^3\beta_{n1} + \ldots + |t_d|^3\beta_{nd})}{\mathsf{M}(t_1\xi_{11}^{(n)} + \ldots + t_d\xi_{1d}^{(n)})^2}.$$

По условиям теоремы $\beta_{ni} = o(\sigma_{ni}^3\Delta_n^2\sqrt{n}$, $i = 1, \ldots, d$, а по определению множества A_n, $|t_i| \leqslant B_{ni}^{-1}$, $i = 1, \ldots, d$, поэтому, обозначая через $U = (u_1, \ldots, u_d)$ матрицу-строку с элементами $u_i = \sigma_{ni}t_i$, $i = 1, \ldots, d$, находим, что для $\bar{t} \in A_n$

$$\frac{\beta_n(\bar{t}\cdot B_n)}{Q_n(\bar{t}\cdot B_n)} = o\left(\Delta_n^2\sqrt{n}\,\frac{UU^T}{UR^{(n)}U^T}\right).$$

Совершая ортогональное преобразование $U = VC$, приводящее квадратичную форму $UR^{(n)}U^T$ к каноническому виду, получаем, что

$$\frac{u_1^2 + \ldots + u_d^2}{u_1^2 + \ldots + u_d^2 + 2u_1u_2\rho_{12}^{(n)} + \ldots} = \frac{v_1^2 + \ldots + v_d^2}{\lambda_1 v_1^2 + \ldots + \lambda_d v_d^2} \leqslant \frac{1}{\lambda^*},$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ — характеристические корни матрицы $R^{(n)}$, а $\lambda^* = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant d}\lambda_k$. Пусть $(\lambda_1 \ldots \lambda_d)'$ — произведение всех характеристических корней, за исключением λ^*. Так как $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ положительны, а $\lambda_1 + \ldots + \lambda_d = \operatorname{Tr} R^{(n)} = d$, то произведение $(\lambda_1 \ldots \lambda_d)'$ можно оценить сверху величиной d^{d-1}, и поэтому $1/\lambda^* \leqslant d^{d-1}/\Delta_n$, следовательно,

$$\beta_n(\bar{t}\cdot B_n)/Q_n(\bar{t}\cdot B_n) = o(\Delta_n\sqrt{n}) = o(\sqrt{n}) \tag{3}$$

и $A_n \subset D_n$.

Так как для $\bar{t} \in A_n$ выполняются неравенства $|t_iB_{ni}| \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, d$, для $Q_n(\bar{t}\cdot B_n)$ справедлива оценка $Q_n(\bar{t}\cdot B_n) \leqslant d^2$, то из (3) вытекает оценка $\beta_n(\bar{t}\cdot B_n) \leqslant d^2\beta_n(\bar{t}\cdot B_n)/Q_n(\bar{t}\cdot B_n) = o(\sqrt{n})$. Поэтому, как следует из (2) и (3), для $\bar{t} \in A_n$, начиная с некоторого n,

$$|\varphi(2\pi\bar{t})|^n = |\varphi_n(\bar{t}\cdot B_n)| \geqslant$$
$$\geqslant \exp\{-2\pi^2 Q_n(\bar{t}\cdot B_n)\}\left(1 - 4^d\,\frac{\beta_n(\bar{t}\cdot B_n)}{\sqrt{n}}\exp\{\pi^2 Q_n(\bar{t}\cdot B_n)\}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \exp\{-20 Q_n(\bar{t}\cdot B_n)\}$$

или

$$|\varphi(2\pi\bar{t})| \geqslant \exp\{-20\,Q_n(\bar{t}\cdot B_n)/n\}.$$

Опять используя оценку $Q_n(\bar{t}\cdot B_n) \leqslant d^2$, находим, что для $\bar{t} \in A_n$, начиная с некоторого n,

$$| \varphi(2\pi\bar{t}) | \geqslant 1 - C_1(d) \ln n/n.$$

Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. ▌ Предположим существование вектора $\bar{t}$ такого, что $\bar{t} \in E_n$, $\bar{t} \in G_1 \diagdown G_2$. Обозначим его $\tilde{\tau}$. Если такого вектора не существует, то $I_n = o(1)$ и теорема доказана. Так как $\bar{\tau} \in G_1 \diagdown G_2$, то хотя бы одна из координат $\bar{\tau}$ удовлетворяет неравенству $|\bar{\tau}_i| \geqslant x_{ni}$, $1 \leqslant i \leqslant d$. Будем считать для определенности, что $|\tau_1| \geqslant x_{n1}$.

1. Первая возможность: $x_{n1} \leqslant |\tau_1| \leqslant B_{n1}^{-1/2}$. Образуем множество $E_n' = A_n \bigcup \bar{\tau}$. Рассмотрим E_n' и его последовательные удвоения $2E_n'$, $2^2E_n'$, ..., $2^mE_n'$..., где под удвоением произвольного множества E из d-мерного евклидова пространства мы понимаем множество $2E = \{\bar{t}:\bar{t} = \bar{t}_1 + \bar{t}_2,\ \bar{t}_1 \in E,\ \bar{t}_2 \in E\}$.

Как и в одномерном случае, легко показать (см. [4, стр. 37]), что если $m = 1 - [\log_2 |\tau_1|]$, то множество точек первой компоненты множества $2^mE_n' \bigcup (-2^mE_n')$, приведенного по mod 1, совпадает с $[-1/2, 1/2)$. В множестве $2^mE_n' \bigcup (-2^mE_n')$, приведенном по mod 1, существует центрально-симметричное подмножество F такое, что для любого t_1, $-1/2 \leqslant t_1 < 1/2$, сечение F_{t_1} есть $(d-1)$-мерный параллелепипед, длины сторон которого $2B_{n2}^{-1}$, ..., $2B_{nd}^{-1}$.

Интегрируя квадрат модуля характеристической функции по множеству F и учитывая, что мнимая часть равна нулю, получаем

$$\int_F |\varphi(2\pi\bar{t})|^2 \, d\bar{t} =$$

$$= \int_F \sum_{\bar{m}} \sum_{\bar{l}} p(\bar{m}) p(\bar{l}) \exp\{2\pi i (\bar{t}\cdot(\bar{m}-\bar{l}))\} \, d\bar{t} =$$

$$= \int_F \sum_{\bar{m}} \sum_{\bar{l}} p(\bar{m}) p(\bar{l}) \cos 2\pi [t_1(m_1 - l_1) + \ldots$$

$$\ldots + t_d(m_d - l_d)] \, d\bar{t},$$

где $\bar{m} = (m_1, \ldots, m_d) \in Z^d$, $\bar{l} = (l_1, \ldots, l_d) \in z^d$. Разлагая косинус в правой части по формуле косинусов и учитывая, что интегралы, содержащие синусы, обращаются в нуль, получаем

$$\int_F |\varphi(2\pi\bar t)|^2 \,d\bar t = \int_F \sum_{\bar m} \sum_{\bar l} p(\bar m)\, p(\bar l) \cos 2\pi t_1 (m_1 - l_1) \cdot$$
$$\cdot \cos 2\pi\, [t_2(m_2 - l_2) + \ldots + t_d(m_d - l_d)]\, d\bar t.$$

Мажорируя косинус, не содержащий t_1, единицей, окончательно получаем

$$\int_F |\varphi(2\pi\bar t)|^2 \,d\bar t \leqslant$$
$$\leqslant 2^{d-1} \prod_{k=2}^{d} B_{nk}^{-1} \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{\bar m} \sum_{\bar l} p(\bar m)\, p(\bar l) \cos 2\pi t_1 (m_1 - l_1)\, dt_1 =$$
$$= 2^{d-1} \prod_{k=2}^{d} B_{nk}^{-1} \sum_{\substack{\bar m,\, \bar l \\ m_1 = l_1}} p(\bar m)\, p(\bar l) = 2^{d-1} \prod_{k=2}^{d} B_{nk}^{-1} \cdot$$
$$\cdot \sum_{m_1} \Big[\sum_{(m_2, \ldots, m_d)} \sum_{(l_2, \ldots, l_d)} p(m_1, m_2, \ldots, m_d) \cdot$$
$$p(m_1, l_2, \ldots, l_d) \Big] = 2^{d-1} \prod_{k=2}^{d} B_{nk}^{-1} \sum_{m_1} \mathsf{P}^2 \{\xi_{11}^{(n)} = m_1\} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{d-1} \prod_{k=2}^{d} B_{nk}^{-1} \sup_{m_1} \mathsf{P} \{\xi_{11}^{(n)} = m_1\} =$$
$$= 2^{d-1} \prod_{k=2}^{d} B_{nk}^{-1} \sup_{m_1} \mathsf{P} \{(\bar a \cdot \bar\xi_1^{(n)}) = m_1\}, \qquad (4)$$

где $\bar a = (1, 0, \ldots, 0)$.

Так как $E_n' \subset E_n$, то для всех $\bar t \in E_n'$ справедливо неравенство

$$|\varphi(2\pi\bar t)| \geqslant 1 - C_1(d) \ln n/n.$$

Для дальнейшего нужна

ЛЕММА 2. *Пусть $\varphi(\bar t)$ — характеристическая функция случайного вектора $\bar\xi$ принимающего значения из Z^d. Тогда*

$$|\varphi[2\pi(\bar t' + \bar t'')]| \geqslant |\varphi(2\pi\bar t')|\, |\varphi(2\pi\bar t'')| -$$
$$- \sqrt{1 - |\varphi(2\pi\bar t')|^2}\, \sqrt{1 - |\varphi(2\pi\bar t'')|^2}.$$

Для одномерного случая лемма доказана в [5, стр. 151]. Распространение леммы на многомерный случай производится дословным повторением доказательства для одномерного случая.

Следствие. *Если $|\varphi(2\pi\bar t')| \geqslant 1 - \delta$, $|\varphi(2\pi\bar t'')| \geqslant 1 - \delta$, где константа $\delta > 0$, то $|\varphi[2\pi(\bar t' + \bar t'')]| \geqslant 1 - 4\delta$.*

Используя следствие леммы 2, получим, что для всех $\bar{t} \in F \subset 2^m E_n' \cup (-2^m E_n')$ выполнено неравенство

$$|\varphi(2\pi\bar{t})| \geqslant 1 - 4^m C_1(d)\frac{\ln n}{n} \geqslant 1 - C_2(d)\frac{\ln n}{|\tau_1|^2 n} \geqslant$$
$$\geqslant 1 - C_2(d)\frac{\ln n}{x_{n1}^2 n} = 1 - C_3(d)\frac{\beta_{n1}^2 \ln n}{\sigma_{n1}^4 \Delta_n^2 n}$$

при некоторых константах $C_2(d)$, $C_3(d)$ и для достаточно больших n.

Возведем последнее неравенство в квадрат, отбросим третий член в правой части, после чего проинтегрируем полученное неравенство по множеству $F \subset 2^m E_n' \cup \cup (-2^m E_n')$. Имеем

$$\int_F |\varphi(2\pi\bar{t})|^2 d\bar{t} \geqslant \left(1 - 2C_3(d)\frac{\beta_{n1}^2 \ln n}{\sigma_{n1}^4 \Delta_n^2 n}\right)\operatorname{mes} F =$$
$$= \left(1 - 2C_3(d)\frac{\beta_{n1}^2 \ln n}{\sigma_{n1}^4 \Delta_n^2 n}\right) 2^{d-1}\prod_{k=2}^{d} B_{nk}^{-1}.$$

Сравнивая это неравенство с (4), приходим к противоречию с арифметическим условием теоремы.

2. Остается рассмотреть случай $|\tau_1| > B_{n1}^{-1/2}$. Пусть сначала остальные координаты точки $\bar{\tau}$ малы, именно, $|\tau_i| \leqslant x_{ni}$, $i = 2, \ldots, d$. Рассмотрим множество $2^{m_1}E_n'$, где $m_1 = [\ln B_{n1}/\ln 4] + 1$.

Если в множестве $2^{m_1}E_n'$ нет точек, первые координаты которых сравнимы по mod 1, то множество точек первой компоненты $2^{m_1}E_n' \cup (-2^{m_1}E_n')$, приведенное по mod 1, полностью совпадает с $[-1/2, 1/2)$ и, повторив рассуждения предыдущего пункта, получим противоречие с арифметическим условием теоремы.

Пусть теперь найдется число $m_2 < m_1$ такое, что $t_1' \equiv \equiv t_1'' \pmod 1$, $\bar{t}' \in 2^{m_1}E_n'$, $\bar{t}'' \in 2^{m_2}E_n'$.

Множество $2^{m_2}E_n'$ состоит из $2^{m_2} + 1$ параллелепипедов Δ_j. Пусть $\bar{t}' \in \Delta_{j_1}$, $\bar{t}'' \in \Delta_{j_2}$, $j_2 > j_1$. Обозначим $j_2 - j_1 = q$, $t_1'' - t_1' = r$. Можно считать, что $(r, q) = 1$, так как в противном случае все последующие рассуждения можно провести для чисел $q_1 = q/(r, q)$ и $r_1 = r/(r, q)$.

Множество $2^{m_1}E_n'$ содержит точку $(r/q, t_2, \ldots, t_d)$, где $|t_i| = o(B_{ni}^{-1/2})$, $i = 2, \ldots, d$. Но тогда и все точки

$j\,(r/q,\ t_2,\ \ldots,\ t_d)$ принадлежат $2^{m_2}E_n'$ или симметричному с ним относительно нуля множеству $(-2^{m_2}E_n')$, $j=0,\ 1,\ \ldots,\ q-1$.

Если теперь обозначить

$$m_3 = \max\{[\ln B_{n1}/\ln 4+1,\ \ldots,\ [\ln B_{nd}/\ln 4]+1\},$$

то $B_{ni}^{-1}2^{m_3} \geqslant B_{ni}^{-1/2}$, $i=2,\ \ldots,\ d$, следовательно, и точки $((rj/q),\ 0,\ \ldots,\ 0)$, $j=0,1,\ \ldots,\ q-1$, содержатся в $2^{m_3}E_n'$.

Используя следствие леммы 2, убеждаемся, что при некоторой константе $C_4\,(d)$

$$\left|\varphi\left(2\pi\,\frac{r}{q}\,j, 0, \ldots, 0\right)\right| \geqslant 1 - C_4\,(d)\,\frac{\sigma_n^*}{\sqrt{n}}\ln n,$$

где $\sigma_n^* = \max\{\sigma_{n1},\ \ldots,\ \sigma_{nd}\}$. Отсюда

$$\frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1}\left|\varphi\left(2\pi\,\frac{r}{q}\,j, 0, \ldots, 0\right)\right|^2 \geqslant 1 - 2C_4\,(d)\,\frac{\sigma_n^*}{\sqrt{n}}\ln n. \tag{5}$$

Для завершения рассмотрения случая 2 докажем следующее равенство, являющееся аналогом равенства Парсеваля. Пусть $q \in \mathbf{Z}$, $q \geqslant 2$; $a=(a_1,\ \ldots,\ a_d) \in \mathbf{Z}^d$, $(a_1,\ \ldots,\ a_d,\ q)=1$;

$$\boldsymbol{P}_r = \mathsf{P}\,\{(\bar a\cdot\bar\xi_1^{(n)}) \equiv r\ (\mathrm{mod}\ q)\}.$$

Тогда

$$\frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1}\left|\varphi\left(2\pi\frac{a_1}{q}\,j, \ldots, 2\pi\,\frac{a_d}{q}\,j\right)\right|^2 = \sum_{r=0}^{q-1}\boldsymbol{P}_r^2. \tag{6}$$

Действительно,

$$\varphi\left(2\pi\,\frac{a_1}{q}\,j, \ldots, 2\pi\,\frac{a_d}{q}\,j\right) =$$

$$= \sum_{\bar m} p\,(\bar m)\exp\left\{2\pi i\,\frac{j}{q}\,(\bar m\cdot\bar a)\right\} = \sum_{r=0}^{q-1}\exp\left\{2\pi i\,\frac{r}{q}\,j\right\}\cdot$$

$$\mathsf{P}\,\{(\bar a\cdot\bar\xi_1^{(n)}) \equiv r\,(\mathrm{mod}\ q)\} = \sum_{r=0}^{q-1}\boldsymbol{P}_r\exp\left\{2\pi_i\,\frac{r}{q}\,j\right\}\cdot$$

Тогда

$$\left|\varphi\left(2\pi\frac{a_1}{q}j, \ldots, 2\pi\frac{a_d}{q}j\right)\right|^2 = \left(\sum\nolimits_{r=0}^{q-1}{}' \boldsymbol{P}_r \exp\left\{2\pi i\frac{r}{q}j\right\}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\sum\nolimits_{l=0}^{q-1} \boldsymbol{P}_l \exp\left\{-2\pi i\frac{l}{q}j\right\}\right) =$$

$$= \sum\nolimits_{r=0}^{q-1} \boldsymbol{P}_r^2 + \sum\nolimits_{\substack{r,\, l\\ r\neq l}} \boldsymbol{P}_r \boldsymbol{P}_l \exp\left\{2\pi i\frac{r-l}{q}j\right\}.$$

Просуммируем теперь это равенство по j от 0 до $q-1$ и, разделив на q, получим равенство (6), так как

$$\sum\nolimits_{j=0}^{q-1}\sum\nolimits_{\substack{r,\, l\\ r\neq l}} \boldsymbol{P}_r \boldsymbol{P}_l \exp\left\{2\pi i\frac{r-l}{q}j\right\} = 0.$$

Полагая теперь в равенстве (6) $\bar{a} = (a_1, 0, \ldots, 0)$, и, учитывая (5), получаем

$$\max_{0\leqslant r\leqslant q-1} \mathsf{P}\{(\bar{a}\cdot\bar{\xi}_1^{(n)}) \equiv r\,(\mathrm{mod}\, q)\} \geqslant 1 - 2C_4(d)\frac{\sigma_n^*}{\sqrt{n}}\ln n,$$

что противоречит арифметическому условию теоремы.

Случай, когда кроме τ_1 некоторые другие координаты вектора $\bar{\tau}$, например, $\tau_{l_1}, \tau_{l_2}, \ldots, \tau_{l_s}$, удовлетворяют неравенству $|\tau_{l_j}| \geqslant x_{nj}$, рассматривается вполне аналогично, а в качестве вектора $\bar{a}$ берется вектор, равный

$$(a_1, 0, \ldots, a_{l_1}, 0, \ldots, a_{l_s}, 0, \ldots, 0).$$

Итак, предположение о существовании точки $\bar{t}$ такой, что $\bar{t} \in G_1 \setminus G_2$ и $\bar{t} \in E_n$, противоречит условиям теоремы. Таким образом, для $\bar{t} \in G_1 \setminus G_2$ мы имеем

$$|\varphi(2\pi\bar{t})| < 1 - C_1(d)\frac{\ln n}{n}.$$

Следовательно, в соотношении (1) $I_n = o(1)$ при $n \to \infty$. Теорема доказана.

Петрозаводский государственный университет

Поступило 5.XI.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Миталаускас А. А., О многомерной локальной предельной теореме для решетчатых распределений, Тр. АН Лит. ССР, Сер. Б, 2 (1960), 3—14.

[2] Р а у д е л ю н а с А. К., О многомерной локальной предельной теореме, Лит. матем. сб., **4**, № 1 (1964), 141—144.

[3] Б и к я л и с А., Об асимптотических разложениях для произведений многомерных характеристических функций, Теория вероятн. и ее примен., **14**, № 3 (1969), 508—511.

[4] Ф о м и н А. С., Локальные предельные теоремы для серий одинаково распределенных решетчатых случайных величин, Сб., Проблемы алгебры и функционального анализа, Петрозаводск, 1978, 32—46.

[5] М о с к в и н Д. А., Ф р е й м а н Г. А. Ю д и н А. А., Обратные задачи аддитивной теории чисел и локальные предельные теоремы для решетчатых случайных величин, Сб., Теория чисел, М., 1973, 148—162.