Н. А. Широков, Один тип автоморфных форм, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 1992, том 201, 177–189

Широков Н.А.

ОДИН ТИП АВТОМОРФНЫХ ФОРМ

Пусть Γ – фуксова группа преобразований единичного круга $\mathbb{D}$ на себя. Аналитическую в $\mathbb{D}$ функцию f будем называть аналитической Γ-автоморфной формой веса $-2k$, k – натуральное, если для всякого $T\in\Gamma$ справедливо соотношение

$$f(T(z)) = f(z)(T'(z))^k .$$

Нетривиальные, т.е. не равные тождественно нулю аналитические автоморфные формы веса $-2k$ могут существовать только если Γ – фуксова группа II рода [1]. Х.Поммеренке [2] впервые построил пример аналитической автоморфной формы веса – 2 для фуксовой группы II рода без параболических элементов, предельное множество которой удовлетворяет условию Карлесона. Условие отсутствия параболических элементов было снято в работе Даасе [3], в которой построены аналитические Γ-автоморфные формы веса $-2k$ для любого натурального k. Поскольку Γ-автоморфные формы тесно связаны со строением предельного множества группы, представляет интерес привести примеры таких форм.

В настоящей работе рассматриваются конечно порожденные фуксовы группы II рода. Предельное множество для таких групп заведомо удовлетворяет условию Карлесона [2]. Приводимый новый метод построения возможен, в сущности, из-за равномерности в распределении длин дополнительных интервалов предельного множества и значений $T(0)$, $T\in\Gamma$, в указанном классе групп.

Получаемая форма оказывается в определенном смысле максимальной возможной гладкости в замкнутом круге $\overline{\mathbb{D}}$.

В дальнейшем Λ^n означает класс функций f, аналитических в $\mathbb{D}$, для которых в $\overline{\mathbb{D}}$ справедливо условие $|f^{(n)}(z)|\leqslant c_f$, $z\in\mathbb{D}$; $\Lambda^{n+\alpha}$, $0<\alpha<1$, означает подкласс Λ^n, для которого выполнено

$$|f^{(n)}(z)-f^{(n)}(\xi)|\leqslant c_f|z-\xi|^{\alpha},\quad z,\ \xi\in\overline{\mathbb{D}} .$$

Х. Поммеренке построил аналитическую Γ-автоморфную форму $h\in\Lambda^1$ веса – 2; оказывается, это наибольшая возможная гладкость ненулевых форм такого веса, и вообще, можно построить автоморфные формы веса $-2k$ из Λ^k, но не более гладкие.

Напомним, что замкнутое множество $E\subset\partial\mathbb{D}$ называется карлесоновым, если $mes\, E = 0$, и

$$\int_{\partial D} |\log dist(z,E)|\,|dz| < \infty .$$

ТЕОРЕМА I. Пусть Γ - фуксова группа II рода, действующая разрывно в $\mathbb{D}$, E - ее множество предельных точек, f - аналитическая Γ - автоморфная форма веса $-2k$. Тогда, если $f \in \Lambda^{k+\alpha}$, $0<\alpha<1$, то $f \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, дифференцируя равенство

$$f(T(z)) = f(z)(T'(z))^k \tag{0}$$

последовательно $k-1$ раз и затем полагая $z=0$ и выбирая последовательность $T_n \in \Gamma$ так, чтобы $T_n(0) \to \xi \in E$, находим, что если $f \in \Lambda^k$, то

$$f|_E = f'|_E = \ldots = f^{(k-1)}|_E = 0 . \tag{I}$$

Пусть, далее J - произвольная свободная сторона фундаментального многоугольника Форда для группы Γ, $I \subset \partial\mathbb{D} \setminus E$ - такая дополнительная дуга E, что $J \subset I$.

Рассмотрим множество образов $\{T(I)\}$, $T \in \Gamma$. Для любого $\delta > 0$ найдется такая дуга $L \subset \partial\mathbb{D}$, длина которой меньше δ, внутри которой бесконечно много образов $T(I)$. Пусть $I_0 = T_0(I)$, $T_0 \in \Gamma$, $I_0 \subset L$, ξ_1, ξ_2 - концы дуги I_0. Если функция $f \in \Lambda^{k+\alpha}(\partial\mathbb{D})$, то, используя (I) и несложную модификацию леммы I из [4], получим соотношение

$$|f(\xi)| \leqslant C_f\, \delta^\alpha \min(|\xi-\xi_1|^k, |\xi-\xi_2|^k), \quad \xi \in I_0 . \tag{2}$$

Рассмотрим теперь следующую функцию на ∂D:

$$\rho(\xi) = \frac{|\xi-\xi_1|\,|\xi-\xi_2|}{|\xi_1-\xi_2|},$$

которую определяем такой формулой, если ξ лежит на интервале $S \subset \partial\mathbb{D} \setminus E$ с концами ξ_1 и ξ_2.

Если преобразование $T(z) = e^{\alpha}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$ переводит ξ_1 и ξ_2 соответственно в t_1 и t_2, то для $\xi \in S$ имеем

$$\rho(T(\xi))=\frac{|T(\xi)-t_1||T(\xi)-t_2|}{|t_1-t_2|}=\frac{|T(\xi)-T(\xi_1)||T(\xi)-T(\xi_2)|}{|T(\xi_1)-T(\xi_2)|}=$$

$$=\frac{\dfrac{|\xi-\xi_1|(1-|a|^2)}{|1-\bar a\xi||1-\bar a\xi_1|}\cdot\dfrac{|\xi-\xi_2|(1-|a|^2)}{|1-\bar a\xi||1-\bar a\xi_2|}}{\dfrac{|\xi_2-\xi_1|(1-|a|^2)}{|1-\bar a\xi_1||1-\bar a\xi_2|}}=\frac{|\xi-\xi_1||\xi-\xi_2|}{|\xi_1-\xi_2|}\cdot\frac{1-|a|^2}{|1-\bar a\xi|^2}=$$

$$=\rho(\xi)|T'(\xi)|\ ,$$

или

$$\frac{\rho(T(\xi))}{|T'(\xi)|}=\rho(\xi)\ ,\quad \xi\in\partial\mathbb{D}\ . \tag{3}$$

В терминах введенной функции ρ соотношение (2) перепишется так:

$$|f(\xi)|\leqslant c_{f,\Gamma}\,\sigma^{\alpha}\rho^{k}(T_0(\xi))\ ,\quad \xi\in I\ . \tag{4}$$

Вспоминая, что $I_0=T_0(I)$, преобразуем (4):

$$|f(T_0(\xi))|\leqslant c_{f,\Gamma}\,\sigma^{\alpha}\rho^{k}(T_0(\xi))\ ,\quad \xi\in I\ ,$$

и далее

$$|f(T_0(\xi))||T_0'(\xi)|^{-k}\leqslant c_{f,\Gamma}\,\sigma^{\alpha}\rho^{k}(T_0(\xi))|T_0'(\xi)|^{-k},\quad \xi\in I\ ,$$

что с помощью (4) и (0) дает

$$|f(\xi)|\leqslant c_{f,\Gamma}\,\sigma^{\alpha}\rho^{k}(\xi)\ ,\quad \xi\in I\ ,$$

откуда в силу произвольности $\sigma>0$ следует, что $f/_I=0$ и, значит, $f/_J=0$. Поскольку J – любая свободная сторона $\mathcal{D}$, то $f/_{\mathcal{D}\cap\partial\mathbb{D}}=0$, и тогда $f\equiv 0$, что и требовалось.

Для построения Γ -автоморфной формы порядка $-2k$ нам будут нужны вспомогательные функции. Положим

$$u(z)=\sum_{T\in\Gamma}|T'(z)|\ ,\qquad z\in\partial\mathbb{D}\setminus E\ .$$

Ясно, что

$$u(T_0(\xi))=\sum_{T\in\Gamma}\left|T'(T_0(\xi))\right|=\sum_{T\in\Gamma}\frac{\left|T(T_0(\xi))'\right|}{|T_0'(\xi)|}=\frac{u(\xi)}{|T_0'(\xi)|}. \quad (5)$$

В дальнейшем считаем Γ конечно порожденной, тогда множество E предельных точек Γ удовлетворяет условию Карлесона и функция $\log u$ суммируема на $\partial\mathbb{D}$ [2].

Пусть W - внешняя функция в $\mathbb{D}$, введенная Видомом, такая, что

$$|W(\xi)|=u(\xi), \quad \xi\in\partial\mathbb{D}. \quad (5^{\mathrm{I}})$$

В таком случае, если $T\in\Gamma$, то легко непосредственно убедиться, что

$$W(T(z))=\gamma_T\,(W(T))_e(z), \quad (6)$$

где R_e - внешняя часть функции R, а $|\gamma_T|=1$. Используя (5), находим при $\xi\in\partial\mathbb{D}$:

$$|W(T(\xi))|=u(T(\xi))=\frac{u(\xi)}{|T'(\xi)|}=\frac{|W(\xi)|}{|T'(\xi)|}. \quad (7)$$

Поскольку W - внешняя функция, то из (6) и (7) находим

$$W(T(z))=\eta_T\frac{W(z)}{T'(z)} \quad (8)$$

с некоторыми постоянными η_T, $|\eta_T|=1$.

Положим $\lambda(z)=W^{-1}(z)$ и будем использовать это обозначение до конца работы. Соотношение (8) влечет для

$$\lambda^{k+1}(T(z))=\eta_T^{-k-1}\lambda^{k+1}(z)(T'(z))^{k+1}, \quad (8^{\mathrm{I}})$$

а для $T_1, T_2\in\Gamma$:

$$\eta_{T_1T_2}=\frac{W(T_1(T_2(z)))}{W(z)}(T_1(T_2(z)))'=\eta_{T_1}\frac{W(T_2(z))}{W(z)T_1'(z)}(T_1(T_2(z)))'= \quad (9)$$

$$=\eta_{T_1}\eta_{T_2}\frac{W(z)}{W(z)T_1'(T_2(z))\cdot T_2'(z)}\cdot(T_1(T_2(z)))'=\eta_{T_1}\eta_{T_2}.$$

Положим, наконец,

$$H(z)=\sum_{T\in\Gamma}\eta_T^{-k-1}T'(z)\,,\quad h(z)=H(z)\lambda^{k+1}(z)\,. \tag{9^I}$$

Тогда (9) дает для $T_0\in\Gamma$:

$$H(T_0(z))=\sum_{T\in\Gamma}\eta_T^{-k-1}T'(T_0(z))=$$
$$=\sum_{T\in\Gamma}\left(\eta_{TT_0}\cdot\frac{1}{\eta_{T_0}}\right)^{-k-1}(T(T_0(z)))'\cdot\frac{1}{T_0'(z)}=\eta_{T_0}^{k+1}H(z)\cdot\frac{1}{T_0'(z)}\,. \tag{10}$$

Теперь из (8^I) и (10) находим

$$H(T(z))\lambda^{k+1}(T(z))=\eta_T^{k+1}\cdot\frac{1}{T'(z)}\cdot H(z)\cdot\eta_T^{-k-1}(T'(z))^{k+1}\lambda^{k+1}(z)=H(z)\lambda^{k+1}(z)(T'(z))^k. \tag{11}$$

Таким образом, если $H\not\equiv 0$, то функция $h(z)=H(z)\lambda^{k+1}(z)$ есть аналитическая Γ-автоморфная форма веса $-2k$. ●

ТЕОРЕМА 2. Если Γ - конечно порожденная фуксова группа II рода в круге $\mathbb{D}$, для которой ноль не является эллиптической точкой, то тогда функция $h(z)\not\equiv 0$, определенная в (9), принадлежит классу Λ^k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что h - Γ-автоморфная форма веса $-2k$, проверено в (11); убедимся, что $h\not\equiv 0$. Для этого достаточно установить, что $H(z)\not\equiv 0$. В самом деле, возьмем какое-нибудь $T_0(z)=e^{i\theta_{T_0}}\dfrac{z-\alpha_{T_0}}{1-z\bar\alpha_{T_0}}\in\Gamma,\ T_0\neq I$, и пусть $\left\{T(z)=e^{i\theta_T}\dfrac{z-\alpha_T}{1-z\bar\alpha_T}\right\}$ - это множество всех отображений $T\in\Gamma$.

Тогда

$$H(z)=\sum_{T\in\Gamma}\eta_T^{-k-1}e^{i\theta_T}\frac{1-|\alpha_T|^2}{(1-z\bar\alpha_T)^2}\,, \tag{11^I}$$

откуда видно, что H аналитична вне множества $E\cup\bigcup_{T\in\Gamma}\left\{\frac{1}{\bar\alpha_T}\right\}$. Поскольку $\alpha_T=T^{-1}(0)$ и поскольку 0 не есть эллиптическая точка, то разным T_1 и T_2 соответствуют разные α_{T_1} и α_{T_2} , и все точки $1/\bar\alpha_T$ также различны. Поскольку ряд (11^I) сходится вне $E\cup\bigcup_{T\in\Gamma}\left\{\frac{1}{\bar\alpha_T}\right\}$, то сходится и ряд

$$b(z) = \sum_{T \neq T_0} \eta_T^{-k-1} e^{i\theta_T} \frac{1-|\alpha_T|^2}{(1-z\overline{\alpha}_T)^2} \quad ,$$

поэтому и функция $b(z)$ непрерывна в точке $1/\overline{\alpha}_{T_0}$, и

$$H(z) = \eta_{T_0}^{-k-1} e^{i\theta_{T_0}} \frac{1-|\alpha_{T_0}|^2}{(1-\overline{\alpha}_{T_0} z)^2} + b(z) \xrightarrow[z \to 1/\overline{\alpha}_{T_0}]{} \infty \quad ,$$

т.е. $H \not\equiv 0$.

Перейдем к проверке необходимой гладкости функции h. Соотношение $a \asymp b$ означает, что $c_1(\Gamma)\, a \leqslant b \leqslant c_2(\Gamma)$ с некоторыми постоянными $c_1(\Gamma) > 0$, $c_2(\Gamma) > 0$.

ЛЕММА I. Пусть $E_0 = E \cup \bigcup_{T \in \Gamma} \left\{ \frac{1}{\overline{\alpha}_T} \right\}$; тогда

$$dist\,(z, E_0) \geqslant const \cdot dist\,(z, E) . \qquad (12)$$

Доказательство см. [5].

ЛЕММА 2. При $k = 1, 2, \ldots$ справедливо

$$\left| H^{(k)}(\xi) \right| \leqslant c_k \frac{u(\xi)}{dist(\xi, E)^k} \quad , \quad \xi \in \mathbb{D} \ .$$

Доказательство получаем, дифференцируя (11^{I}) почленно, учитывая, что $\left| \xi - \frac{1}{\overline{\alpha}} \right| \geqslant dist\,(\xi, E_0)$, $\frac{1}{\overline{\alpha}} \in E_0$, и с учетом соотношения (12).

Следующая лемма является основой доказательства того, что для конечно порожденной фуксовой группы П рода справедливо соотношение $\log\, dist\,(\xi, E) \in BMO$ [6]. Доказательство ее получается внимательным анализом замощения круга последовательными образами фундаментального многоугольника и очень длинно, хотя и элементарно.

ЛЕММА 3. Пусть $I \subset \partial\mathbb{D}$, J - наибольшая из дуг $I \setminus E$ (или одна из таких). Тогда с некоторой постоянной c , зависящей только от Γ , выполняется

$$\left| \int_I \log dist(\xi, E)\, |d\xi| - |I| \log |J| \right| \leqslant c\, |I| \ ,$$

где под $|I|$, $|J|$ подразумевается длина дуги.

Далее положим $\xi_I = (1 - \frac{|I|}{2\pi})\, \xi_0$ для дуги I , серединой которой является точка ξ_0 .

ЛЕММА 4. Пусть $I\subset\partial\mathbb{D}$, $J\subset I$ – наибольшая из дуг $I\setminus E$ (или одна из таких). Тогда для некоторой постоянной c_4, зависящей только тот Γ, выполнено

$$\left|\int_I \log u(\xi)\,|d\xi| - |I|\log u(\xi_J)\right| \leqslant c_4|I|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, если $\sigma\in\partial\mathbb{D}\setminus E$ – какой-то дополнительный интервал, то в силу легко проверяемого соотношения

$$c_1\leqslant\frac{u(\xi_0)}{u(\xi)}\leqslant c\left(\frac{|\sigma|}{\operatorname{dist}(\xi,E)}\right)^2 \tag{13}$$

имеем

$$\left|\int_\sigma \log u(\xi)\,|d\xi| - \log u(\xi_\sigma)|\sigma|\right| \leqslant 2\int_\sigma \log\frac{|\sigma|}{\operatorname{dist}(\xi,E)}|d\xi| + c_2|\sigma| \leqslant c_3|\sigma|,$$

поэтому

$$\int_I \log u(\xi)\,|d\xi| = \sum_{\sigma\subset I}\log u(\xi_\sigma)|\sigma| + O(|I|). \tag{14}$$

Далее, элементарные неравенства влекут соотношение

$$c_1\left(\frac{|\sigma|}{|J|}\right)^2\leqslant\frac{u(\xi_J)}{u(\xi_\sigma)}\leqslant c_2\left(\frac{|J|}{|\sigma|}\right)^2,$$

что вместе с Леммой 3 дает

$$\sum_{\sigma\subset I}\log u(\xi_\sigma)|\sigma| = \sum_{\sigma\subset I}\log u(\xi_J)|\sigma| + \sum_{\sigma\subset I}\log\frac{u(\xi_\sigma)}{u(\xi_J)}|\sigma| =$$

$$= \log u(\xi_J)|I| + O\Big(\sum_{\sigma\subset I}\log\frac{|J|}{|\sigma|}\cdot|\sigma|\Big) = \log u(\xi_J)|I| + O(|I|),$$

а это вместе с (14) влечет (13).

ЛЕММА 5. Для $\xi\in\partial\mathbb{D}\setminus E$ имеем

$$u(\xi)\asymp\operatorname{dist}^{-1}(\xi,E).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi_0=(1-\operatorname{dist}(\xi,E))\xi$. Тогда с учетом (12) имеем $u(\xi)\asymp u(\xi_0)$. Далее,

$$u(\xi_0)=\sum_{T\in\Gamma}\frac{1-|\alpha_T|^2}{|1-\bar{\alpha}_1\xi_0|^2}=\int_{\mathbb{D}}\frac{d\nu(\alpha)}{|1-\bar{\xi}_0\alpha|^2},$$

где $d\nu(\alpha)=\sum\limits_{T\in\Gamma}(1-|\alpha_T|^2)\,\delta_{\alpha_T}$.

Несложно убедиться, что, если нуль не является эллиптической точкой группы Γ, то множество $\{\alpha_T^*\}_{T\in\Gamma}\overset{def}{=}\{T(0)\}_{T\in\Gamma}$ образует интерполяционное множество в круге $\mathbb{D}$. В самом деле, возьмем любую точку $\alpha_{T_0}^*$ и образуем

$$B(\alpha_{T_0}^*)=\prod_{\substack{T\in\Gamma\\T\neq T_0}}\left|\frac{\alpha_T^*-\alpha_{T_0}^*}{1-\alpha_T^*\bar{\alpha}_{T_0}^*}\right|\overset{def}{=}\prod_{T\neq T_0}\rho(\alpha_T^*,\alpha_{T_0}^*).$$

Учтем, что для любого отображения S круга $\mathbb{D}$ на себя имеем $\rho(S\alpha_T^*,S\alpha_{T_0}^*)=\rho(\alpha_T^*,\alpha_{T_0}^*)$. Полагая $S=T_0^{-1}$, имеем

$$B(\alpha_{T_0}^*)=\prod_{\substack{T\in\Gamma\\T\neq T_0}}\rho(T_0^{-1}\alpha_T^*,T_0^{-1}\alpha_{T_0}^*)=\prod_{\substack{T\in\Gamma\\T\neq T_0}}\rho(T_0^{-1}T(0),T_0^{-1}T_0(0))=\prod_{\substack{S=T_0^{-1}T\neq I\\S\in\Gamma}}\rho(\alpha_S^*,0)=B(0)>0,$$

что представляет собой условие Карлесона для интерполяционной последовательности $\{\alpha_T^*\}=\{\alpha_T\}$. Поэтому мера $d\nu$ – карлесонова, и

$$\int_{\mathbb{D}}\frac{d\nu(\alpha)}{|1-\bar{\xi}_0\alpha|^2}\leqslant c(\Gamma)\frac{1}{1-|\xi_0|}\asymp c(\Gamma)\,dist^{-1}(\xi,E)$$

а, значит,

$$u(\xi)\leqslant c(\Gamma)\,dist^{-1}(\xi,E).\tag{I5}$$

Пусть теперь $\xi_1\in E$ – ближайшая к ξ точка спектра. Тогда, поскольку Γ – конечно порожденная группа, ξ_1 – точка аппроксимации [7], гл.I0, а тогда существует точка $\alpha\in\{T^{-1}(0)\}_{T\in\Gamma}$ такая, что $|\alpha-\xi_1|\asymp 1-|\alpha|\asymp|\xi-\xi_1|$ и поэтому

$$u(\xi)\geqslant c\,dist^{-1}(\xi,E),\tag{I6}$$

что вместе с (I5) и доказывает лемму.

ЛЕММА 6. Справедливо соотношение

$$\log u(\xi)\in BMO.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную дугу $I \subset \partial\mathbb{D}$. Пусть $J \subset I$ – дуга максимальной длины в $I \setminus E$. Тогда (15) и (16) влекут соотношение

$$u(\xi) \geqslant c\,u(\xi_J), \quad \xi \in I,$$

где c – постоянная, не зависящая от I; поэтому

$$\int_I \left| \log \frac{u(\xi)}{u(\xi_J)} \right| |d\xi| \leqslant \int_I \log \frac{u(\xi)}{c\,u(\xi_J)}\, |d\xi| + |\log c|\, |I| \leqslant c' |I|$$

в соответствии с леммой 4. Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Пусть $\xi = e^{i\theta}$; тогда для $k \geqslant 1$ выполняются оценки

$$\left| \frac{\partial^k u(\xi)}{\partial \theta^k} \right| \leqslant c_k \operatorname{dist}^{-k-1}(\xi, E), \quad \xi \in \partial\mathbb{D}.$$

Доказательство следует из почленного дифференцирования формулы для $u(\xi)$ и применения леммы 5.

ЛЕММА 8. Пусть $z \in \mathbb{D}$, $z \neq 0$, $z_0 = \frac{z}{|z|}$, $I_z = \{\xi \in \partial\mathbb{D} : |\xi - z_0| \leqslant 1 - |z|\}$. Существует постоянная c, не зависящая от z, такая, что если $\max\limits_{\xi \in I_z} \operatorname{dist}(\xi, E) \geqslant 2(1-|z|)$, то

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \left| \log \frac{u(\xi)}{u(z_0)} \right| \frac{1-|z|^2}{|\xi - z|^2} |d\xi| \leqslant c.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку в силу леммы 5 $u(\xi) \asymp \operatorname{dist}^{-1}(\xi, E)$, $\xi \in \partial D$, то достаточно установить, что

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \left| \log \frac{\operatorname{dist}(\xi, E)}{\operatorname{dist}(z_0, E)} \right| \frac{1-|z|^2}{|\xi - z|^2} |d\xi| \leqslant \mathrm{const}. \tag{17}$$

Однако если учесть определение I_z и то, что $\max\limits_{\xi \in I_z} \operatorname{dist}(\xi, E) \geqslant 2(1-|z|)$, то можем записать

$$\log \operatorname{dist}(z_0, E) = \frac{1}{|I_z|} \int_{I_z} \log \operatorname{dist}(\xi, E) |d\xi| + O(1) \stackrel{def}{=} P_z + O(1)$$

и тогда, поскольку $\log \operatorname{dist}(\xi, E) \in BMO$ [6], имеем ([8], гл.6)

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \left| \log dist(\xi,E) - P_z \right| \frac{1-|z|^2}{|\xi-z|^2}\, |d\xi| \leqslant const ,$$

что дает (I7) и доказывает лемму.

ЛЕММА 9. Пусть $z\in\mathbb{D}$, $1-|z|\leqslant \frac{1}{2}\, dist(z,E)$. Тогда при $k\geqslant 2$ справедлива оценка

$$\left| \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\log u(\xi)}{(\xi-z)^k}\, d\xi \right| \leqslant c\, dist^{-k+1}(z,E) \ .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z_0 = \frac{z}{|z|}$. Положим

$$\mathcal{Z} = (1-dist(z_0,E))z_0 ,\quad \gamma=\{\xi\in\partial\mathbb{D} : |\xi-z_0|\leqslant\frac{1}{2}\, dist(z_0,E)\} .$$

Тогда имеем

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\log u(\xi)}{(\xi-z)^k}\, d\xi = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\log u(\xi)-\log u(z_0)}{(\xi-z)^k}\, d\xi =$$

$$=\int_{\gamma} \frac{\log u(\xi)-\log u(z_0)}{(\xi-z)^k}\, d\xi + \int_{\partial\mathbb{D}\setminus\gamma} \frac{\log u(\xi)-\log u(z_0)}{(\xi-z)^k}\, d\xi = I_1 + I_2 .$$

Оценка I : если положить для $\xi = e^{i\theta}$ и функции $v(\xi)=v(e^{i\theta})$

$$\frac{\partial v(\xi)}{\partial\xi}=\frac{1}{ie^{i\theta}}\,\frac{\partial v(e^{i\theta})}{\partial\theta} ,\qquad \frac{\partial^m v(\xi)}{\partial\xi^m}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial^{m-1}v(\xi)}{\partial\xi^{m-1}}\right) ,$$

то формула Тейлора дает (здесь $\xi=e^{i\theta}$, $z_0=e^{i\theta_0}$):

$$v(\xi) = v(z_0) + \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{\partial^\nu v(z_0)}{\partial\xi^\nu}(\xi-z_0)^\nu + R(\xi,z_0) ,$$

где

$$|R| \leqslant c_k \max_{\substack{t=e^{i\lambda}\\ \lambda\in(\theta,\theta_0)}} \left|\frac{\partial^k v(t)}{\partial t^k}\right| \cdot |\xi-z_0|^k .$$

Применяя эти соотношения к оценке I_1 для функции $v(\xi) = \log u(\xi)$ и учитывая, что для $\xi \in \gamma$ и любого ν справедливы (легко видеть по индукции из лемм 5 и 7) оценки

$$\left| \frac{\partial^\nu \log u(\xi)}{\partial \xi^\nu} \right| \leqslant c_\nu \operatorname{dist}^{-\nu}(\xi, E),$$

получим

$$|I_1| = \left| \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{\partial^\nu \log u(z_0)}{\partial \xi^\nu} \int_\gamma \frac{d\xi}{(\xi - z)^{k-\nu}} + \int_\gamma \frac{R(\xi, z_0)}{(\xi - z)^k} d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{k-1} c_\nu \operatorname{dist}^{-\nu}(z_0, E) \cdot \operatorname{dist}^{-k+\nu+1}(z_0, E) + c_k \operatorname{dist}^{-k}(z_0, E) \cdot \int_\gamma |d\xi| \leqslant \tag{18}$$

$$\leqslant c \operatorname{dist}^{-k+1}(z_0, E).$$

Далее,

$$\left| \int_{\partial D \setminus \gamma} \frac{\log u(\xi) - \log u(z_0)}{(\xi - z)^k} d\xi \right| \leqslant c \int_{\partial D \setminus \gamma} \frac{|\log u(\xi) - \log u(z_0)|}{|\xi - \tilde{z}|^k} |d\xi| \leqslant$$

$$\leqslant c \left[\int_{\partial D \setminus \gamma} \frac{|\log u(\xi) - p_{\tilde{z}}|}{|\xi - \tilde{z}|^2} |d\xi| + \int_{\partial D} \frac{|p_{\tilde{z}} - \log u(z_0)|}{|\xi - \tilde{z}|^2} |d\xi| \right] \cdot \operatorname{dist}^{-k+2}(z_0, E),$$

где

$$p_{\tilde{z}} = \frac{1}{|\gamma|} \int_\gamma \log u(\xi) |d\xi| .$$

Учитывая, как при доказательстве леммы 8, что $p_{\tilde{z}} = \log u(z_0) + O(1)$, находим, что

$$\int_{\partial D \setminus \gamma} \frac{|p_{\tilde{z}} - \log u(z_0)|}{|\xi - \tilde{z}|^2} |d\xi| \leqslant c \operatorname{dist}^{-1}(z_0, E) \asymp \operatorname{dist}^{-1}(z, E).$$

Поскольку $\log u \in BMO$, то получим [8, гл.6]

$$\int\limits_{\partial D\setminus\gamma} \frac{|\log u(\xi)-p_{\tilde z}|}{|\xi-\tilde z|^2}|d\xi| \leqslant \frac{1}{1-|\tilde z|^2}\int\limits_{\partial D}\frac{1-|\tilde z|^2}{|\xi-\tilde z|^2}\left|\log u(\xi)-p_{\tilde z}\right||d\xi| \leqslant \tag{19}$$

$$\leqslant \frac{c}{1-|\tilde z|^2} \leqslant c\, dist^{-1}(z,E).$$

Соотношения (18) и (19) доказывают лемму.

ЛЕММА 10. Пусть внешняя функция $W(z)$ определена в (5^{I}), $\lambda(z)=\frac{1}{W(z)}$, точка $z\in D$, $z\neq 0$, $z_0=\frac{z}{|z|}$, $1-|z|\geqslant a\, dist(z_0,E)$. Тогда для $k\geqslant 0$ справедливы оценки

$$|\lambda^{(k)}(z)| \leqslant c_k(a)\, dist^{-k+1}(z,E).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $k=0$ следует из леммы 5 в [4] и того, что в силу условия, (5^{I}) и леммы 5 имеем

$$|\lambda(\xi)| \leqslant c_1(a)\, dist(\xi,E), \quad \xi\in\partial D.$$

Если $k\geqslant 1$, то для $\tau=\{\xi: |\xi-z|=\frac{1}{2}(1-|z|)\}$ из формулы Коши получим

$$|\lambda^{(k)}(z)|=\left|\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{\tau}\frac{\lambda(\xi)}{(\xi-z)^{k+1}}d\xi\right| \leqslant c(a)dist(z,E)\cdot c_k(a)\cdot dist^{-k}(z,E),$$

что и требовалось.

ЛЕММА 11. В обозначениях леммы 10 при $1-|z|\leqslant\frac{1}{20}dist(z_0,E)$ имеем

$$|\lambda^{(k)}(z)| \leqslant c_k\, dist^{-k+1}(z,E).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $k=0$ получается из леммы 8 и 5:

$$|\lambda(z)| = exp\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D}\log\frac{1}{u(\xi)}\,\frac{1-|z|^2}{|\xi-z|^2}|d\xi| = const\cdot\frac{1}{u(z_0)} = \tag{20}$$

$$= const\cdot dist(z,E).$$

При изучении случая $k\geqslant 1$ используем формулу Фаа ди Бруно, полагая $\lambda(z)=e^{-\varphi(z)}$:

$$\lambda^{(k)}(z) = \sum c_{\alpha_1,\dots,\alpha_m}\varphi^{(\alpha_1)}\dots\varphi^{(\alpha_m)}e^{-\varphi} \tag{21}$$

с некоторым постоянным $c_{\alpha_1,\dots\alpha_m}$, причем в этой сумме имеем

$$\alpha_1+\dots+\alpha_m = k .$$

Далее, из леммы 9 получим при наших условиях

$$|\varphi^{(\alpha)}(z)| \leqslant c_\alpha \operatorname{dist}^{-\alpha}(z,E) ,$$

что вместе с (20) и (21) и доказывает лемму.

Закончим теперь доказательство теоремы 2. Используя леммы 2, 5, 7, 10 и 11 и формулу Лейбница, получим (напомним, что $h(z)=H(z)\lambda^{k+1}(z)$, функция $H(z)$ определена в (9^{I}):

$$|h^{(k)}(z)| = \left|\Big(H(z)\underbrace{\lambda(z)\dots\lambda(z)}_{k+1}\Big)^{(k)}\right| =$$

$$=\left|\sum_{\mu+\nu_1+\dots+\nu_{k+1}=k} \frac{k!}{\mu!\,\nu_1!\dots\nu_{k+1}!} H^{(\mu)}(z)\lambda^{(\nu_1)}(z)\dots\lambda^{(\nu_{k+1})}(z)\right| \leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{\mu+\nu_1+\dots+\nu_{k+1}=k} (\operatorname{dist}(z,E))^{-\mu-1+(1-\nu_1)+\dots+(1-\nu_{k+1})} = c_1 ,$$

что и заканчивает доказательство теоремы.

Литература

1. Lehner J. Discontinuous groups and automorphic functions. - In: Math.surveys, VIII. Providence: Amer.Math.Soc,1964.
2. Pommerenke Ch. On automorphic forms and Carleson sets. - Mich.Math.J., 1976, v.23, N 2, p.129-136.
3. Daase D. Automorphe Formen und Carleson-Mengen. - Compl.Var.Theory Appl., 1983, B.2, N 1, S.51-65.
4. Shirokov N.A. Division and multiplication by inner functions in spaces of analytic functions smooth up to the boundary. - Lecture Notes in Math., 1981, v.864, p.413-439.
5. Широков Н.А. Замечание о фуксовых группах. - В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. XV. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.149), с.181-186.
6. Широков Н.А. Фуксовы группы с карлесоновским предельным множеством. - Функц.анализ и его приложения, 1990, т.24, № 4, с.92-93.
7. Бердон А. Геометрия дискретных групп. - М., Наука, 1986.
8. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. - М., Мир, 1984.

See p.176 for Summary