

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

B. S. Bychkov, V. A. Dremov, E. M. Epifanov, The computation of Belyi pairs of 6-edged dessins d'enfants of genus 3 with symmetries of order 2,  
*Fundam. Prikl. Mat.*, 2013, Volume 18, Issue 6, 77–89

<https://www.mathnet.ru/eng/fpm1553>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.89

April 19, 2025, 20:19:31



# Вычисление пар Белого шестирёберных рисунков рода 3 с группой автоморфизмов порядка 2

**Б. С. БЫЧКОВ**

Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики»  
e-mail: bbychkov57@yandex.ru

**В. А. ДРЁМОВ**

ООО «Яндекс»  
e-mail: dremov@mccme.ru

**Е. М. ЕПИФАНОВ**

ГОУ ЦО № 57  
e-mail: eepifanov57@gmail.com

УДК 512.772

**Ключевые слова:** теория детских рисунков Гротендика, пары Белого.

## Аннотация

В статье перечислены все шестирёберные рисунки рода 3 с единственной вершиной, имеющие группу автоморфизмов порядка 2. Для каждого из них вычислена пара Белого.

## Abstract

*B. S. Bychkov, V. A. Dremov, E. M. Epifanov, The computation of Belyi pairs of 6-edged dessins d'enfants of genus 3 with symmetries of order 2, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 6, pp. 77–89.*

In this article, we present all six-edged dessins d'enfants of genus 3 with only one vertex that have a symmetry of order 2. For each of them the Belyi pair is computed.

## 1. Введение

В работе рассматриваются шестирёберные *детские рисунки* (см. [9]) рода 3 с единственной вершиной. Они получаются в результате склеек двенадцатиугольников, таких что из склеенной поверхности нельзя вырезать лист Мёбиуса. Здесь и далее под склейкой понимается отождествление пар сторон многоугольника. При этом если каждой паре склеиваемых сторон приписать какую-нибудь букву (для разных пар выберем различные буквы), то каждой склейке будет соответствовать *гауссово слово*. Если зафиксировать начальную сторону и направление обхода (например, против хода часовой стрелки), то

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2013, том 18, № 6, с. 77–89.

© 2013 Центр новых информационных технологий МГУ,  
Издательский дом «Открытые системы»

каждой склейке будет соответствовать единственное слово и разным склейкам будут соответствовать разные слова. В результате такого склеивания получается компактная ориентированная поверхность без края (см. [6]); граф получается как след от границы двенадцатиугольника, если при этом считать, что вершины многоугольника перейдут в чёрные вершины графа, а «середины сторон» — в белые, то граф будет двукрашенным. Всего таких склеек 131, полный список склеек и соответствующих слов получен в [4, приложение 2] и независимо в [5].

Работа посвящена  $\mathbb{Z}_2$ -симметричным рисункам рода 3 с единственной вершиной. Главным результатом работы является нахождение пар Белого всех таких рисунков.

Отметим, что согласно [2] группа автоморфизмов циклическая. Таким образом, учитывая [3], где перечислены и найдены пары Белого рисунков с группами автоморфизмов порядка больше 3, вычислены пары Белого всех рисунков с нетривиальными группами автоморфизмов.

Разделы 1 и 2 вводные, в разделе 3 перечислены все  $\mathbb{Z}_2$ -симметричные рисунки рода 3 с единственной вершиной. В разделе 4 сформулирован основной результат данной работы. В последнем, пятом разделе приведено подробное доказательство полученных результатов.

Авторы выражают глубокую благодарность профессору Г. Б. Шабату за конструктивные замечания и постоянное внимание к работе и Н. М. Адрианову, которому принадлежит идея применённого в данной работе метода.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 07-01-00441-а.

## 2. Определения и обозначения

Следуя [2, 10], дадим следующие определения.

**Определение 2.1.** *Детский рисунок* (часто мы будем называть его просто *рисунком*) — это пара  $(X, \Gamma)$ , где  $X$  — компактная ориентированная поверхность без края,  $\Gamma$  — граф, вложенный в  $X$  так, что дополнение  $X \setminus \Gamma$  гомеоморфно несвязному объединению открытых дисков.

**Определение 2.2.** Пусть дана алгебраическая кривая  $\mathcal{X}$  над  $\mathbb{C}$ . Функция  $\beta$  на  $\mathcal{X}$  называется *функцией Белого*, если определяемое ей накрытие  $\beta: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  не разветвлено вне множества  $\{0, 1, \infty\}$ . Пара  $(\mathcal{X}, \beta)$  называется *парой Белого*.

**Определение 2.3.** *Морфизмом*  $\mu$  пар Белого  $(\mathcal{X}_1, \beta_1)$  и  $(\mathcal{X}_2, \beta_2)$  называется морфизм алгебраических кривых  $\mu: \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_2$ , делающий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\mu} & X_2 \\ & \searrow \beta_1 & \swarrow \beta_2 \\ & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \end{array}$$

коммутативной.

**Определение 2.4.** Пары Белого вместе с морфизмами из определения 2.3 образуют *категорию пар Белого*. Все необходимые утверждения и доказательства можно найти в [7].

Каждому рисунку взаимно-однозначно ставится в соответствие пара Белого как прообраз отрезка  $[0, 1]$  при отображении  $\beta$  (см. [1, 2]).

**Определение 2.5.** Функция Белого называется *чистой*, если все её ветвления над 1 ровно двукратны.

**Определение 2.6.** Множество чистых пар Белого с морфизмами из определения 2.3 образует *категорию чистых пар Белого над полем  $\mathbb{C}$*  (см. [7]).

Категория чистых пар Белого является полной подкатегорией категории пар Белого над  $\mathbb{C}$ .

**Определение 2.7.** *Универсальной группой вращений рёбер  $ER$*  назовём свободную группу  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$  с двумя образующими  $a$  и  $b$ .

Определим действие универсальной группы вращений рёбер на множестве рёбер  $E(D)$  рисунка  $D$  следующим образом: для каждого  $e \in E(D)$   $a(e)$  — это следующее ребро при повороте против часовой стрелки вокруг белой вершины,  $b(e)$  — следующее ребро при повороте вокруг чёрной вершины. Таким образом задаётся гомоморфизм  $\pi_D: ER \rightarrow \text{Aut}(E(D))$ , где  $\text{Aut}(E(D))$  — множество всех перестановок рёбер рисунка  $D$ .

**Определение 2.8.** Группа перестановок  $\pi_D(ER)$  рёбер рисунка  $D$  называется *группой вращений рёбер рисунка  $D$*  и обозначается  $ER(D)$ .

Говоря категорным языком, определён функтор из категории рисунков в категорию конечных однородных  $ER$ -множеств (подробнее см. в [1]).

**Обозначение 2.9.** Обозначим следующие торические рисунки (т. е. рисунки с отождествлёнными противоположными сторонами) через  $T_1, T_2, T_3$ .

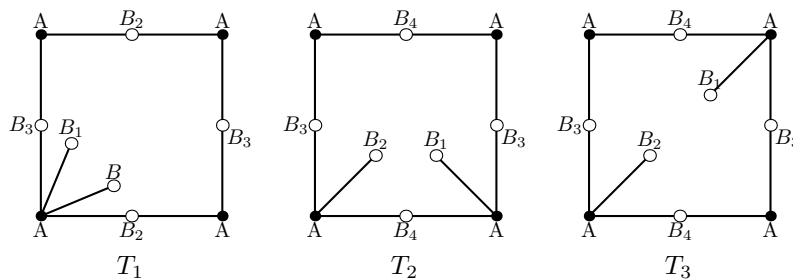


Рис. 2.1

Рассмотрим фактор детского рисунка  $D$  по группе автоморфизмов  $G$ , не обязательно состоящей из всех автоморфизмов. В [3] сформулировано и доказано следующее утверждение.

**Утверждение 2.10.** Для любого детского рисунка  $D$  и любой группы его автоморфизмов  $G$  (не обязательно состоящей из всех автоморфизмов) существует морфизм  $u: D \rightarrow F$  ( $F := D/G$ ), для которого выполняются следующие условия:

- 1) для любого рисунка  $H$  и для любых морфизмов  $f, g$  из  $F$  в  $H$  из равенства  $f \circ u = g \circ u$  следует  $f = g$  ( $u$  — эпиморфизм);
- 2) для любого  $g \in G$  выполняется  $u \circ g = u$  ( $u$  согласован с морфизмами группы);
- 3) для любого рисунка  $H$  и для любого морфизма  $u': D \rightarrow H$ , удовлетворяющего условию 2), существует такой морфизм  $u'': F \rightarrow H$ , что  $u' = u'' \circ u$ .

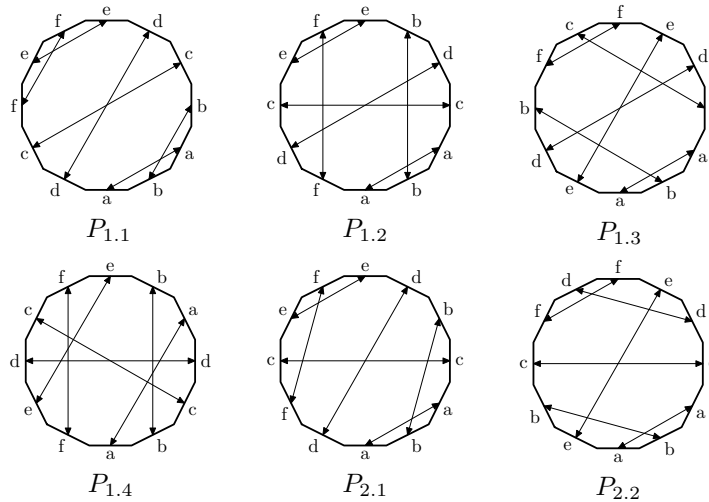
**Определение 2.11.** Из утверждения 2.10 следует, что фактор рисунка по группе автоморфизмов действительно является рисунком. Будем называть его *фактор-рисунком*.

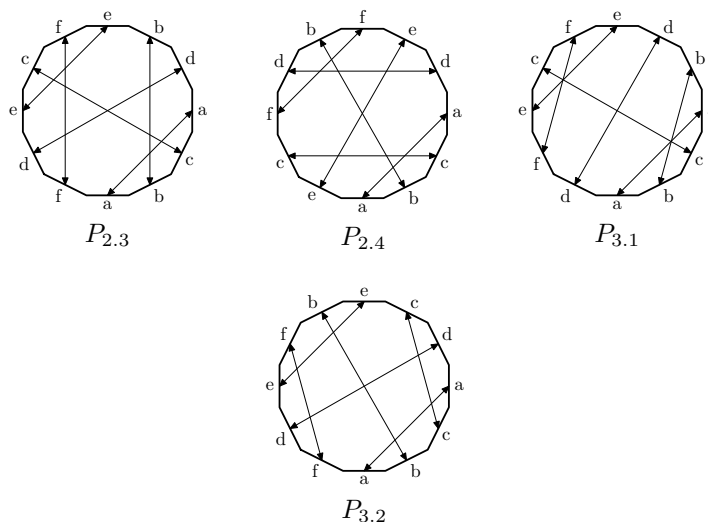
### 3. Рисунки рода 3 с группой автоморфизмов второго порядка

Перейдём к основному объекту данной работы: двенадцатирёберным склейкам рода 3 с единственной вершиной, обладающим группой автоморфизмов второго порядка. Перечислим их, основываясь на [4].

Заметим, что если рисунок  $D$  имеет автоморфизм второго порядка, т. е.  $\text{Aut}(D) = \mathbb{Z}_2$ , то склейка правильного 12-угольника инвариантна относительно поворота на  $\pi$ , а гауссово слово  $W$  рисунка  $D$  с точностью до переименования букв 6-периодично (т. е. если на местах  $i, j$  стоят одинаковые буквы, то одинаковые буквы стоят и на местах  $i + 6 \pmod{12}, j + 6 \pmod{12}$ )).

**Теорема 3.1.** Существует ровно десять склеек с инволюцией.





**Доказательство.** Пусть на местах  $i$  и  $j$  ( $i < j$ ) в гауссовом слове  $W$  стоит буква  $a$ . Так как слово 6-периодично, то  $j - i \leq 6$ . Случай, когда  $|i - j| = 6$  и в  $W$  нет пары одинаковых букв, расположенных ближе друг к другу, разобран в [4]. Поэтому считаем, что  $j - i < 6$ . Заметим, что равенство  $|i - j| = 5$  не может выполняться, так как в этом случае  $W = a * * * * ab * * * * b$ , а у этой склейки не меньше двух вершин. Поэтому  $|i - j| < 5$ . Рассмотрим оставшиеся случаи.

1. Пусть  $j - i = 2$ . Тогда слово имеет вид  $a * a * * * b * b * * *$ . Предположим, что другая буква,  $c$ , стоит на местах  $k, l$ .

Пусть  $|k - l| = 2$ . Тогда  $W = acac * * bdbd * *$ , и далее получаем единственную возможность —  $acacefdbdbdef$ ,  $P_{1.1}$ .

Если  $|k - l| = 3$ , то единственная возможность  $acaecfdbbedf$ ,  $P_{2.1}$ . Однако заметим, что у этой склейки нет зеркальной симметрии относительно главных диагоналей 12-угольника, следовательно, нашим условиям удовлетворяет зеркально-симметричная ей склейка с гауссовым словом  $W = acafdebdbfce$ ,  $P_{2.2}$ .

Если  $|k - l| = 4$ , то аналогично предыдущему случаю получаем две симметричные относительно главной диагонали склейки, соответствующие словам  $acae fcbdbef d$ ,  $P_{1.2}$ , и  $abacde fcf bde$ ,  $P_{1.3}$ .

2. Пусть  $j - i = 3$ . Для значения  $|k - l|$  остаётся две возможности: 3 и 4.

Если  $|k - l| = 3$ , то слово имеет вид  $ac * ac * bd * bd * = aceacf bde bdf$  и соответствует  $P_{3.1}$  или вид  $a * ca * cb * db * d = aeca fcb ed bfd$  и соответствует  $P_{3.2}$ .

Если  $|k - l| = 4$ , то слово имеет вид  $ac * a * cbd * b * d = acea fcb de bfd$  и соответствует  $P_{2.3}$ . Опять же заметим, что эта склейка не является зеркально-симметричной относительно главных диагоналей, и следовательно, получаем ещё одно гауссово слово,  $abcade f bdf ce$ ,  $P_{2.4}$ .

3. Пусть  $j - i = 4$ . Тогда, исключая из рассмотрения уже полученные слова, приходим к  $abcdabefcdef$ ,  $P_{1.4}$ .

Перечислены все склейки 12-угольника рода 3 с единственной вершиной и с автоморфизмом порядка 2.  $\square$

## 4. Основная теорема

Нетрудно показать, что фактор-рисунок каждого из полученных в предыдущем разделе рисунков — это один из рисунков  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ . Таким образом, десять рисунков  $P_{i,j}$  естественным образом делятся на три группы (в одну группу попадают рисунки с одинаковым фактором). Результаты сгруппированы в три пункта теоремы.

### Теорема 4.1.

1. Пара Белого рисунка  $P_{1.1}$  — это функция Белого

$$\beta = -\frac{1}{8}z^6 + \frac{3}{4}z^5 - \frac{9}{8}z^4 + 1 + y \left( \frac{1}{8}z^4 - \frac{5}{8}z^3 + \frac{3}{4}z^2 \right) \quad (4.1)$$

на кривой

$$y^2 = (z+1)(z^3 - 3z^2 - 4), \quad w^2 = z - 3.$$

Пары Белого рисунков  $P_{1.2}$ ,  $P_{1.3}$ ,  $P_{1.4}$  — это выраженная той же формулой функция Белого на кривых

$$y^2 = (z+1)(z^3 - 3z^2 - 4), \quad w^2 = f_i, \quad i = 2, 3, 4, \quad f_{2,3,4} = (z-3)(z+1)(z-\alpha),$$

где  $\alpha^3 - 3\alpha^2 - 4 = 0$ .

2. Пары Белого рисунков  $P_{2.1}$ ,  $P_{2.2}$ ,  $P_{2.3}$ ,  $P_{2.4}$  — это функция Белого

$$\beta = -1 - \frac{135}{8}z^6 + \frac{81}{4}z^5 - \frac{135}{8}z^4 - \frac{9}{8}z^4y - \frac{3}{4}z^2y + \frac{9}{8}z^3y \quad (4.2)$$

на кривых

$$y^2 = 225z^4 - 90z^3 + 69z^2 + 108z + 60, \quad w^2 = \left( \pm y + \frac{15}{4}z^2 - \frac{9}{2}z + \frac{15}{4} \right) (z-\alpha),$$

где  $5\alpha^2 - 6\alpha + 5 = 0$ .

3. Пары Белого рисунков  $P_{3.1}$  и  $P_{3.2}$  — это функция

$$\beta = z^3$$

на кривой

$$y^2 = \frac{z}{3}(z^2 + z + 1), \quad w^2 = (y+z)(z-1)$$

и функция

$$\beta = z^3$$

на кривой

$$y^2 = -z(z^2 + z + 1), \quad w^2 = (y+z)(z-1).$$

### 5. Доказательство основной теоремы

**Утверждение 5.1.** *Существует алгебраическое накрытие*

$$p_{1.1}: \mathcal{X}_{i,j} \rightarrow \widetilde{\mathcal{X}}_{i,j} \tag{5.1}$$

степени 2, разветвлённое над четырьмя точками, где  $\mathcal{X}_{i,j}$  — кривая рисунка  $P_{i,j}$  и  $\widetilde{\mathcal{X}}_{i,j}$  — кривая рисунка  $T_i$  рода 1.

При факторизации по группе автоморфизмов второго порядка происходит склеивание противоположных сторон 12-угольника. При этом каждое ребро «ломается в середине» (потому что стороны мы считаем ориентированными) и его половинки склеиваются в одно ребро. На рис. 5.1 изображён фактор-рисунок рисунка  $P_{1.1}$ . Это двукрашенный рисунок на кривой рода 1. Отметим, что это и есть рисунок  $T_1$ ,  $A, B, B_1$  и центр грани рисунка  $C$  — это точки ветвления накрытия  $p_{1.1}$ .

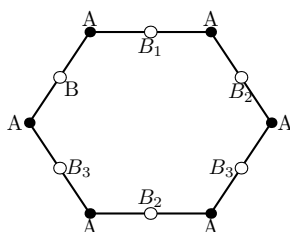


Рис. 5.1

Аналогично строятся фактор-рисунки (совпадающие с  $T_1, T_2, T_3$ ) остальных девяти рисунков с группой автоморфизмов второго порядка.

**Утверждение 5.2.** *Существует отображение кривой рода 1 на кривую рода 0, являющееся композицией  $p_2 \circ f \circ g$ , где  $f(t) = (4t)/(t + 1)^2$ ,  $g(t) = 1/t$  и  $p_2$  — это двулистное накрытие, разветвлённое в четырёх точках.*

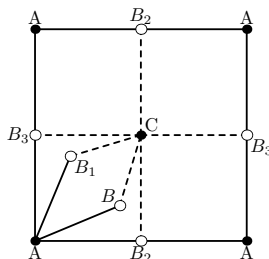


Рис. 5.2.  $\hat{T}_1$



**Доказательство.** Отображение кривых  $g$  соответствует переходу к объединению рисунка с двойственным к нему рисунком. В частности, для  $T_1$  полученный рисунок изображён на рис. 5.2.

Отображение  $f$  соответствует переходу к двойственному рисунку  $ST_1$  (рис. 5.3), так как нули  $\hat{T}_1$  переходят в точки бесконечность  $ST_1$  и наоборот.

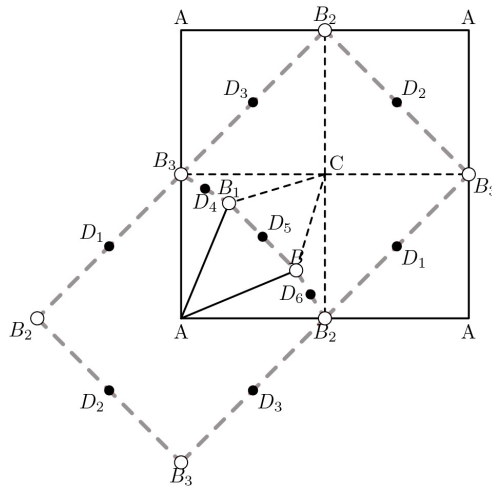


Рис. 5.3. Рисунок  $ST_1$ , двойственный к  $\hat{T}_1$

Заметим, что группа автоморфизмов  $ST_1$  равна  $\mathbb{Z}_2$ , следовательно, можно рассмотреть фактор-рисунок (рис. 5.4).

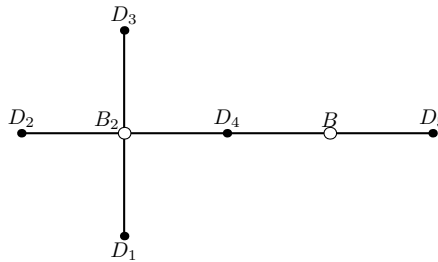


Рис. 5.4

Отображение факторизации — двулистное накрытие, разветвлённое в точках  $D_1, D_2, D_3$  и  $D_5$ , — это и есть  $p_2$ .  $\square$

**Следствие 5.3.** Функция Белого  $\beta_i$  рисунка  $T_i$  есть композиция  $f \circ g \circ \beta_{si}$ , где  $\beta_{si}$  — это функция Белого рисунка  $ST_i$ .

**Замечание 5.4.** Формула для функции Белого  $\beta_{i,j}$  рисунка  $P_{i,j}$  во всех девяти случаях совпадает с формулой для  $\beta_i$ .

Далее приведены вычисления всех десяти пар Белого рисунков  $P_{i,j}$ .

**Утверждение 5.5.**  $z^4(z-3)^2$  — обобщённый многочлен Чебышёва рисунка, изображённого на рис. 5.4.

**Утверждение 5.6.** Пара Белого рисунка  $ST_1$  — это функция Белого

$$\beta_{s1} = 1 - \frac{1}{16}z^4(z-3)^2$$

на кривой  $y^2 = z^4 - 2z^3 - 3z^2 - 4z - 4$ .

**Замечание 5.7.** Результаты утверждений 5.5 и 5.6 совпадают с результатами в [8].

**Доказательство.** Формула для функции Белого сразу получается из условия на критические значения функции Белого (см. определение 2.2). Далее,  $z^4(z-3)^2 - 16 = (z-2)^2 P_4(z)$ , где значение 2 как раз соответствует вершине  $D_4$  валентности 2. Отсюда следует, что

$$P_4(z) = z^4 - 2z^3 - 3z^2 - 4z - 4 = y^2. \quad \square$$

**Утверждение 5.8.**

$$\beta_1 = -\frac{1}{8}z^6 + \frac{3}{4}z^5 - \frac{9}{8}z^4 + 1 + y \left( \frac{1}{8}z^4 - \frac{5}{8}z^3 + \frac{3}{4}z^2 \right).$$

**Доказательство.** Обозначим через  $\beta_{\hat{T}_1}$  функцию Белого рисунка  $\hat{T}_1$  (см. рис. 5.2). Тогда из утверждений 5.1 и 5.2 получаем, что

$$\beta_{\hat{T}_1} = \frac{4\beta_1}{(\beta_1 + 1)^2} = \frac{1}{\beta_{s1}}.$$

Таким образом, получаем уравнение на  $\beta_1$ :

$$(\beta_1 + 1)^2 = 4\beta_1\beta_{s1}.$$

Решая его, получаем функцию

$$\beta_1 = -\frac{1}{8}z^6 + \frac{3}{4}z^5 - \frac{9}{8}z^4 + 1 + y \left( \frac{1}{8}z^4 - \frac{5}{8}z^3 + \frac{3}{4}z^2 \right). \quad \square$$

Рассмотрим накрытие  $p_{1,1}$  (см. (5.1)) в случае рисунка  $P_{1,1}$ . Оно имеет вид  $(z, w) \rightarrow z, w^2 \mapsto f$ . Дивизор функции  $f$  равен

$$(f) = A + C + B + B_1 + 2D. \quad (5.2)$$

Функция  $f$  определена с точностью до умножения на квадрат,  $\deg(D) = -2$ . Дивизор  $D$  может быть представлен в виде

$$(D) = -2A - 2C + T + X, \quad (5.3)$$

где  $y(T) = 0, z(T) = -1, X$  — некоторая точка. Заметим, что точки ветвления  $A$  и  $C$  находятся в бесконечности, а  $B$  и  $B_2$  — в  $z = 3$ .

**Утверждение 5.9.** Либо  $w^2 = f_1 = z - 3$ , либо  $w^2 = f_i = (z - 3)(z + 1)(z - \alpha)$ , где  $\alpha^3 - 3\alpha^2 - 4 = 0$ ,  $i = 2, 3, 4$ .

**Доказательство.** Используя (5.2) и (5.3), мы можем представить дивизор функции  $f$  в виде

$$(f) = -3A - 3C + B_1 + B_2 + 2T + 2X.$$

Далее,  $(z - 3) = B + B_1 - A - C$  и  $(z + 1) = 2T - A - C$ . Следовательно,

$$\left( \frac{f}{(z - 3)(z + 1)} \right) = -A - C + 2X.$$

Но такие функции есть просто  $z - z_j$ , где  $z_j$  — корень уравнения

$$z^4 - 2z^3 - 3z^2 - 4z - 4 = 0.$$

Получаем либо  $f_1 = z - 3$ , либо  $f_{2,3,4} = (z - 3)(z + 1)(z - \alpha)$ , где  $\alpha^3 - 3\alpha^2 - 4 = 0$ .  $\square$

Таким образом, получены четыре кривые рода 3, которые соответствуют четырём рисункам  $P_{1.1}$ ,  $P_{1.2}$ ,  $P_{1.3}$ ,  $P_{1.4}$ . Заметим, что у рисунков  $P_{1.2}$ ,  $P_{1.3}$ ,  $P_{1.4}$  одинаковый порядок группы вращений ребёр, равный 1152, и следовательно (см. [1]), они лежат в одной орбите действия группы Галуа  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  и им соответствуют решения  $f_{2,3,4}$ . Таким образом, доказан первый пункт теоремы 4.1.

Рассмотрим рисунки  $P_{2.1}$ ,  $P_{2.2}$ ,  $P_{2.3}$ ,  $P_{2.4}$  и их фактор-рисунок  $T_2$ .

Отображение факторизации с фактор-рисуном  $T_2$  также можно понимать как алгебраическое накрытие  $p_{2.1}$  степени 2:  $(z, w) \rightarrow z$ ,  $w^2 \mapsto f$ , разветвлённое в точках  $A$ ,  $C$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ , где  $C$  — это бесконечно удалённая точка.

Применив утверждения 5.1 и 5.2, получим рисунок  $ST_2$  (рис. 5.5).

После факторизации по автоморфизму второго порядка получаем рисунок рода 0 (рис. 5.6).

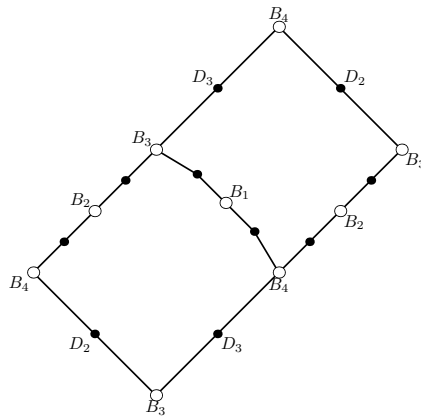


Рис. 5.5.  $ST_2$

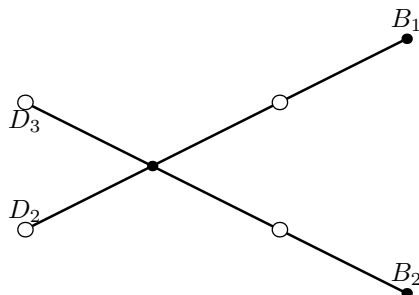


Рис. 5.6

Это отображение факторизации можно понимать как алгебраическое накрытие степени 2, разветвлённое в точках  $B_1, B_2, D_2, D_3$ . Можно считать, что обобщённый многочлен Чебышёва полученного дерева — это многочлен

$$P(z) = z^4(z - (a + i))(z - (a - i)) = z^4((z - a)^2 + 1).$$

Коэффициенты многочлена должны быть рациональны, и единственное  $a$ , удовлетворяющее такому условию, — это

$$a = \pm \frac{3}{4}.$$

**Утверждение 5.10.** Пара Белого рисунка  $ST_2$  — это функция

$$\beta_{s2} = -\frac{27}{16}z^4(5z^2 - 6z + 5)$$

на кривой

$$y^2 = 225z^4 - 90z^3 + 69z^2 + 108z + 60.$$

**Доказательство.** Формула для функции Белого сразу получается из условия на критические значения функции Белого (см. определение 2.2):

$$\beta_{s2} - 1 = -\frac{1}{16}(15z^2 + 12z + 4)(3z^2 - 3z + 2)^2,$$

следовательно,

$$y^2 = 3(5z^2 - 6z + 5)(15z^2 + 12z + 4). \quad \square$$

Аналогично предыдущему случаю получаем уравнение на функцию Белого  $\beta_2$  рисунка  $T_2$ :

$$\beta_2^2 + 2\beta_2(1 - 2\beta_{s2}) + 1.$$

Решая его, получаем

$$\beta_{T_2} = -1 - \frac{135}{8}z^6 + \frac{81}{4}z^5 - \frac{135}{8}z^4 - \frac{9}{8}z^4y - \frac{3}{4}z^2y + \frac{9}{8}z^3y. \quad (5.4)$$

Как уже отмечалось, накрытие  $p_{2,1}$  имеет вид  $w^2 = f$ , где функция  $f$  определена с точностью до умножения на квадрат и дивизор функции  $f$  равен

$$(f) = A + C + B_1 + B_2 + 2D,$$

где  $\deg(D) = -2$ , причём дивизор  $D$  можно представить в виде

$$(D) = -2A - 2C + B_1 + X.$$

Введём функцию  $g$ , такую что дивизор  $(g)$  удовлетворяет условию

$$(f) = (z - z(B_1))(g).$$

Тогда  $g = y + kQ(z)$ , где  $Q(z) = (z - z(B_1))(z - z(B_2))$ . Находим  $k$  из условия равенства нулю дискриминанта уравнения  $(y + kQ(z))(-y + kQ(z)) = 0$ :

$$k = \pm \frac{3}{4}.$$

Соответственно

$$g_1 = y + \frac{15}{4}z^2 - \frac{9}{2}z + \frac{15}{4}, \quad g_2 = y - \frac{15}{4}z^2 + \frac{9}{2}z - \frac{15}{4}.$$

Таким образом, получается четыре варианта для функции  $f$ :  $f_{1,2,3,4} = g_{1,2}\alpha_{1,2}$ , где  $\alpha_{1,2}$  — корни уравнения  $5x^2 - 6x + 5 = 0$ , что доказывает пункт 2 теоремы 4.1.

Перейдём к рисункам  $P_{3,1}$ ,  $P_{3,2}$  и их фактор-рисунку  $T_3$ .

Заметим, что сам  $T_3$  обладает  $\mathbb{Z}_2$ -симметрией, и следовательно, по тем же причинам, что и в предыдущих случаях, можем рассмотреть факторизацию по группе автоморфизмов  $\mathbb{Z}_2$ . Это алгебраическое накрытие степени 2, разветвлённое в точках  $A$ ,  $B_3$ ,  $B_4$  и в точке  $C$  (центре грани квадрата, см. рис. 2.1). Фактор-рисунком является «ёж» с тремя рёбрами. Его обобщённым многочленом Чебышёва является многочлен  $P(z) = z^3$ .

Как уже отмечалось, алгебраическое накрытие степени 2, разветвлённое в точках  $A$ ,  $C$ ,  $B_1$  и  $B_2$  (см. рис. 2.1), при котором  $P_{3,1}$  или  $P_{3,2}$  накрывает  $T_3$ , имеет вид

$$(z, w) \rightarrow z, \quad w^2 \mapsto f,$$

где дивизор функции  $f$  равен

$$(f) = A + C + B_1 + B_2 + 2D.$$

Кратности точек  $A$ ,  $C$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  равны 1,  $\deg(D) = -2$ . Можно считать, что  $D = X - 3C$ . Тогда

$$(f) = A + B_1 + B_2 + 2X - 5C.$$

Из топологических соображений видно, что

$$(z - 1) = B_1 + B_2 - 2C.$$

Введём функцию

$$g = \frac{f}{z - 1}.$$

Тогда  $(g) = A + 2X - 3C$ . Исходя из общей теории, можно записать  $g$  в виде  $g = y + P(z)$ , где  $\deg(P) = 1$ , т. е.  $g = y + kz + l$ . Значение  $g$  в точке  $A$  равно 0, но  $z(A) = y(A) = 0$ , следовательно,  $l = 0$ . Найдём  $k$ . Для этого потребуем равенства нулю дискриминанта уравнения  $(y + kz)(-y + kz) = 0$ . Вычисляя, получаем, что либо  $k = \pm 3$ , либо  $k = \pm i$ . Таким образом,  $g_1 = y + z\sqrt{3}$ ,  $g_2 = y + iz$ . Получились следующие кривые рода 3:

$$w^2 = (y + z\sqrt{3})(z-1), \quad y^2 = z(z^2 + z + 1), \quad w^2 = (y + iz)(z-1), \quad y^2 = z(z^2 + z + 1).$$

Заметим, что если в первой кривой сделать замену  $y = Y\sqrt{3}$ ,  $w = w$ , а во второй  $y = iY$ ,  $w = w$ , то получится в точности формулировка третьего пункта теоремы 4.1.

## Литература

- [1] Адрианов Н. М. Классификация примитивных групп вращений плоских рёбер // *Фундамент. и прикл. мат.* — 1997. — Т. 3, вып. 4. — С. 1069—1083.
- [2] Амбург Н. Я. Симметрии графов на поверхностях и алгебраические кривые: Дис... канд. физ.-мат. наук. — М., 2005.
- [3] Бычков Б. С., Епифанов Е. М., Дрёмов В. А. Вычисление пар Белого шестирёберных рисунков рода 3 с группами автоморфизмов порядков 12 и 3 // *Фундамент. и прикл. мат.* — 2007. — Т. 13, вып. 6. — С. 137—148.
- [4] Епифанов Е. М. Шестирёберные рисунки рода 3 с единственной вершиной: Дипломная работа. — М., 2006.
- [5] Кочетков Ю. Ю. Список склеек рода 3 с единственной вершиной: Препринт. — 2007.
- [6] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. — М.: Факториал Пресс, 2000.
- [7] Шабат Г. Б. Комбинаторно-топологические методы в теории алгебраических кривых: Дис... докт. физ.-мат. наук. — М., 1998.
- [8] Betrema J., Pere D., Zvonkin A. Plane trees and their Shabat polynomials // *Discrete Math.* — 1996. — Vol. 153, no. 1-3. — P. 47—58.
- [9] Lando S. K., Zvonkin A. K. *Graphs on Surfaces and Their Application.* — Berlin: Springer, 2004.
- [10] Shabat G. B., Voevodsky V. A. Drawing curves over number fields // *The Grothendieck Festschrift.* — Basel: Birkhäuser, 1990. — P. 199—227.

