РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА С ПОМОЩЬЮ ПОТЕНЦИАЛОВ

А. А. Беляев

Известно, что ограниченное решение задачи Дирихле для функций в полупространстве конечномерного пространства единственно и представляется в виде потенциала двойного слоя от краевого значения ([1], гл. 18, § 9, формула (3)). В данной статье доказано, что это утверждение сохраняет силу и в гильбертовом пространстве, если граничное значение удовлетворяет условию Липшица (теорема 1). Соответствующий потенциал понимается здесь так, как указано в определении 2. В бесконечномерном случае задачу Дирихле естественно рассматривать также и для мер. Введенный в заметке сопряженный потенциал двойного слоя дает единственное в некотором классе мер решение этой задачи (теорема 2).

Дадим точные формулировки. Пусть H — вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\ \cdot)$, нормой $|\cdot|$ и ортонормированным базисом $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$. Зафиксируем в H такой линейный оператор B, что $Be_i = b_i e_i$, $b_i > 0$, $b_1 = 1$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i < \infty$, и обозначим через p_t гауссову меру с характеристическим функционалом $\tilde{p}_t(x) = \exp\{-2t(Bx, x)\}$, определенную на σ-алгебре $\mathscr{B}(H)$ борелевских подмножеств H. Определим оператор Лапласа Δ цепочкой равенств

$$\Delta u = \Delta_B u = \operatorname{tr}(Bu'') = \sum_{i=1}^{\infty} b_i d_{e_i}^2 u,$$

где d_h — оператор дифференцирования по вектору $h \in H$. Кроме того, будем использовать следующие обозначения: $\mu^x = \mu(dy - x)$ — сдвиг меры μ на вектор $x \in H$, μ_Γ — поверхностная мера в смысле А. В. Угланова [2], порожденная на поверхности Γ мерой μ: $\mathscr{B}(H) \to \mathbb{R}$; стандартные координаты $x_i = (x, e_i)$, $x' = x - x_1 e_1$; $\Gamma_t = \{x_1 = t\}$, $U_t = \{x_1 > t\}$, $\Gamma = \Gamma_0$, $U = U_0$, $Ш_r(x) = \{|y - x| < r\}$, $Ш_r = Ш_r(0)$, $D_r^t = Ш_r \cap U_t$; $L^\infty(A)$ — пространство измеримых ограниченных функций на борелевском множестве $A \subset H$; $C^n(U)$ ($C_ч^n(U)$) — пространство функций, имеющих в U по крайней мере n производных по Фреше (соответственно частных производных порядка не больше чем n), ограниченных на каждом ограниченном подмножестве $A \subset U$ общей константой $C = C(A)$, $C^\infty(U) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C^n(U)$, $D(U) = \{f \in C^\infty(U)\colon \exists\ t,\ r > 0,\ \operatorname{supp} f \subset D_r^t\}$; $M^n(U)$ — пространство мер, определенных на $\mathscr{B}(U) = \mathscr{B}(H) \cap \{A \subset U\}$ и n раз дифференцируемых по подпространству $H_1 = \sqrt{B}\cdot H$ [3].

Определение 1. Функция $f\colon U \to \mathbb{R}$ называется решением задачи Дирихле в области U с краевым значением $\rho\colon \Gamma \to \mathbb{R}$, если $f \in C^1(U) \cap C_ч^2(U)$, $\Delta f(x) = 0$, $x \in U$ и $\forall\ r\ f(x + te_1) \to \rho(x)$ при $t \searrow 0$ равномерно по $x \in Ш_r \cap \Gamma$.

Определение 2. Потенциалом двойного слоя от $\rho \in L^\infty(\Gamma)$ называется функция $W_\rho\colon U \to \mathbb{R}$:

$$W_\rho(x) = \int_\Gamma \rho(y)\, K_{x_1}(dy - x'),$$

где K_{x_1} — мера Коши, определенная равенством

$$K_{x_1}(A) = (2\pi)^{-1/2}\cdot x_1 \int_0^\infty (p_t)_\Gamma\cdot(A)\cdot t^{-3/2}\cdot e^{-x_1^2/t}\, dt.$$

Нетрудно проверить, что конечномерные плотности K_{x_1} имеют вид

$$K_{x_1}^n(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}) = \pi^{-(n+1)/2}\cdot\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot x_1\cdot\left(\sum_{i=1}^{n+1} b_i^{-1} x_i^2\right)^{-(n+1)/2}.$$

Теорема 1. *Если краевое значение* ρ *удовлетворяет условию Липшица:* $|\rho(x)-\rho(y)|<C\cdot|x-y|$, $0<C<\infty$, *то потенциал* W_ρ *— единственное решение задачи Дирихле.*

Определение 3. Мера $\mu\colon \mathcal{B}(U)\to\mathbb{R}$ называется решением задачи Дирихле (для мер) с краевым значением $\mu_0\colon\mathcal{B}(\Gamma)\to\mathbb{R}$, если: 1) мера μ трижды дифференцируема по подпространству H_1 [3] на каждом борелевском подмножестве $A\subset U$, проекция которого на Γ вдоль e_1 ограничена; 2) $\int\limits_U \Delta\varphi\cdot\mu=0$ $\forall\varphi\in D(U)$; 3) поверхностная мера $\mu_t=\mu_{\Gamma_t}$ (она существует в силу 1)) слабо сходится к μ_0 при $t\searrow 0$ (мы отождествляем Γ_t и Γ); 4) для произвольного фиксированного $r>0$ вариация меры μ_{x_1} на шаре $Ш_r(x)\cap\Gamma_{x_1}$ ограничена равномерно по $x\in U$.

Определение 4. Сопряженным потенциалом двойного слоя от меры $\mu_0\colon \mathcal{B}(\Gamma)\to\mathbb{R}$ называется мера $\Pi_{\mu_0}\colon\mathcal{B}(U)\to\mathbb{R}$:

$$\Pi_{\mu_0}(A)=\int\limits_\Gamma d_{e_1}Q(A-x)\,\mu_0(dx),$$

где $Q=d_{e_1}Q^2_\infty$ [3] и

$$Q^2(A)=\int\limits_0^\infty p_t(A)\,dt.$$

Мера Q^2 — фундаментальное решение оператора Лапласа [4].

Теорема 2. *Сопряженный потенциал двойного слоя* Π_{μ_0} *дает единственное решение задачи Дирихле (в смысле определения 3).*

В доказательстве единственности в теореме 1 используется

Лемма 1. *Существуют константы* α, $\beta>1$ *такие, что для произвольного решения* f *задачи Дирихле с нулевым краевым значением*

$$\alpha M_f(r)\leqslant M_f(\beta r)\quad\forall\, r>0,$$

где $M_f(r)=\sup\{|f(x)|\colon |x|=r,\ x\in U\}$.

Отметим, что задача Дирихле для мер в полупространстве исследовалась ранее В. Ю. Бенткусом [5]. Однако найденные им решения оказывались обобщенными мерами (распределениями), в то время как данные здесь решения вполне аналогичны классическим.

В заключение автор благодарит О. Г. Смолянова за постоянное внимание и руководство.

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Г. Михлин. Курс математической физики.— М.: Наука, 1968.
[2] А. В. Угланов. Поверхностные меры в банаховом пространстве.— Матем. сб., 1979, **110** (152):2(10), с. 189—217.
[3] О. Г. Смолянов. Анализ на топологических линейных пространствах и его приложения.— М.: изд-во МГУ, 1979.
[4] В. Ю. Бенткус. Эллиптичность бесконечномерного итерированного оператора Лапласа.— Литов. матем. сб., 1979, 19:4, с. 13—28.
[5] В. Ю. Бенткус. Уравнения с постоянными коэффициентами в частных производных для обобщенных мер в бесконечномерном полупространстве.— Дифф. уравн. и их применение, Вильнюс, 1976, вып. 16.

Московский государственный университет

Поступило в Правление общества 11 декабря 1981 г.