С. С. Афанасьева, Р. П. Востокова, Логарифмы формальных A-модулей в малом ветвлении, *Алгебра и анализ*, 2015, том 27, выпуск 6, 6–13

Алгебра и анализ
Том 27 (2015), №6

Сергею Владимировичу Востокову
к его 70-летию

ЛОГАРИФМЫ ФОРМАЛЬНЫХ A-МОДУЛЕЙ В МАЛОМ ВЕТВЛЕНИИ

© С. С. АФАНАСЬЕВА, Р. П. ВОСТОКОВА

В настоящей работе изучаются формальные $\mathcal{O}_0$-модули над кольцом целых $\mathcal{O}$ локального поля, т. е. формальные группы над $\mathcal{O}$ с кольцом эндоморфизмов, включающим фиксированное кольцо $\mathcal{O}_0$. Получено полное описание логарифмов всех таких модулей в случае малого ветвления. Ранее было показано, что в случае малого ветвления ($e(\mathcal{O}/\mathcal{O}_0) < q$) всякий $\mathcal{O}_0$-модуль строго изоморфен $\mathcal{O}_0$-модулю, логарифм которого можно представить в виде $vu^{-1}(X)$, где u и v — некоторые матрицы над кольцом операторов, описанным в работе. Полученный в данной работе результат позволяет определить тип (u и v) формального $\mathcal{O}_0$-модуля по виду его логарифма, а также дает способ построения всех формальных $\mathcal{O}_0$-модулей.

§1. Введение

Целью настоящей работы является полное описание логарифмов формальных модулей над кольцом целых локального поля в случае малого ветвления.

Полученный в данной работе результат позволяет в случае малого ветвления ($v_K(\pi_0) < q$) определить тип формального $\mathcal{O}_0$-модуля (определение см. ниже) по виду его логарифма, а также дает способ построения всех формальных $\mathcal{O}_0$-модулей.

Ключевые слова: формальные группы, формальные модули, многомерные формальные группы.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 14-01-00393.

Первый автор благодарит Санкт-Петербургский государственный университет за поддержку исследований.

Введем обозначения, используемые во всей работе и необходимые для формулировки основного результата. Пусть K_0 — локальное поле (конечное расширение $\mathbb{Q}_p$) с кольцом целых $\mathcal{O}_0$ и простым элементом π_0; K — конечное расширение поля K_0, с кольцом целых $\mathcal{O}$ и простым элементом π; N — подполе инерции в K/K_0, $\mathcal{O}_N$ — его кольцо целых; e_0 — индекс ветвления K/K_0; $X = (X_1, \ldots, X_m)$. Как и в [1], $M_m(\mathfrak{A})$ обозначает кольцо матриц размера $m \times m$ над кольцом $\mathfrak{A}$, I_m — единичная матрица размера $m \times m$. Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\lambda(X) \in K[[X]]^m$, $\lambda(X) \equiv X \mod \deg 2$ *и* $\lambda(X) = \sum_{k=0}^{e_0-1} \pi^k \lambda_k(X)$, *где* $\lambda_k(X) \in N[[X]]^m$. *Тогда* $\lambda(X)$ *является логарифмом* m*-мерного формального* $\mathcal{O}_0$*-модуля над* $\mathcal{O}$, *если и только если для некоторых элементов* $u \in M_m(\mathcal{O}_N[[\Delta]]'), v \in M_m(\mathcal{O}[[\Delta]])$, *где* $u \equiv \pi_0 I_m \mod \Delta$, $v = \pi_0 I_m - \pi r_1 - \ldots - \pi^{e_0-1} r_{e_0-1}$, $r_i \in M_m(\mathcal{O}_N[[\Delta]]'\Delta)$, $1 \leqslant i \leqslant e_0 - 1$, *выполнены сравнения*

$$\begin{cases} u\lambda_0(X) \equiv 0 \mod \pi_0, \\ r_i\lambda_0(X) + \pi_0\lambda_i(X) \equiv 0 \mod \pi_0, \quad 1 \leqslant i \leqslant e_0 - 1. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\mathcal{O}_N[[\Delta]]'$ — некоторое кольцо, действующее на рядах из $N[[X]]$, которое будет определено в п. 3.1 ниже. Сравнимость с 0 по модулю π_0 означает, что соответствующий столбец лежит в $\pi_0\mathcal{O}_N[[X]]^m$.

В п. 3.3 настоящей работы (см. предложение 1) в виде системы сравнений будет описан явный вид формального модуля Картье, соответствующего $\mathcal{O}_0$-модулю в случае малого ветвления. Напомним, что известное из [1, 2] описание классов изоморфных формальных групп с помощью модулей Картье дает их описание в терминах правого действия кольца $\mathcal{O}_N[[\Delta]]'$. Теорема 1 описывает все логарифмы формальных $\mathcal{O}_0$-модулей с помощью левого действия.

Впервые подобное описание формальных групп (в более частном случае) было получено Т. Хондой в работе [3], в которой были построены формальные группы (произвольной размерности) над кольцом p-адических целых. Эти группы стали называть формальными группами Хонды. Над кольцом векторов Витта совершенного поля положительной характеристики формальные группы Хонды исчерпывают все возможные формальные группы и тем самым дают их полную классификацию. Напомним, что формальная группа F называется формальной группой Хонды типа $u \in M_m(\mathcal{O}_N[[\Delta]]')$, где $u \equiv \pi_0 I_m \mod \Delta$, если ее логарифм λ удовлетворяет сравнению

$$u\lambda(X) \equiv 0 \mod \pi_0. \tag{2}$$

Формальные группы Хонды типов u и u_1 изоморфны тогда и только тогда, когда $u = cu_1$ для некоторого ряда c такого, что $c \equiv 1 \mod \Delta$.

Описание логарифмов с помощью сравнений вида (2) оказывается удобным при работе с формальными группами. В частности, с помощью него были успешно построены конструкции с выделенными изогениями для формальных групп Хонды, что позволило получить явную формулу спаривания Гильберта для этого класса формальных групп (см. [4, 5]).

§2. Обозначения

Будем придерживаться обозначений, перечисленных во введении, а также следующих:

- v_K — дискретное нормирование на K, для которого $v_K(\pi) = 1$;
- q — порядок поля вычетов поля K_0;
- σ — автоморфизм Фробениуса N/K_0.

Пусть F — формальный групповой закон над $\mathcal{O}$ с кольцом эндоморфизмов, включающим $\mathcal{O}_0$, т. е. задано вложение $[\cdot] : \mathcal{O}_0 \hookrightarrow \operatorname{End}_{\mathcal{O}} F$ такое, что $[a](X) \equiv aX \mod \deg 2$ для каждого $a \in \mathcal{O}_0$. Такой формальный групповой закон будем называть $\mathcal{O}_0$-модулем (подробнее о $\mathcal{O}_0$-модулях см. [6, гл. 4]).

§3. Классификация $\mathcal{O}_0$-модулей в малом ветвлении

В работе [1] был описан способ классифицировать все формальные группы над кольцом целых произвольного локального поля при помощи модульных инвариантов, и этот способ был наглядно проиллюстрирован в некоторых случаях, в том числе в случае малого ветвления. В работе [7] результаты в малом ветвлении были обобщены на случай $\mathcal{O}_0$-модулей, и их описание получено без использования модульных инвариантов. В этом параграфе мы напомним и обобщим эти результаты.

3.1. Предварительные замечания и леммы. Ниже будут кратко перечислены известные классификационные утверждения и получены необходимые технические результаты.

Точно так же, как в [6, предложения 15.2.6,15.2.8, 15.2.9, теорема 21.5.6], можно показать, что каждый формальный $\mathcal{O}_0$-модуль над кольцом $\mathcal{O}$ строго изоморфен $\mathcal{O}_0$-типическому, логарифм которого можно представить в виде

$$\lambda(X) = \Lambda(\Delta)(X) = X + b_1 X^q + b_2 X^{q^2} + \dots,$$

где $b_i \in M_m(K)$, $X^{q^i} = \begin{pmatrix} X_1^{q^i} \\ \vdots \\ X_m^{q^i} \end{pmatrix}$, $\Lambda(\Delta) = (\Lambda_j)$ лежит в $M_m(K[[\Delta]])$ и $\Delta(X_i^n) = X_i^{qn}$ (действие Δ на столбец определяется его действием на каждый элемент столбца).

Пусть $\mathcal{O}_N[[\Delta]]'$ — некоммутативное кольцо рядов, совпадающее с $\mathcal{O}_N[[\Delta]]$ как левый $\mathcal{O}_N$-модуль и удовлетворяющее соотношению $\Delta a = \sigma(a)\Delta$ для всех $a \in \mathcal{O}_N$. Последнее соотношение также определяет структуру правого $\mathcal{O}_N[[\Delta]]'$-модуля на $K[[\Delta]]$. Определим действие оператора Δ на рядах из $N[[X]]$: для ряда $A(X) = \sum a_{i_1\ldots i_m} X_1^{i_1} \cdots X_m^{i_m}$ положим

$$\Delta(A(X)) := \sum a^{\sigma}_{i_1\ldots i_m} X_1^{qi_1} \cdots X_m^{qi_m}.$$

Таким образом, задано действие кольца $\mathcal{O}_N[[\Delta]]'$ на $N[[X]]$.

Лемма 1. *Пусть $\Lambda = \sum_{i=0}^{\infty} C_i \Delta^i$, $C_i \in M_m(K)$ и ряд $\Lambda(\Delta)(X)$ является логарифмом некоторого формального $\mathcal{O}_0$-модуля. Тогда $\pi^s C_i \in M_m(\mathcal{O})$, где $s = \max(ie_0, (i+l)e_0 - q^l)$, $l = [\log_q \frac{e_0}{q-1}]$.*

Доказательство. Согласно теореме 2 работы [8] Λ можно представить в виде vu^{-1}, причем $v\pi_0^l \pi^{-q^l} \in M_m(\mathcal{O}[[\Delta]])$, $u \in M_m(\mathcal{O}_N[[\Delta]]')$ и $u \equiv \pi_0 I_m \mod \Delta$. Пусть

$$u = \pi_0 I_m - A(\Delta)\Delta,\ v = \pi_0 I_m - \pi_0^{-l}\pi^{q^l} B(\Delta)\Delta,\ A, B \in M_m(\mathcal{O}[[\Delta]]).$$

Тогда

$$vu^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(A(\Delta)\Delta)^j}{\pi_0^j} - \frac{\pi^{q^l}}{\pi_0^l} B(\Delta)\Delta \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(A(\Delta)\Delta)^j}{\pi_0^{j+1}}.$$

Поэтому

$$\Lambda \equiv \sum_{j=0}^{i} \frac{(A(\Delta)\Delta)^j}{\pi_0^j} - \frac{\pi^{q^l}}{\pi_0^l} B(\Delta)\Delta \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(A(\Delta)\Delta)^j}{\pi_0^{j+1}} \mod \Delta^i,$$

из чего следует утверждение леммы. □

Утверждение леммы можно доказать и по-другому, рассмотрев универсальный $\mathcal{O}_0$-типический $\mathcal{O}_0$-модуль (определение см., например, в [6, 21.5]).

До конца параграфа зафиксируем элементы $u \in M_m(\mathcal{O}_N[[\Delta]]')$ и $v \in M_m(\mathcal{O}[[\Delta]])$, для которых

$$\begin{aligned} &u \equiv \pi_0 I_m \mod \Delta, \\ &v = \pi_0 I_m - \pi r_1 - \ldots - \pi^{e_0-1} r_{e_0-1}, \\ &r_i \in M_m(\mathcal{O}_N[[\Delta]]'\Delta), \quad 1 \leqslant i \leqslant e_0 - 1. \end{aligned} \tag{3}$$

Для каждого $\alpha \in \mathcal{O}$ определим оператор $\langle\alpha\rangle$ на $K[[\Delta]]^m$ следующим образом:

$$\langle\alpha\rangle\biggl(\sum_{i=0}^{\infty} c_i\Delta^i\biggr) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i\alpha^{q^i}\Delta^i.$$

Пусть $D_F = \{f \in K[[\Delta]]^m : \lambda_F^{-1}(f(\Delta)(X)) \in \mathcal{O}[[X]]^m\}$ обозначает модуль Картье, соответствующий формальному $\mathcal{O}_0$-модулю F с логарифмом $\lambda_F(X) = \Lambda(\Delta)(X)$, где $\Lambda = vu^{-1}$. Напомним (см. [1, определение 5.2.1]), что D_F порожден элементами $\langle\pi^i\rangle\Lambda_j$ как правый $\mathcal{O}_N[[\Delta]]'$-подмодуль $K[[\Delta]]^m$ (подробнее см. [1]).

Как и в [1], D_{F_π} обозначает модуль, соответствующий формальному закону $F_\pi(X,Y) = \pi^{-1}F(\pi X, \pi Y)$.

Далее будем предполагать, что

$$e_0 < q. \tag{4}$$

Лемма 2. *$D_{F_\pi} = \mathcal{O}[[\Delta]]^m$.*

Доказательство. Поскольку $v_K(\pi_0) < q$ и при переходе от F к F_π коэффициенты логарифма при $X_j^{q^i}$ домножаются на π^{q^i-1}, то с учетом леммы 1 утверждение доказывается так же, как и аналогичный пункт теоремы 6.3.1 в [1]. $\square$

3.2. Классификационная теорема. Тем же способом, как и в [1], с учетом предварительных замечаний, может быть получен следующий результат.

Теорема 2.

1) *$\lambda(X) = \Lambda(\Delta)(X)$ является логарифмом $\mathcal{O}_0$-типического формального $\mathcal{O}_0$-модуля над кольцом $\mathcal{O}$ тогда и только тогда, когда $\Lambda = vu^{-1}$, для некоторых элементов $u \in M_m(\mathcal{O}_N[[\Delta]]')$, $v \in M_m(\mathcal{O}[[\Delta]])$ таких, что $u \equiv \pi_0 I_m \mod \Delta$, $v = \pi_0 I_m - \pi r_1 - \ldots - \pi^{e_0-1}r_{e_0-1}$, $r_i \in M_m(\mathcal{O}_N[[\Delta]]'\Delta)$, $1 \leqslant i \leqslant e_0 - 1$.*

2) *Любой формальный $\mathcal{O}_0$-модуль над $\mathcal{O}$ изоморфен $\mathcal{O}_0$-типическому с таким логарифмом.*

3) *Два $\mathcal{O}_0$-типических формальных $\mathcal{O}_0$-модуля $F(X,Y)$ и $F'(X,Y)$ с логарифмами $\lambda(X) = vu^{-1}(X)$ и $\lambda'(X) = v'u'^{-1}(X)$ строго изоморфны над $\mathcal{O}$ тогда и только тогда, когда $u' = \varepsilon u$, $v' = v + gu$ при некоторых $\varepsilon \in M_m(\mathcal{O}_N[[\Delta]]')$, $\varepsilon \equiv I_m \mod \Delta$, $g \in \pi M_m(\mathcal{O}[[\Delta]]\Delta)$.*

В одномерном случае эта теорема была доказана в [7, теоремы 1, 2].

В случае, когда формальный $\mathcal{O}_0$-модуль F изоморфен $\mathcal{O}_0$-модулю с логарифмом вида $vu^{-1}(X)$, будем говорить, что F имеет тип (u,v).

3.3. Вид модуля D_F в случае малого ветвления. Опишем модуль Картье для формального $\mathcal{O}_0$-модуля в случае малого ветвления (т. е. в предположении, что выполнено неравенство (4)).

Предложение 1. *Пусть $\eta(\Delta) \in K[[\Delta]]^m$ и $\eta(\Delta) = \sum_{i=0}^{e_0-1} \pi^i \eta_i(\Delta)$, где $\eta_i(\Delta) \in N[[\Delta]]^m$, $0 \leqslant i \leqslant e_0 - 1$. Тогда $\eta(\Delta) \in D_F$ тогда и только тогда, когда выполнены сравнения*

$$\begin{cases} u\eta_0 \equiv 0 \mod \pi_0, \\ r_i\eta_0 + \pi_0\eta_i \equiv 0 \mod \pi_0, \quad 1 \leqslant i \leqslant e_0 - 1. \end{cases} \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $\eta \in D_F$. Как упоминалось выше, D_F порожден элементами $\langle \pi^i \rangle \Lambda_j$, $0 \leqslant i \leqslant e_0 - 1$, $1 \leqslant j \leqslant m$, как $\mathcal{O}_N[[\Delta]]'$-модуль. Ясно, что Λ_j удовлетворяют системе (5), так как $\Lambda = vu^{-1}$. Из условия (4) следует, что π^{q^i} делится на $\pi_0^i\pi$. Поэтому $\langle \pi^s \rangle \Lambda_j$ лежат в $\pi\mathcal{O}[[\Delta]]^m$ при всех $s > 0$, а значит, $\langle \pi^s \rangle \Lambda_j$ тоже удовлетворяют сравнениям (5). Таким образом, все элементы модуля D_F удовлетворяют системе сравнений (5). Покажем, что всякий элемент $K[[\Delta]]^m$, удовлетворяющий этим сравнениям, лежит в модуле D_F.

Сравнения (5) означают, что

$$\begin{cases} u\eta_0 = \pi_0 A(\Delta), \\ r_i\eta_0 + \pi_0\eta_i = \pi_0 B_i(\Delta), \quad 1 \leqslant i \leqslant e_0 - 1, \end{cases}$$

для некоторых рядов $A, B_i \in \mathcal{O}_N[[\Delta]]^m$. Откуда следует, что

$$\eta = \sum_{i=0}^{e_0-1} \pi^i \eta_i = \pi_0 u^{-1} + \sum_{i=1}^{e_0-1} \pi^i (B_i - r_i u^{-1} A) = \Lambda A + \sum_{i=1}^{e_0-1} \pi^i B_i.$$

Ясно, что $\sum_{i=1}^{e_0-1} \pi^i B_i \in \pi\mathcal{O}[[\Delta]]^m$. В силу леммы 2 имеем $\pi\mathcal{O}[[\Delta]]^m = \pi D_{F_\pi} \subset D_F$. Таким образом, $\eta \in D_F$. □

§4. Доказательство основной теоремы

Доказательство теоремы 1. Пусть

$$\lambda(X) = \sum a_{i_1,\dots,i_m} X_1^{i_1} \cdots X_m^{i_m},\ a_{i_1,\dots,i_m} \in K^m.$$

В силу предложения 5.5.1 работы [1] ряд $\lambda(X)$ является логарифмом формального $\mathcal{O}_0$-модуля типа (u, v) тогда и только тогда, когда ряды

$$\lambda^{(i_1 \dots i_m)}(\Delta) = \sum_{s=0}^{\infty} a_{i_1 q^s,\dots,i_m q^s} \Delta^s$$

лежат в D_F для всех мультииндексов $(i_1 \dots i_m)$, для которых не все i_j делятся на q. Обозначим множество всех таких мультииндексов через J. Для $I = (i_1 \dots i_m)$ положим $X^I = X_1^{i_1} \cdots X_m^{i_m}$.

Легко видеть, что $\lambda(X) = \sum_{I \in J} \lambda^I(\Delta) X^I$. Пусть

$$\lambda^I(\Delta) = \sum_{k=0}^{e_0-1} \pi^k \lambda_k^I(\Delta), \quad \lambda_k^I(\Delta) \in N[[\Delta]]^m.$$

Тогда система сравнений (1) равносильна тому, что для всех $I \in J$ выполнены сравнения

$$\begin{cases} u\lambda_0^I \equiv 0 \mod \pi_0, \\ r_k \lambda_0^I + \pi_0 \lambda_k^I \equiv 0 \mod \pi_0, \quad 1 \leqslant k \leqslant e_0 - 1. \end{cases} \tag{6}$$

Отсюда с учетом предложения 1 получаем требуемое. □

Возможно, требование (4) можно ослабить, но не сильно. Во всяком случае, заметим следующее.

Замечание 1. Если $v(\pi_0) > q$, то существуют u и v, удовлетворяющие условиям (3), для которых существует (не единственный) $\lambda(X) \in K[[X]]^m$ такой, что $\lambda(X) \equiv X \mod \deg 2$ и $\lambda(X)$ удовлетворяет системе сравнений (1), но при этом $\lambda(X)$ не является логарифмом никакой формальной группы.

Приведем пример такого ряда $\lambda(X)$. Для простоты предположим, что $m = 1$. Пусть $\lambda_{(q)}(X)$ — логарифм формальной группы Любина–Тейта над кольцом $\mathcal{O}_0$. Например,

$$\lambda_{(q)}(X) = \pi_0(\pi_0 - \Delta)^{-1}(X) = X + \frac{X^q}{\pi_0} + \dots$$

Положим $\lambda(X) = \lambda_{(q)}(X) + \pi X^2$. Нетрудно проверить, что ряд $\lambda(X)$ удовлетворяет системе сравнений (1) для $v = \pi_0$, $u = \pi_0 - \Delta$. Покажем, что ряд $\lambda(X)$ не является логарифмом формального $\mathcal{O}_0$-модуля. Действительно, предположим, что $\lambda(X)$ — логарифм формального $\mathcal{O}_0$-модуля F, тогда F изоморфен формальному модулю $F_{(q)}$ с логарифмом $\lambda_{(q)}(X)$, поскольку $\lambda_{(q)}(X)$ является q-типической частью ряда $\lambda(X)$. Тогда в силу предложения 5.5.1 работы [1] ряд $\lambda^{(2)}(\Delta) = \pi$ лежит в $D_{F_{(q)}}$. Следовательно, $\lambda_{(q)}^{-1}(\pi X) \in \mathcal{O}[[X]]$, что неверно, поскольку $\lambda_{(q)}^{-1}(\pi X) = \pi X + \frac{\pi^q}{\pi_0} X^q + \dots$, а $\frac{\pi^q}{\pi_0} \notin \mathcal{O}$.

Список литературы

[1] Бондарко М. В., Востоков С. В., *Явная классификация формальных групп над локальными полями*, Тр. Мат. ин-та РАН **241** (2003), 43–67.

[2] Бондарко М. В., *Явная классификация формальных групп над полными дискретно нормированными полями*, Тр. С.-Петербург. мат. о-ва **11** (2005), 1–36.

[3] Honda T., *On the theory of commutative formal groups*, J. Math. Soc. Japan. **22** (1970), 213–243.

[4] Демченко О. В., *Новое в отношениях формальных групп Любина–Тэйта и формальных групп Хонды*, Алгебра и анализ **10** (1998), №5, 77–84.

[5] Востоков С. В., Демченко О. В., *Явная формула спаривания Гильберта для формальных групп Хонды*, Зап. науч. семин. ПОМИ **272** (2000), 86–128.

[6] Hazewinkel M., *Formal groups and applications*, Pure Appl. Math., vol. 78, Acad. Press, New York, 1978.

[7] Афанасьева С. С., Востоков С. В., *Классификация формальных A-модулей в малом ветвлении*, Зап. науч. семин. ПОМИ **430** (2014), 5–12.

[8] Афанасьева С. С., Востокова Р. П., Пак Г. К., *Классификация логарифма многомерной формальной группы в локальном поле*, Зап. науч. семин. ПОМИ **430** (2014), 13–17.

Поступило 10 июня 2015 г.

С.-Петербургский
государственный университет
математико-механический факультет
198504, Санкт-Петербург
Петродворец, Университетский пр., 28
Россия
E-mail: cheery_sonya@mail.ru

Балтийский государственный
технический университет
им. Д. Ф. Устинова „Военмех“
198005, Санкт-Петербург
1-я Красноармейская ул., 1
Россия
E-mail: rvostokova@yandex.ru