A. S. Shamaev, V. V. Shumilova, Homogenization of motion equations for medium consisting of elastic material and incompessible Kelvin-Voigt fluid, *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2024, Volume 16, Issue 1, 99–110

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 16. № 1 (2024). С. 99-110.

УДК 517.958

УСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СРЕДЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ УПРУГОГО МАТЕРИАЛА И НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ КЕЛЬВИНА-ФОЙГТА

А.С. ШАМАЕВ, В.В. ШУМИЛОВА

Аннотация. Рассмотрена начально-краевая задача, описывающая движение двухфазной среды с периодической структурой. Первая фаза такой среды состоит из изотропного упругого материала, а вторая фаза — из несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта. Данная задача состоит из дифференциальных уравнений в частных производных второго и четвертого порядков, условий непрерывности перемещений и напряжений на границах фаз, а также однородных начальных и граничных условий. С помощью метода преобразования Лапласа выведена соответствующая усредненная задача – начально-краевая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка с постоянными коэффициентами. Показано, что коэффициенты и ядра сверток усредненных уравнений находятся с помощью решений вспомогательных периодических задач на единичном кубе. В случае слоистой среды решения периодических задач выписаны в явном виде, благодаря чему выведены аналитические выражения для усредненных коэффициентов и ядер сверток. В частности, установлено, что вид и свойства усредненных ядер сверток зависят от объемной доли жидких слоев внутри ячейки периодичности.

Ключевые слова: усреднение, уравнения движения, двухфазная среда, упругий материал, жидкость Кельвина-Фойгта.

Mathematics Subject Classification: 35B27

1. Введение

Построение строго обоснованных усредненных моделей микронеоднородных сред относится к числу основных направлений теории усреднения уравнений с частными производными. С точки зрения практических приложений большой интерес вызывают усредненные модели двухфазных сред, имеющих ε-периодическую структуру и состоящих из твердого материала и жидкости. Динамика таких твердо-жидких сред описывается начально-краевыми задачами для дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений с частными производными, коэффициенты которых — ε-периодические функции пространственных переменных. Их непосредственное численное решение для сред, состоящих из многих тысяч или миллионов ячеек периодичности, сопряжено с существенными трудностями. С другой стороны, для некоторых моделей двухфазных сред удается вывести соответствующие им усредненные модели, построенные при $\varepsilon \to 0$. Как правило, усредненные модели периодических твердо-жидких сред представляют собой начально-краевые задачи для уравнений с постоянными коэффициентами. Следует напомнить, что согласно основной идее теории усреднения, решения исходных и соответствующих усредненных задач при малых ε должны быть близки друг к другу.

A.S. Shamaev, V.V. Shumilova, Homogenization of motion equations for a medium consisting of an elastic material and an incompressible Kelvin-Voigt fluid.

Работа выполнена по теме государственного задания (номер госрегистрации 124012500443-0).
Поступила 14 февраля 2023 г.

В работах [1]–[9] были построены усредненные модели движения периодических двухфазных сред, у которых одна фаза состоит из упругого или вязкоупругого материала, а другая фаза — из вязкой ньютоновской жидкости. Согласно результатам этих работ, усредненные уравнения являются интегро-дифференциальными даже в том случае, когда исходные уравнения движения для каждой отдельной фазы — дифференциальные.

В данной работе рассматривается задача усреднения для начально-краевой задачи, описывающей движение двухфазной среды с ε-периодической структурой. В качестве фаз взяты изотропный упругий материал и несжимаемая вязкоупругая жидкость Кельвина-Фойгта. Описание и свойства такого рода неньютоновских жидкостей можно найти, например, в работах [10], [11]. С помощью метода преобразования Лапласа и результатов работ [6]–[8] выписывается усредненная задача — начально-краевая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Коэффициенты и ядра сверток усредненных уравнений находятся с помощью решений ряда вспомогательных периодических задач на единичном кубе. Показывается, что в случае слоистой среды решения периодических задач можно выписать в явном виде и тем самым получить явные аналитические выражения для усредненных коэффициентов и ядер сверток.

2. Исходная модель двухфазной среды

Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$, заполненную двухфазной средой с периодической микроструктурой. Периодом этой среды является куб $Y_\varepsilon = \varepsilon Y$, где $Y = (0,1)^3$ — единичный куб, а величина ε много меньше линейных размеров области Ω. Разобьем Y на два открытых, непересекающихся подмножества Y_1 и Y_2 с гладкой общей границей Γ: $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \Gamma$. Введем множества

$$E_s = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^3} \left(Y_s \cup (\partial Y_s \cap \partial Y) + k\right), \quad s = 1,2,$$

полученные Y-периодическим продолжением множеств Y_s на всё пространство $\mathbb{R}^3$. Обозначим $\Omega_{s\varepsilon} = \Omega \cap \varepsilon E_s$ и далее считаем, что множество $\Omega_{1\varepsilon}$ занято изотропным упругим материалом, а множество $\Omega_{2\varepsilon}$ — несжимаемой вязкоупругой жидкостью Кельвина-Фойгта.

Определяющие соотношения, связывающие компоненты тензоров напряжений и малых деформаций в упругой фазе $\Omega_{1\varepsilon}$, имеют вид

$$\sigma^\varepsilon_{ij} = a_{ijkh} e_{kh}(u^\varepsilon), \tag{2.1}$$

где $u^\varepsilon(x,t)$ — вектор перемещений, σ^ε и $e(u^\varepsilon)$ — тензоры напряжений и малых деформаций соответственно, a — положительно определенный тензор модулей упругости,

$$e_{kh}(u^\varepsilon) = e^x_{kh}(u^\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^\varepsilon_k}{\partial x_h} + \frac{\partial u^\varepsilon_h}{\partial x_k}\right), \quad a_{ijkh} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kh} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}).$$

Здесь λ и μ — параметры Ламе, $\mu > 0$, $3\lambda+2\mu > 0$, а δ_{ij} — символ Кронекера. Отметим, что в (2.1), как и всюду далее, предполагается суммирование по повторяющимся индексам, а индексы i,j,k,h, если не оговорено иное, принимают значения от 1 до 3.

Определяющие соотношения в жидкой фазе $\Omega_{2\varepsilon}$ имеют вид

$$\sigma^\varepsilon_{ij} = -\delta_{ij}p^\varepsilon + 2\eta e_{ij}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) + 2\theta e_{ij}\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}\right), \tag{2.2}$$

где $p^\varepsilon(x,t)$ — давление, η — коэффициент вязкости жидкости, а $\tau = \theta/\eta$ — время ретардации (запаздывания) [10].

Начально-краевая задача, описывающая движение двухфазной среды в области Ω, записывается в виде

$$\begin{gathered}
\rho_s \frac{\partial^2 u_i^\varepsilon}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} + f_i(x,t) \quad \text{в} \quad \Omega_{s\varepsilon} \times (0,T), \quad s = 1,2, \\
\operatorname{div} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_{2\varepsilon} \times (0,T), \quad [u^\varepsilon]|_{\Gamma_\varepsilon} = 0, \quad [\sigma_{ij}^\varepsilon n_j]|_{\Gamma_\varepsilon} = 0, \\
u^\varepsilon(x,t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad u^\varepsilon(x,0) = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x,0) = 0,
\end{gathered} \tag{2.3}$$

где $\rho_s = \text{const}$ — плотность среды в $\Omega_{s\varepsilon}$; $f(x,t) \in H^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ — вектор объемной силы; $[g]|_{\Gamma_\varepsilon}$ — скачок функции g при переходе через поверхность $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_{1\varepsilon} \cap \partial\Omega_{2\varepsilon}$; $n = (n_1, n_2, n_3)$ — единичный вектор нормали к поверхности Γ_ε, направленный из твердой фазы в жидкую.

Вариационная формулировка задачи (2.3) имеет следующий вид: найти $u^\varepsilon(t)$ и $p^\varepsilon(t)$ со значениями в $H_0^1(\Omega)^3$ и $L^2(\Omega_{2\varepsilon})$ соответственно, удовлетворяющие интегральному тождеству

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{2} \rho_s \int\limits_{\Omega_{s\varepsilon}} \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} \cdot v\,dx &+ \int\limits_{\Omega_{1\varepsilon}} a_{ijkh} e_{kh}(u^\varepsilon) e_{ij}(v)\,dx \\
&+ 2\eta \int\limits_{\Omega_{2\varepsilon}} e_{ij}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) e_{ij}(v)\,dx + 2\theta \int\limits_{\Omega_{2\varepsilon}} e_{ij}\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}\right) e_{ij}(v)\,dx \\
&- \int\limits_{\Omega_{2\varepsilon}} p^\varepsilon \operatorname{div} v\,dx = \int\limits_{\Omega} f \cdot v\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)^3
\end{aligned} \tag{2.4}$$

для почти всех $t \in (0,T)$, условию несжимаемости жидкой фазы

$$\operatorname{div} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_{2\varepsilon} \times (0,T) \tag{2.5}$$

и однородным начальным условиям

$$u^\varepsilon(0) = 0, \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(0) = 0. \tag{2.6}$$

Существование и единственность решения задачи (2.4)–(2.6) при фиксированном $\varepsilon > 0$ доказываются так же, как и в работах [1], [2], в которых был рассмотрен случай двухфазной среды, состоящей из упругого материала и вязкой ньютоновской жидкости.

Из интегрального тождества (2.4) мы можем вывести ряд априорных оценок, равномерных по ε. Прежде всего, полагая $v = \partial u^\varepsilon / \partial t$ в (2.4), получаем

$$\frac{dz^\varepsilon}{dt} \leqslant 2 \int\limits_{\Omega} f \cdot \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\,dx, \tag{2.7}$$

где

$$z^\varepsilon(t) = \sum_{s=1}^{2} \rho_s \int\limits_{\Omega_{s\varepsilon}} \left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right|^2 dx + \int\limits_{\Omega_{1\varepsilon}} a_{ijkh} e_{kh}(u^\varepsilon) e_{ij}(u^\varepsilon)\,dx + 2\theta \int\limits_{\Omega_{2\varepsilon}} \left|e\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)\right|^2 dx.$$

Из (2.7) имеем

$$\frac{dz^\varepsilon}{dt} \leqslant \int\limits_{\Omega} |f|^2 dx + \int\limits_{\Omega} \left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right|^2 dx \leqslant \int\limits_{\Omega} |f|^2 dx + k_1 z^\varepsilon, \quad k_1 = \frac{1}{\min\{\rho_1, \rho_2\}},$$

откуда, используя неравенство Гронуолла, получаем оценки

$$\left|\left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right|\right|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^3)} \leqslant C||f||_1, \qquad ||e(u^\varepsilon)||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_{1\varepsilon})^3)} \leqslant C||f||_1,$$
$$\left|\left|e\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)\right|\right|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_{2\varepsilon})^3)} \leqslant C||f||_1, \qquad ||f||_1 = ||f||_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)},$$

где C обозначает различные положительные постоянные, не зависящие от ε. Из этих оценок и неравенства Корна следует также, что

$$||u^\varepsilon||_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)^3)} \leqslant C||f||_1.$$

Аналогично можно показать, что

$$\left|\left|\frac{\partial^3 u^\varepsilon}{\partial t^3}\right|\right|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^3)} \leqslant C||f||_{H^2(0,T;L^2(\Omega)^3)},$$
$$\left|\left|\frac{\partial^r u^\varepsilon}{\partial t^r}\right|\right|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)^3)} \leqslant C||f||_{H^r(0,T;L^2(\Omega)^3)}, \quad r = 1, 2.$$

Из полученных оценок следует, в частности, что после возможного изменения на множестве нулевой меры Лебега $u^\varepsilon \in C^1([0,T]; H_0^1(\Omega)^3) \cap C^2([0,T]; L^2(\Omega)^3)$ [11].

Остается получить оценку для давления $p^\varepsilon(x,t)$. Для этого рассмотрим задачу

$$\operatorname{div} q^\varepsilon = P^\varepsilon \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T), \quad q^\varepsilon(x,t)|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.8}$$

где

$$P^\varepsilon(x,t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{|\Omega_{1\varepsilon}|}\displaystyle\int\limits_{\Omega_{2\varepsilon}} p^\varepsilon(x,t) \quad \text{в} \quad \Omega_{1\varepsilon} \times (0,T), \\ p^\varepsilon(x,t) \quad \text{в} \quad \Omega_{2\varepsilon} \times (0,T). \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что

$$\int\limits_\Omega P^\varepsilon(x,t)\,dx = 0, \quad ||P^\varepsilon||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C||p^\varepsilon||_{L^2(0,T;L^2(\Omega_{2\varepsilon}))}.$$

Известно [12], что решение задачи (2.8) существует и для него выполнена оценка

$$||q^\varepsilon||_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^3)} \leqslant C||P^\varepsilon||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Теперь возьмем в интегральном тождестве $v = q^\varepsilon$ — решение задачи (2.8). Тогда, принимая во внимание приведенные выше оценки для u^ε, нетрудно получить, что

$$||p^\varepsilon||_{L^2(0,T;L^2(\Omega_{2\varepsilon}))} \leqslant C.$$

3. Усредненная модель двухфазной среды

Чтобы выписать усредненную задачу, соответствующую задаче (2.3) при $\varepsilon \to 0$, продолжим $f(x,t)$ нулем при $t < 0$ и $t > T$. Затем мы применим к (2.4)–(2.6) преобразование Лапласа по времени t, обозначая изображение функции $g(t)$ через g_λ или $g(\lambda)$, где λ — параметр преобразования Лапласа. Следуя рассуждениям, приведенным в работах [6]–[8]

при выводе усредненных моделей двухфазных сред, можно показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega}|u^{\varepsilon}_{\lambda}(x)-u_{\lambda}(x)|^2\,dx=0,\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_{2\varepsilon}}|p^{\varepsilon}_{\lambda}(x)-p_{\lambda}(x,\varepsilon^{-1}x)|^2\,dx=0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega}|e(u^{\varepsilon}_{\lambda}(x))-e(u_{\lambda}(x))-w_{\lambda}(x,\varepsilon^{-1}x)|^2\,dx=0,\qquad w_{\lambda}(x,y)=e_y(v_{\lambda}(x,y)),$$

$$v_{\lambda}(x,y)=Q^{kh}_{\lambda}(y)\frac{\partial u_{\lambda k}}{\partial x_h},\qquad p_{\lambda}(x,y)=P^{kh}_{\lambda}(y)\frac{\partial u_{\lambda k}}{\partial x_h},$$

где пары $\{Q^{kh}_{\lambda}(y)\in H^1_{\mathrm{per}}(Y)^3/\mathbb{R}^3, P^{kh}_{\lambda}(y)\in L^2_{\mathrm{per}}(Y_2)\}$ есть решения вспомогательных задач на ячейке Y (“per” означает Y-периодичность), а $u_{\lambda}(x)\in H^1_0(\Omega)^3$ — решение усредненной задачи в изображениях Лапласа

$$\rho_0\lambda^2 u_{\lambda i}=\frac{\partial\sigma^{\lambda}_{ij}}{\partial x_j}+f_{\lambda i}(x)\quad \text{в}\quad \Omega,\quad u_{\lambda}|_{\partial\Omega}=0. \tag{3.1}$$

Здесь $\rho_0=|Y_1|\rho_1+|Y_2|\rho_2$ — плотность, а σ^{λ} — тензор напряжений усредненной среды, записанный в изображениях Лапласа. Для рассматриваемой нами двухфазной среды компоненты тензора σ^{λ} имеют вид

$$\sigma^{\lambda}_{ij}=D_{ijkh}(\lambda)e_{kh}(u_{\lambda}) \tag{3.2}$$

при

$$\begin{aligned}D_{ijkh}(\lambda)=&|Y_1|a_{ijkh}+|Y_2|\lambda(\eta+\theta\lambda)(\delta_{ik}\delta_{kh}+\delta_{ih}\delta_{jk})+\int_{Y_1}a_{ijlm}e^{y}_{lm}(Q^{kh}_{\lambda})\,dy\\&+\int_{Y_2}\Big(2\lambda(\eta+\theta\lambda)e^{y}_{ij}(Q^{kh}_{\lambda})-\delta_{ij}P^{kh}_{\lambda}\Big)\,dy,\end{aligned}$$

а пары $\{Q^{kh}_{\lambda}(y),P^{kh}_{\lambda}(y)\}$ есть решения Y-периодических задач

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial y_j}\Big(\sigma^{(0)}_{ij}(Q^{kh}_{\lambda},P^{kh}_{\lambda})\Big)=0\quad\text{в}\quad Y,\quad \operatorname{div}_y Q^{kh}_{\lambda}=-\delta_{kh}\quad\text{в}\quad Y_2,\\ \displaystyle\int\limits_{Y}Q^{kh}_{\lambda}\,dy=0,\quad [Q^{kh}_{\lambda}]|_{\Gamma}=0,\quad [\sigma^{(0)}_{ij}(Q^{kh}_{\lambda},P^{kh}_{\lambda})\nu_j]|_{\Gamma}=0,\end{cases} \tag{3.3}$$

где ν_j — компоненты единичного вектора нормали к поверхности Γ,

$$\sigma^{(0)}_{ij}(Q^{kh}_{\lambda},P^{kh}_{\lambda})=\begin{cases}a_{ijkh}+a_{ijlm}e^{y}_{lm}(Q^{kh}_{\lambda})\quad\text{в}\quad Y_1,\\ \lambda(\eta+\theta\lambda)(2e^{y}_{ij}(Q^{kh}_{\lambda})+\delta_{ik}\delta_{jh}+\delta_{ih}\delta_{jk})-\delta_{ij}P^{kh}_{\lambda}\quad\text{в}\quad Y_2.\end{cases}$$

Теперь, чтобы перейти к первоначальным переменным x и t, выполним в (3.2) и (3.3) обратное преобразование Лапласа. Из (3.2) следует, что компоненты усредненного тензора напряжений σ имеют вид

$$\sigma_{ij}=D_{ijkh}(t)*e_{kh}(u),$$

где $D(t)$ — тензор ядер релаксации усредненной среды, а символ $*$ обозначает операцию свертки по переменной t,

$$g_1(t)*g_2(t)=\int_0^t g_1(t-s)g_2(s)\,ds.$$

Нетрудно видеть, что как оригиналы решений задач (3.3), так и компоненты тензора $D(t)$ зависят от дельта-функции $\delta(t)$. Покажем, что $Q^{kh}(y,t)$ и $P^{kh}(y,t)$ можно представить в виде

$$Q^{kh}(y,t) = \delta(t)Z^{kh}(y) + W^{kh}(y,t), \quad y \in Y,$$
$$P^{kh}(y,t) = \delta''(t)A^{kh}(y) + \delta'(t)B^{kh}(y) + \delta(t)C^{kh}(y) + S^{kh}(y,t), \quad y \in Y_2,$$

где $W^{kh}(y,t)$ и $S^{kh}(y,t)$ не зависят от $\delta(t)$. Действительно, из (3.3) сразу следует, что пары $\{Z^{kh}(y), A^{kh}(y)\}$ и $\{W^{kh}(y,t), S^{kh}(y,t)\}$ есть Y-периодические решения задач

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y_j}\left(\sigma_{ij}^{(s)}(Z^{kh}, A^{kh})\right) = 0 \quad \text{в} \quad Y_s \quad (s=1,2), \quad \operatorname{div}_y Z^{kh} = -\delta_{kh} \quad \text{в} \quad Y_2, \\ \displaystyle\int_Y Z^{kh} dy = 0, \quad [Z^{kh}]|_\Gamma = 0, \quad \sigma_{ij}^{(2)}(Z^{kh}, A^{kh})\nu_j|_\Gamma = 0, \end{cases} \tag{3.4}$$

и

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y_j}\left(\sigma_{ij}^{(3)}(W^{kh}, S^{kh})\right) = 0 \quad \text{в} \quad Y, \quad \operatorname{div}_y W^{kh} = 0 \quad \text{в} \quad Y_2, \\ W^{kh}(y,0) = D^{kh}(y), \quad \dfrac{\partial W^{kh}}{\partial t}(y,0) = N^{kh}(y) \quad \text{в} \quad Y_2, \\ \displaystyle\int_Y W^{kh} dy = 0, \quad [W^{kh}]|_\Gamma = 0, \quad [\sigma_{ij}^{(3)}(W^{kh}, S^{kh})\nu_j]|_\Gamma = 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

соответственно, где

$$\sigma_{ij}^{(1)}(Z^{kh}, A^{kh}) = a_{ijkh} + a_{ijlm} e_{lm}^y(Z^{kh}), \quad y \in Y_1,$$
$$\sigma_{ij}^{(2)}(Z^{kh}, A^{kh}) = 2\theta e_{ij}^y(Z^{kh}) + \theta(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}) - \delta_{ij}A^{kh}, \quad y \in Y_2,$$
$$\sigma_{ij}^{(3)}(W^{kh}, S^{kh}) = \begin{cases} a_{ijlm} e_{lm}^y(W^{kh}), \quad y \in Y_1, \\ 2\eta e_{ij}^y\left(\dfrac{\partial W^{kh}}{\partial t}\right) + 2\theta e_{ij}^y\left(\dfrac{\partial^2 W^{kh}}{\partial t^2}\right) - \delta_{ij}S^{kh}, \quad y \in Y_2. \end{cases}$$

При этом пары $\{D^{kh}(y), B^{kh}(y)\}$ и $\{N^{kh}(y), C^{kh}(y)\}$ есть Y-периодические решения задач

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y_j}\left(\sigma_{ij}^{(4)}(D^{kh}, B^{kh})\right) = 0, \quad \operatorname{div}_y D^{kh} = 0 \quad \text{в} \quad Y_2, \\ \displaystyle\int_{Y_2} D^{kh} dy = 0, \quad \sigma_{ij}^{(4)}(D^{kh}, B^{kh})\nu_j|_\Gamma = 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

и

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y_j}\left(\sigma_{ij}^{(5)}(N^{kh}, C^{kh})\right) = 0, \quad \operatorname{div}_y N^{kh} = 0 \quad \text{в} \quad Y_2, \\ \displaystyle\int_{Y_2} N^{kh} dy = 0, \quad \sigma_{ij}^{(5)}(N^{kh}, C^{kh})\nu_j|_\Gamma = \sigma_{ij}^{(1)}(Z^{kh}, A^{kh})\nu_j|_\Gamma, \end{cases} \tag{3.7}$$

соответственно, где

$$\sigma_{ij}^{(4)}(D^{kh}, B^{kh}) = 2\eta e_{ij}^y(Z^{kh}) + 2\theta e_{ij}^y(D^{kh}) + \eta(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}) - \delta_{ij}B^{kh},$$
$$\sigma_{ij}^{(5)}(N^{kh}, C^{kh}) = 2\eta e_{ij}^y(D^{kh}) + 2\theta e_{ij}^y(N^{kh}) - \delta_{ij}C^{kh}.$$

С помощью решений задач (3.4)–(3.7) тензор ядер релаксации $D(t)$ можно записать в виде

$$D(t) = \delta(t)\alpha + \delta'(t)\beta + \delta''(t)\gamma - g(t), \tag{3.8}$$

где компоненты тензоров α, β, γ, $g(t)$ заданы формулами

$$
\begin{aligned}
\alpha_{ijkh} &= |Y_1|a_{ijkh} + \int\limits_{Y_1} a_{ijlm} e^y_{lm}(Z^{kh})\,dy + \int\limits_{Y_2} \Big(2\eta e^y_{ij}(D^{kh}) + 2\theta e^y_{ij}(N^{kh}) - \delta_{ij} C^{kh}\Big) dy,\\
\beta_{ijkh} &= \eta|Y_2|(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}) + \int\limits_{Y_2} \Big(2\eta e^y_{ij}(Z^{kh}) + 2\theta e^y_{ij}(D^{kh}) - \delta_{ij} B^{kh}\Big)\,dy,\\
\gamma_{ijkh} &= \theta|Y_2|(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}) + \int\limits_{Y_2} \Big(2\theta e^y_{ij}(Z^{kh}) - \delta_{ij} A^{kh}\Big)\,dy,\\
g_{ijkh}(t) &= -\int\limits_{Y_1} a_{ijlm} e^y_{lm}(W^{kh})\,dy - \int\limits_{Y_2} \left(2\eta e^y_{ij}\left(\frac{\partial W^{kh}}{\partial t}\right) + 2\theta e^y_{ij}\left(\frac{\partial^2 W^{kh}}{\partial t^2}\right) - \delta_{ij} S^{kh}\right) dy.
\end{aligned}
$$

Нетрудно проверить, что $Z^{kh}(y) = Z^{hk}(y)$ и аналогично для $D^{kh}(y)$, $N^{kh}(y)$, $W^{kh}(y,t)$, $A^{kh}(y)$, $B^{kh}(y)$, $C^{kh}(y)$ и $S^{kh}(y,t)$. Кроме того, компоненты тензоров α, β, γ, $g(t)$ удовлетворяют классическим условиям симметрии, т.е. $\alpha_{ijkh} = \alpha_{jikh} = \alpha_{ijhk} = \alpha_{hkij}$ и аналогично для тензоров β, γ и $g(t)$.

Выполняя в (3.1) обратное преобразование Лапласа, получаем усредненную задачу, соответствующую задаче (2.3):

$$
\begin{aligned}
&\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i(x,t) \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T),\\
&u(x,t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

где, учитывая представление (3.8), компоненты усредненного тензора напряжений σ имеют вид

$$
\sigma_{ij} = \alpha_{ijkh} e_{kh}(u) + \beta_{ijkh} e_{kh}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \gamma_{ijkh} e_{kh}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) - g_{ijkh}(t) * e_{kh}(u).
$$

Таким образом, усредненная модель движения исходной двухфазной среды записывается в виде начально-краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Доказательство существования и единственности решений периодических задач (3.4)–(3.7) в случае, когда множества Y_2 и E_2 связны в Y и $\mathbb{R}^3$ соответственно, опирается на рассуждения, приведенные в работе [3] при исследовании решений периодических задач подобного типа. Кроме того, при выполнении указанных условий связности имеет место положительная определенность тензоров α и $D(\lambda)$ при $\lambda > 0$. Положительная определенность последнего тензора, в свою очередь, является достаточным условием существования и единственности усредненной задачи (3.9) [3], [14]. Вместе с тем, как будет показано в следующем параграфе на примере слоистой среды, условие связности множеств Y_2 и E_2 не является необходимым условием существования и единственности усредненной задачи (3.9).

Полученные в данном параграфе результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 3.1. *Пусть $u^\varepsilon(x,t)$ — решение задачи* (2.3). *Тогда для всех $t \in [0,T]$*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega} |u^\varepsilon(x,t)-u(x,t)|^2\,dx = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_{2\varepsilon}} |p^\varepsilon(x,t)-p(x,\varepsilon^{-1}x,t)|^2\,dx = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega} |e(u^\varepsilon(x,t))-e(u(x,t))-w(x,\varepsilon^{-1}x,t)|^2\,dx = 0,$$

где $u(x,t)$ — решение усредненной задачи (3.9),

$$w(x,y,t)=e_y(v(x,y,t)), \quad v(x,y,t)=Z^{kh}(y)\frac{\partial u_k}{\partial x_h}+W^{kh}(y,t)*\frac{\partial u_k}{\partial x_h},$$

$$W^{kh}(y,0)=D^{kh}(y), \quad \frac{\partial W^{kh}}{\partial t}(y,0)=N^{kh}(y) \quad \text{в} \quad Y_2,$$

$$p(x,y,t)=A^{kh}(y)\frac{\partial^3 u_k}{\partial x_h\partial t^2}+B^{kh}(y)\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_h\partial t}+C^{kh}(y)\frac{\partial u_k}{\partial x_h}+S^{kh}(y,t)*\frac{\partial u_k}{\partial x_h},$$

а пары $\{Z^{kh}(y),A^{kh}(y)\}$, $\{W^{kh}(y,t),S^{kh}(y,t)\}$, $\{D^{kh}(y),B^{kh}(y)\}$ и $\{N^{kh}(y),C^{kh}(y)\}$ есть Y-периодические решения задач (3.4)–(3.7).

4. Случай слоистой среды

В том случае, когда среда состоит из чередующихся плоских упругих и жидких слоев, мы можем вывести формулы для компонентов тензоров α, β, γ и $g(t)$ в явном виде. Для этого условимся считать, что слои параллельны плоскости Ox_2x_3, а множества Y_1 и Y_2 заданы в виде

$$Y_1=\bigcup_{m=0}^{M}(q_{2m},q_{2m+1})\times(0,1)^2, \quad Y_2=\bigcup_{m=1}^{M}(q_{2m-1},q_{2m})\times(0,1)^2, \quad M\ge 1,$$

где $0=q_0<q_1<q_2<...<q_{2M}<q_{2M+1}=1$. Отметим, что при таком предположении период Y_ε содержит M жидких слоев и $M+1$ упругих слоев, а в граничных условиях периодических задач $\nu_1=1$, $\nu_2=\nu_3=0$. Кроме того, если через q обозначить общую объемную долю жидкости внутри периода Y_ε, то

$$q=\frac{|\varepsilon Y_2|}{|Y_\varepsilon|}=\frac{|Y_2|}{|Y|}=\sum_{m=1}^{M}(q_{2m}-q_{2m-1}), \quad 0<q<1.$$

Выпишем решения периодических задач (3.4)–(3.7) при $k\leqslant h$. Легко проверить, что при $k=2$ и $h=3$

$$Z^{23}(y)=D^{23}(y)=N^{23}(y)=W^{23}(y,t)=(0,0,0),$$
$$A^{23}(y)=B^{23}(y)=C^{23}(y)=S^{23}(y,t)=0.$$

Чтобы выписать решения остальных периодических задач, введем кусочно-линейную функцию

$$z(y_1)=\begin{cases} -y_1+C_{2m}, & y_1\in(q_{2m-1},q_{2m}), \quad m=1,...,M,\\ \dfrac{qy_1}{1-q}+C_{2m+1}, & y_1\in(q_{2m},q_{2m+1}), \quad m=0,...,M,\end{cases}$$

где постоянные C_{2m} и C_{2m+1} заданы выражениями

$$C_1 = \frac{1}{2(1-q)}\left(q - \sum_{m=1}^{2M}(-1)^m q_m^2\right),$$

$$C_m = \frac{1}{2(1-q)}\left(-q - \sum_{k=1}^{2M}(-1)^k q_k^2 + 2\sum_{k=m}^{2M}(-1)^k q_k\right), \quad m = 2, ..., M,$$

$$C_{2M+1} = -\frac{1}{2(1-q)}\left(q + \sum_{m=1}^{2M}(-1)^m q_m^2\right).$$

Как известно [15], $z(y_1)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$z(+0) = z(1-0), \quad \int_0^1 z(y_1)\,dy_1 = 0, \quad [z]|_{y_1=q_m} = 0, \quad m = 1, ..., 2M.$$

Продолжим функцию $z(y_1)$ периодически с периодом 1 на всю числовую ось, сохранив для продолжения то же самое обозначение. Нетрудно убедиться, что решения стационарных периодических задач записываются в виде

$$Z^{ii}(y) = (z(y_1), 0, 0), \quad Z^{12}(y) = (0, z(y_1), 0), \quad Z^{13}(y) = (0, 0, z(y_1)),$$
$$A^{1i}(y) = B^{1i}(y) = 0, \quad A^{jj}(y) = -2\theta, \quad B^{jj}(y) = -2\eta,$$
$$D^{ii}(y) = D^{1j}(y) = N^{ii}(y) = (0,0,0), \quad N^{12}(y) = (0, c_1 z(y_1), 0),$$
$$N^{13}(y) = (0, 0, c_1 z(y_1)), \quad C^{11}(y) = -\frac{\lambda + 2\mu}{1-q}, \quad C^{jj}(y) = -\frac{\lambda + 2\mu q}{1-q},$$
$$C^{1j}(y) = 0, \quad c_1 = -\frac{\mu}{\theta(1-q)}, \quad i = 1,2,3, \quad j = 2,3.$$

Далее, решения эволюционных периодических задач имеют вид

$$W^{ii}(y,t) = (0,0,0), \quad W^{12}(y,t) = (0, z(y_1)w(t), 0),$$
$$W^{13}(y,t) = (0, 0, z(y_1)w(t)), \quad S^{ii}(y,t) = S^{1j}(y,t) = 0, \quad i = 1,2,3, \quad j = 2,3,$$

где $w(t)$ — решение дифференциального уравнения

$$\theta(1-q)\frac{d^2w}{dt^2} + \eta(1-q)\frac{dw}{dt} + \mu q w(t) = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$w(0) = 0, \quad \frac{dw}{dt}(0) = c_1.$$

Легко проверить, что $w(t) = c_1 w_0(t)$, где

$$w_0(t) = t\exp\left(-\frac{\eta}{2\theta}t\right),$$

если $\eta^2(1-q) = 4q\mu\theta$,

$$w_0(t) = \frac{\theta}{\sqrt{D}}\left(\exp\left(-\frac{\eta - \sqrt{D}}{2\theta}t\right) - \exp\left(-\frac{\eta + \sqrt{D}}{2\theta}t\right)\right),$$

если $\eta^2(1-q) > 4q\mu\theta$, и

$$w_0(t) = \frac{\theta}{\sqrt{-D}}\exp\left(-\frac{\eta}{2\theta}t\right)\sin\left(\frac{\sqrt{-D}}{2\theta}t\right),$$

если $\eta^2(1-q) < 4q\mu\theta$. Здесь через D обозначен дискриминант квадратного уравнения

$$\theta\lambda^2 + \eta\lambda + \frac{q\mu}{1-q} = 0, \tag{4.1}$$

т.е.

$$D = \eta^2 - \frac{4q\mu\theta}{1-q}.$$

Зная явные решения всех периодических задач, мы можем перейти к непосредственному вычислению компонентов тензоров α, β, γ и $g(t)$. Но перед этим нам следует иметь в виду, что $D_{ijkh}(t) = 0$ как только $\delta_{ij}\delta_{kh} + \delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk} = 0$. Более того, усредненная среда является трансверсально изотропной, т.е. выполнены соотношения

$$D_{2222}(t) = D_{3333}(t), \quad D_{1122}(t) = D_{1133}(t), \quad D_{1212}(t) = D_{1313}(t),$$

$$D_{2222}(t) - D_{2233}(t) = 2D_{2323}(t).$$

Теперь подставим решения задач (3.4)–(3.7) в формулы для компонентов тензоров α, β, γ и $g(t)$, приведенные в предыдущем параграфе. После несложных преобразований мы приходим к следующему результату.

Теорема 4.1. *Для слоистой среды описанного выше вида усредненные тензоры α, β, γ и $g(t)$ имеют следующие ненулевые компоненты:*

$$\begin{aligned}
&\alpha_{1111} = \frac{\lambda + 2\mu}{1-q}, \quad \alpha_{iiii} = \frac{\lambda + 2\mu(1-2q+2q^2)}{1-q}, \quad \alpha_{iijj} = \frac{\lambda + 2\mu q^2}{1-q},\\
&\alpha_{11ii} = \alpha_{ii11} = \frac{\lambda + 2\mu q}{1-q}, \quad \alpha_{1i1i} = \alpha_{1ii1} = \alpha_{i1i1} = \alpha_{i11i} = \frac{\mu}{1-q},\\
&\alpha_{ijij} = \alpha_{ijji} = \mu(1-q), \quad \beta_{iiii} = 4\eta q, \quad \beta_{iijj} = 2\eta q,\\
&\beta_{ijij} = \beta_{ijji} = \eta q, \quad \gamma_{iiii} = 4\theta q, \quad \gamma_{iijj} = 2\theta q, \quad \gamma_{ijij} = \gamma_{ijji} = \theta q,\\
&g_{1i1i}(t) = g_{1ii1}(t) = g_{i1i1}(t) = g_{i11i}(t) = \frac{\mu^2 q w_0(t)}{\theta(1-q)^2}, \quad i = 2, 3, \quad j = 5 - i.
\end{aligned}$$

Легко проверить, что α и $D(\lambda) = \alpha + \lambda\beta + \lambda^2\gamma - g(\lambda)$ при $\lambda > 0$ — положительно определенные тензоры, в то время как β, γ и $g(t)$ — вырожденные тензоры.

Для сравнения мы кратко опишем усредненные тензоры для слоистой среды, состоящей из изотропного упругого материала и несжимаемой ньютоновской жидкости (для нее следует принять $\theta = 0$ в определяющих соотношениях (2.2)). Как было показано в [16], для такой среды компоненты тензоров α и β вычисляются в точности по тем же формулам, что и выше, в то время как тензор γ — нулевой. Что касается тензора $g(t)$, то все его компоненты равны нулю, кроме

$$g_{1i1i}(t) = g_{1ii1}(t) = g_{i1i1}(t) = g_{i11i}(t) = \frac{\mu^2 q w_1(t)}{\eta(1-q)^2}, \quad i = 2, 3,$$

где мы обозначили

$$w_1(t) = \exp\left(-\frac{\mu q}{\eta(1-q)}t\right).$$

Мы видим, что сравнение свойств тензоров $g(t)$ для двух слоистых сред сводится к сравнению свойств функций $w_0(t)$ и $w_1(t)$. Прежде всего отметим общее свойство этих функций, заключающееся в том, что $w_0(t) \to 0$ и $w_1(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Однако в остальном эти функции существенно отличаются друг от друга. А именно, $w_1(t)$ — положительная функция, строго убывающая при $t > 0$, в то время как поведение функции

$w_0(t)$ зависит от доли жидкости q внутри периода. Если $q < \eta^2/(\eta^2 + 4\mu\theta)$, то $w_0(t)$ — положительная функция, которая сначала строго возрастает, достигая максимума при

$$t = \frac{\theta}{\sqrt{D}} \ln \frac{\eta + \sqrt{D}}{\eta - \sqrt{D}},$$

а затем строго убывает. Если $q = \eta^2/(\eta^2 + 4\mu\theta)$, то функция $w_0(t)$ также положительна и сначала строго возрастает, достигая максимума при $t = 2\theta/\eta$, а затем строго убывает. Если же $q > \eta^2/(\eta^2 + 4\mu\theta)$, то $w_0(t) > 0$ при

$$t \in \left(\frac{4\theta\pi k}{\sqrt{-D}}, \quad \frac{2\theta\pi}{\sqrt{-D}} + \frac{4\theta\pi k}{\sqrt{-D}} \right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

и $w_0(t) < 0$ при всех остальных значениях $t > 0$. Кроме того, функция $w_0(t)$ строго убывает на интервалах

$$\frac{2\theta}{\sqrt{-D}} \left(2\pi k + \arccos \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - D}} \right) < t < \frac{2\theta}{\sqrt{-D}} \left(\pi + 2\pi k + \arccos \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - D}} \right)$$

и строго возрастает на остальных интервалах полуоси $t > 0$. Таким образом, она имеет бесконечное число как точек максимума, так и точек минимума, причем ее максимальные и минимальные значения экспоненциально убывают по модулю при $t \to +\infty$.

В заключение необходимо отметить, что мы впервые обнаружили случай наличия максимумов у ядер сверток интегро-дифференциальных уравнений, возникающих при усреднении слоистых двухфазных сред с периодической структурой. Ранее нами было показано, что если первой фазой является упругий материал или вязкоупругий материал Кельвина-Фойгта, а второй фазой — вязкоупругий материал Кельвина-Фойгта или вязкая ньютоновская жидкость, то ядрами сверток усредненных уравнений являются затухающие экспоненты [16]–[19]. Таким образом, для всех этих сред ядра сверток — положительные, строго убывающие функции при $t > 0$. В отличие от них, для среды, состоящей из упругого материала и жидкости Кельвина-Фойгта, число интервалов монотонности и точек максимума ядер сверток зависит от доли жидкости q внутри ячейки периодичности. А именно, можно найти такое число M_0, что при $0 < q \leqslant M_0$ ядра сверток имеют два интервала монотонности и одну точку максимума, а при $M_0 < q < 1$ — бесконечное число чередующихся интервалов возрастания и убывания, а также точек максимума и минимума.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. Sanchez-Hubert. *Asymptotic study of the macroscopic behavior of a solid-liquid mixture* // Math. Methods Appl. Sci. 2 (1980), 1–18.
2. Э. Санчес-Паленсия. *Неоднородные среды и теория колебаний.* М.: Мир. 1984. 472 с.
3. R.P. Gilbert, A. Mikelić. *Homogenizing the acoustic properties of the seabed: Part I* // Nonlinear Analysis. **40**:1 (2000), 185–212.
4. Th. Clopeau, J.L. Ferrin , R.P. Gilbert, A. Mikelić. *Homogenizing the acoustic properties of the seabed, Part II* // Math. and Comput. Modelling. **33** (2003), 821–841.
5. A. Meirmanov. *A description of seismic acoustic wave propagation in porous media via homogenization* // SIAM J. Math. Anal. **40**:3 (2008), 1272–1289.
6. В.В. Шумилова. *Усреднение уравнений акустики для частично перфорированного вязкоупругого материала с каналами, заполненными жидкостью* // СМФН. **39** (2011), 185–198.
7. А.С. Шамаев, В.В. Шумилова. *Усреднение уравнений акустики для вязкоупругого материала с каналами, заполненными вязкой сжимаемой жидкостью* // Известия РАН. МЖГ. 2 (2011), 92–103.
8. А.С. Шамаев, В.В. Шумилова. *Усреднение уравнений акустики для пористого вязкоупругого материала с долговременной памятью, заполненного вязкой жидкостью* // Диф. уравнения. **48**:8 (2012), 1174–1186.

9. S.A. Sazhenkov, E.V. Sazhenkova, A.V. Zubkova. *Small perturbations of two-phase fluid in pores: effective macroscopic monophasic viscoelastic behavior* // Сиб. электрон. матем. изв. **11** (2014), 26–51.
10. А.П. Осколков. *Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта* // Тр. МИАН СССР. **179** (1988), 126–164.
11. В.Г. Звягин, М.В. Турбин. *Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина–Фойгта* // СМФН. **31** (2009), 3–144.
12. Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. *Неоднородные граничные задачи и их приложения. Т. 1.* М.: Мир. 1971. 372 с.
13. А.Л. Пятницкий, Г.А. Чечкин, А.С. Шамаев. *Усреднение. Методы и приложения.* Новосибирск: Тамара Рожковская. 264 с.
14. R. Dautray, J.-L. Lions. *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Vol. 5: Evolution Problems I.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer. 2000. 739 p.
15. V.V. Shumilova. *Homogenization of the system of acoustic equations for layered viscoelastic media* // J. Math. Sci. **261** (2022), 488–501.
16. В.В. Шумилова. *Эффективный тензор ядер релаксации слоистой среды, состоящей из вязкоупругого материала и вязкой несжимаемой жидкости* // Известия РАН. МЖГ. 2 (2023), 1–9.
17. А.С. Шамаев, В.В. Шумилова. *Спектр одномерных колебаний в комбинированной слоистой среде, состоящей из вязкоупругого материала и вязкой сжимаемой жидкости* // Известия РАН. МЖГ. 1 (2013), 17–25.
18. А.С. Шамаев, В.В. Шумилова. *Асимптотическое поведение спектра одномерных колебаний в среде из слоев упругого материала и вязкоупругого материала Кельвина-Фойгта* // Тр. МИАН. **295** (2016), 218–228.
19. В.В. Шумилова. *Спектр собственных колебаний слоистой среды, состоящей из материала Кельвина-Фойгта и вязкой несжимаемой жидкости* // Сиб. электр. матем. известия. **17** (2020), 21–31.

Алексей Станиславович Шамаев,
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,
пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1,
119526, Москва, Россия
E-mail: v.v.shumilova@mail.ru

Владлена Валерьевна Шумилова,
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,
пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1,
119526, Москва, Россия
E-mail: v.v.shumilova@mail.ru