УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Том 110, кн. 3 МАТЕМАТИКА 1950

О ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНЕСЕНИИ ДУАЛЬНЫХ ВЕКТОРОВ

А. П. Норден

I.

Принцип перенесения Котельникова [1], согласно которому всякой прямой ставится в соответствие вектор дуального пространства, позволяет установить ряд замечательных аналогий между геометрией линейчатого пространства и геометрией на сфере. С этой точки зрения естественно поставить вопрос о тех фактах геометрии прямых, которые соответствуют параллельному перенесению дуальных векторов.

Рассмотрим две линейчатые поверхности, пересекающиеся так, что их образующие перпендикулярны в точках своего пересечения.

Обозначив через R и A дуальные векторы образующих данных поверхностей, будем иметь при надлежащей параметризации условие их перпендикулярности

$$\mathbf{R}\mathbf{A} = 0. \tag{1}$$

Если смотреть теперь на уравнение

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{t}),$$

как на уравнение некоторой кривой Γ дуальной сферы единичного радиуса, то, с другой стороны, можно считать, что уравнение

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$$

выражает последовательность единичных векторов, заданных в точках этой кривой и расположенных в касательных плоскостях дуальной сферы в силу условия (1).

Будем говорить, что вектор A переносится параллельно вдоль кривой Γ, если

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lambda \mathbf{R}. \tag{2}$$

Это условие аналогично обычному условию параллельного перенесения в смысле Леви-Чивитта по поверхности сферы, т. к. у сферы радиус-вектор точки идёт по нормали. Для того, чтобы охарактеризовать геометрически связь между линейчатыми поверхностями, дуальные векторы которых R и A подчинены условиям (1) и (2), рассмотрим поверхность A.

Из обобщённых формул Серре-Френе ([2], § 121) имеем

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = P\mathbf{A}_2$$

или, вводя дуальную длину дуги s,

$$\frac{d\mathrm{A}}{ds} = \mathrm{A}_2, \tag{3}$$

где A_2 есть единичный дуальный вектор стрикционной нормали поверхности A.

Так как R есть тоже единичный вектор, а знак при s может быть выбран произвольно, то

$$\mathrm{A}_2 = \mathrm{R}. \tag{4}$$

Отсюда следует: *для того, чтобы дуальный вектор* A *переносился параллельно по кривой дуальной сферы* $\mathrm{R} = \mathrm{R}(\mathrm{t})$, *необходимо и достаточно, чтобы образующая линейчатой поверхности* R *совпадала со стрикционной нормалью поверхности* A. Иными словами: поверхности A и R пересекаются под прямым углом, а линия их пересечения есть ортогональная траектория образующих поверхности R и стрикционная линия поверхности A.

Связь между параллельным перенесением в обычном смысле и параллельным перенесением дуальных векторов не ограничивается простой аналогией. Чтобы выяснить эту более глубокую связь, примем во внимание известный факт: стрикционная линия косой линейчатой поверхности характеризуется тем, что единичный вектор образующей переносится вдоль неё параллельно в смысле Леви-Чивитта. Это свойство стрикционной линии можно использовать для характеристики параллельного перенесения вдоль полоски ([2], § 38).

Для того, чтобы единичный вектор переносился параллельно по полоске, необходимо и достаточно, чтобы линейчатая поверхность, содержащая данную полоску с образующей, направленной по данному вектору, имела стрикционную линию, совпадающую с кривой полоски.

Назовём *ортогональной полоской* данной линейчатой поверхности полоску, нормаль которой совпадает с образующей поверхности. Тогда условие параллельного перенесения дуального вектора можно сформулировать ещё так: *Для того, чтобы дуальный вектор* A *переносился параллельно по кривой дуальной сферы* R *необходимо и достаточно, чтобы направляющий вектор прямой* A *переносился параллельно по ортогональной полоске поверхности* R.

Рассмотрим некоторые свойства перенесения дуальных векторов; прежде всего докажем, что *дуальный угол двух векторов, переносимых параллельно по одной кривой, сохраняется*. Действительно, если это есть векторы A и B, а $\theta = \widehat{\mathrm{AB}}$, то

$$d\cos\theta = d(\mathrm{AB}) = d\mathrm{A}\cdot\mathrm{B} + \mathrm{A}\cdot d\mathrm{B} = \lambda\,\mathrm{RB} + \mu\,\mathrm{AR} = 0$$

или

$$\theta = \varphi + \varepsilon\overline{\varphi} = \mathrm{const}.$$

Так что $\underline{\varphi} = \mathrm{const}$ и $\overline{\varphi} = \mathrm{const}$.

Так как φ есть расстояние между прямыми A и B, и оно измеряется по образующей поверхности $\underline{\mathrm{R}}$, которая служила их общим перпендикуляром, то постоянство $\overline{\varphi}$ выражает известный факт постоянства отрезка геодезических между двумя ортогональными траекториями. Условие $\varphi = \mathrm{const}$ показывает, что угол между двумя векторами, переносящимися параллельно по двум различным ортогональным полоскам линейчатой поверхности постоянен. Иными словами: угол между соответствующими образующими двух линейчатых поверхностей с общими стрикционными нормалями постоянен. В частности, отсюда сразу следует, что стрикционная линия поверхности стрикционных касательных совпадает со стрикционной линией данной поверхности. Если $R_1 = R$; $R_2 = \dot{R}P^{-1}$; $R_3 = [R_1 R_2]$ есть основные дуальные векторы линейчатой поверхности $R = R(t)$, то для них имеют место обобщённые формулы Серре-Френе, которые мы уже цитировали выше:

$$\dot{R}_1 = P \cdot R_2$$

$$\dot{R}_2 = -PR_1 + QR_3$$

$$\dot{R}_3 = -QR_2 .$$

Введя элемент дуальной дуги $ds^2 = dR^2$, перепишем их в виде

$$\frac{dR_1}{ds} = R_2 ,$$

$$\frac{dR_2}{ds} = -R_1 + KR_3 , \tag{5}$$

$$\frac{dR_3}{ds} = -KR_2 , \tag{6}$$

где

$$K = \frac{Q}{P} .$$

Рассмотрим теперь вектор $A = A(t)$, заданный в точках дуальной кривой $R = R(t)$. Если этот вектор перпендикулярен R и единичен, то можно положить

$$A = \cos \Phi \, R_2 + \sin \Phi \cdot R_3,$$

где Φ дуальный угол между вектором A и касательным вектором к данной кривой R_2, соответствующим стрикционной нормали поверхности R.

Дифференцируя, получим

$$dA = -\cos \Phi \, ds \cdot R_1 + (-\sin \Phi \, R_2 + \cos \Phi \, R_3)(d\Phi + K\,ds).$$

Если вектор A переносится параллельно, то в силу (2)

$$d\Phi + K ds = 0,$$

или

$$K = -\frac{d\Phi}{ds} . \tag{7}$$

Итак: *инвариант K есть предел отношения угла поворота вектора касательной, по отношению к некоторому вектору, переносимому вдоль кривой параллельно к соответствующей бесконечно малой дуальной дуге.*

Очевидно, мы имеем все основания назвать инвариант K *геодезической кривизной* кривой дуальной сферы. Интеграл геодезической кривизны:

$$\int_{t_0}^{t} K ds = \int_{t_0}^{t} Q\, dt = \Phi_0 - \Phi$$

равен углу поворота вектора касательной кривой $\mathbf{R}$ по отношению к вектору, переносимому параллельно вдоль кривой.

Отделяя действительную и мнимую части $Q = q + \varepsilon \bar{q}\ \Phi = \varphi + \varepsilon \bar{\varphi}$ и полагая $\theta_0 = 0$, получим геометрическое истолкование интегралов:

1. $\int_{t_0}^{t} q dt$, исчисленный на промежутке между двумя прямолинейными образующими есть угол между стрикционной нормалью в точке конечной образующей с вектором стрикционной нормали начальной образующей, который перенесён параллельно на конечную образующую по ортогональной полоске поверхности.

2. $\int_{t_0}^{t} \bar{q}\, dt$, есть расстояние точки стрикции на конечной образующей от точки пересечения этой образующей с ортогональной траекторией образующих, проведённой из начальной стрикционной точки ([2], § 121).

В связи с рассмотрением интеграла $\int K ds$ возникает вопрос о существовании в геометрии дуальной сферы формулы, аналогичной формуле Гаусса-Бонне.

В применении к обычной сфере единичного радиуса она имеет вид:

$$\Sigma + \oint K ds = 2\pi, \tag{8}$$

где Σ есть площадь односвязной области, а интеграл распространён на ограничивающий область контур, не имеющий угловых точек и точек самопересечения. Имея в виду, что $\oint K ds$ выражает угол поворота касательной по отношению к вектору, переносимому параллельно, и замечая, что после обхода замкнутого контура вектор касательной делает полный оборот, приходим к заключению, что площадь

$$\Sigma = \Psi, \tag{9}$$

где Ψ есть угол поворота вектора, обнесённого параллельно по замкнутому контуру на поверхности сферы.

Для распространения приведённых соотношений на дуальную сферу у нас нехватает понятия дуальной площади, однако мы можем *определить* это новое понятие, требуя выполнения равенства (9). Итак: *площадью области дуальной сферы, ограниченной контуром, который соответствует линейчатой поверхности, не имеющей самопересечения и угловых образующих, назовём угол поворота дуального вектора, обнесённого параллельно по этому замкнутому контуру.*

Пусть $\Sigma = \sigma + \varepsilon\rho$ площадь дуальной области, определённая обобщённой формулой Гауса-Бонне. Отделяя действительные части в формуле (8), получим

$$\sigma + \oint K ds = 2\pi; \quad \rho + \oint q^* dt = 0,$$

где k и s есть геодезическая кривизна и дуга кривой сферического отображения поверхности R.

Сравнивая полученную формулу с формулой Гаусса-Бонне для сферы единичного радиуса, приходим к выводу, что *действительная часть дуальной площади есть площадь части этой сферы, ограниченная замкнутым контуром, отображающим соответствующую замкнутую линейчатую поверхность.*

Чтобы истолковать мнимую часть дуальной площади, заменим в формуле (8)

$$\oint K ds = \oint Q dt = \oint q dt + \varepsilon \oint q^* dt,$$

откуда

$$\rho + \oint q^* dt = 0.$$

Но последний интеграл выражает, как мы это видели, удаление точки ортогональной траектории от точки стрикции.

Предположим, что ортогональная траектория выходит из точки стрикции M_1, и возвращаясь после обхода поверхности на эту же образующую, пересекает её в точке M_2. Из свойств ортогональной траектории геодезического семейства непосредственно следует, что длина отрезка M_1M_2 не зависит от выбора начальной точки. Будем называть M_1M_2 *шагом ортогональной траектории на данной замкнутой линейчатой поверхности.*

Очевидно, что

$$\left| \oint q^* dt \right| = M_1 M_2.$$

Итак, *абсолютная величина мнимой части дуальной площади равна шагу ортогональной траектории на соответствующей замкнутой линейчатой поверхности.*

II.

Перейдём к рассмотрению параллельного перенесения дуальных векторов по поверхностям, принадлежащим некоторой прямолинейной конгруенции.

Пусть

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}(u^1, u^2)$$

дуальный вектор луча конгруенции, а u^1 и u^2 — действительные параметры.

Обозначая

$$\mathbf{N}_i = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u^i}; \quad \mathbf{N}_{ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial u^i \partial u^j}$$

будем иметь в силу независимости векторов $\mathbf{N}_i$ и $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{N}_{ij} = \Gamma^k_{ij}\mathbf{N}_k - G_{ij}\mathbf{N}, \qquad (10)$$

где Γ^k_{ij} и G_{ij} — дуальные скаляры.

Умножая скалярно на $\mathbf{N}$ и принимая во внимание, что

$$\mathbf{N}^2 = 1; \quad \mathbf{N}\mathbf{N}_i = 0; \quad \mathbf{N}_{ij}\mathbf{N} + \mathbf{N}_i\mathbf{N}_j = 0 \qquad (11)$$

получим:

$$G_{ij} = \mathbf{N}_i\mathbf{N}_j,$$

откуда

$$G_{ij}\, du^i du^j = d\mathbf{N}^2 = ds^2,$$

где ds есть дуальный линейный элемент конгруенции, так что G_{ij} есть её дуальный метрический тензор.

Предположим, что некоторый дуальный вектор $\mathbf{A}$, перпендикулярный $\mathbf{N}$, переносится параллельно по некоторой поверхности конгруенции $u^i = u^i(t)$. Представим $\mathbf{A}$ в виде:

$$\mathbf{A} = A^k\mathbf{N}_k,$$

где A^k (дуальные числа, преобразующиеся по тензорному закону) есть его контравариантные координаты. Условие параллельного перенесения

$$\frac{d\mathbf{A}}{ds} = \lambda\mathbf{N}$$

примет вид:

$$\left(\frac{dA^k}{ds} + \Gamma^k_{mn}\frac{du^m}{ds}A^n\right)\mathbf{N}_k - G_{mn}\frac{du^m}{ds}A^n\cdot\mathbf{N} = \lambda\,\mathbf{N},$$

откуда, в силу независимости $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}_i$,

$$\frac{dA^k}{ds} + \Gamma^k_{mn}\frac{du^m}{ds}A^n = 0. \qquad (14)$$

Если ввести абсолютное дифференцирование, воспользовавшись для этого величинами Γ^k_{mn}, то условие параллельного перенесения примет вид:

$$\delta A^k = 0. \qquad (15)$$

Переписав уравнения (10) в виде:

$$\nabla_j\mathbf{N}_i = -G_{ij}\mathbf{N}, \qquad (16)$$

получаем из формулы (12)

$$\nabla_k G_{ij} = 0. \qquad (17)$$

Откуда следует, что величины Γ^k_{mn} есть скобки Кристоффеля тензора G_{ij}.

Произведём разделение действительных и мнимых частей. Прежде всего положим:

$$G_{ij} = g_{ij} + \varepsilon\, h_{ij}, \qquad (18)$$

где, как известно, g_{ij} есть метрический тензор сферического отображения конгруенции, а h_{ij} есть тензор второй квадратичной формы Санниа. Обозначая через $\overset{0}{\Gamma}{}^k_{ij}$ скобки Кристоффеля тензора g_{ij}, положим:

$$\Gamma^k_{ij} = \overset{0}{\Gamma}{}^k_{ij} + \Sigma^k_{ij} = \overset{0}{\Gamma}{}^k_{ij} + \sigma^k_{ij} + \varepsilon s^k_{ij}.$$

Тогда

$$\nabla_k G_{ij} = \overset{0}{\nabla}_k G_{ij} - \Sigma^m_{ki} G_{mj} - \Sigma^m_{kj} G_{im} =$$

$$= \overset{0}{\nabla}_k g_{ij} + \varepsilon \overset{0}{\nabla}_k h_{ij} - \Sigma^m_{ki} g_{mj} - \Sigma^m_{kj} g_{im} - \varepsilon\,(\Sigma^m_{kj} h_{mj} + \Sigma^m_{kj} h_{im}) =$$

$$= -2\sigma_{k\,(i}{}^{m} g_{j)m} + \varepsilon\,(\overset{0}{\nabla}_k\; h_{ij} - 2s_{k\,(i}{}^{m} g_{j)m} - 2\,\sigma_{k\,(i}{}^{m} h_{j)m}).$$

откуда

$$\sigma^k_{ij} = 0 \tag{19}$$

$$\overset{0}{\nabla}_k h_{ij} = 2s_{k(i}{}^{m} g_{j)m};$$

переставляя в последнем равенстве индексы циклически и складывая, получим:

$$s^k_{ij} = \frac{1}{2}\, g^{kr}\,(\overset{0}{\nabla}_i h_{jr} + \overset{0}{\nabla}_j h_{ir} - \overset{0}{\nabla}_r h_{ij}), \tag{20}$$

откуда

$$\Gamma^k_{ij} = \overset{0}{\Gamma}{}^k_{ij} + \varepsilon\,\frac{1}{2}\, g^{kr}\,(\overset{0}{\nabla}_i h_{jr} + \overset{0}{\nabla}_j h_{ir} - \overset{0}{\nabla}_r h_{ij}). \tag{21}$$

Составим условие интегрируемости уравнений (16). При этом будем иметь в виду, что в бинарной области тензор Римана $R_{ijk}{}^{l}{}_{.}$ выражается через тензор Риччи

$$R_{ij} = R\overset{e}{e}_{ij}. \tag{22}$$

следующим образом:

$$R_{ijk}{}^{l}{}_{.} = 2\,\delta^l_{[i} R_{j]k}. \tag{23}$$

Дифференцируя и альтернируя, получим

$$\nabla_{[k} \nabla_{j]} N_i = \delta_{[k}{}^{l} R_{j]i} \mathrm{N}_l = -\,G_{i[j} \delta^l_{k]} \mathrm{N}_l,$$

откуда

$$R_{ij} = -\,G_{ij}, \tag{24}$$

что характеризует дуальную сферу как поверхность, кривизна которой равна единице.

Если разделить действительную и мнимую части последней формулы, то получится соотношение между основными тензорами Санниа в том виде, в котором они приведены у Злотника [3]. Эта же формула позволяет получить интеграл, выражающий дуальную площадь, связанную с замкнутой поверхностью конгруенции.

Аналогично тому, как это делается в римановой геометрии, покажем, что приращение вектора, которое он получает после параллельного обвода по бесконечно малому замкнутому контуру, есть

$$\triangle A^l = \frac{1}{2}\, R_{mnk}{}^{l}{}_{.} du^m \delta u^n A^k,$$

или в силу (23) и (24)

$$\Delta A^l = du^i \delta u^k A_k - \delta u^i du^k A_k \qquad \text{или}$$

$$\Delta \mathbf{A} = d\mathbf{N}(\delta \mathbf{N}\mathbf{A}) - \delta \mathbf{N}(d\mathbf{N}\mathbf{A}) = [\mathbf{A}[d\mathbf{N}\delta\mathbf{N}]] =$$
$$= [\mathbf{A}[\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2]]\ (du^1 \delta u^2 - du^2 \delta u^1).$$

С другой стороны,

$$(\Delta \mathbf{A})^2 = (\Delta\psi)^2 = (\Delta\sigma)^2,$$

где $\Delta\psi$ есть угол поворота вектора после обвода его по бесконечно малому контуру, равный дуальной площади, связанной с этим контуром. Отсюда бесконечно малая площадь

$$(\Delta\sigma)^2 = A^2 [\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2]^2 (du^1 \delta u^2 - \delta u^1 du^2) = [\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2]^2 \ (du^1 \delta u^2 - \delta u^1 du^2) =$$
$$= (G_{11}G_{22} - G_{12}{}^2)\ (du^1 \delta u^2 - \delta u^1 du^2).$$

Таким образом, конечная площадь Σ выразится интегралом:

$$\Sigma = \iint \sqrt{G_{11}G_{22} - G_{12}}\ du^1 du^2. \tag{25}$$

Отделяя действительную и мнимую части, придём к известному соотношению:

$$\Sigma = \iint (1 + \varepsilon h)\ d\sigma \tag{26}$$

([2], § 124), где $d\sigma$ есть элемент площади сферического отображения, а

$$h = g^{ij} h_{ij}$$

есть средний параметр конгруенции.

Так как мнимая часть дуальной площади равна шагу ортогональной траектории на замкнутой линейчатой поверхности конгруенции, то из (26) следует, что

$$h = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{\psi}{\Delta\sigma}. \tag{27}$$

Таким образом: *средний параметр конгруенции есть предел отношения шага ортогональной траектории замкнутой линейчатой поверхности к бесконечно малой площади сферического отображения этой поверхности.*

С точки зрения этого истолкования становится очевидным необходимость обращения в нуль среднего параметра для нормальных конгруенций. Действительно, всякая ортогональная траектория такой конгруенции лежит на поверхности, ортогональной лучам конгруенции и, следовательно, замыкается при возвращении на начальную образующую.

Более общий класс конгруенций, для которых

$$h = \text{const}$$

характеризуется тем, что отношение шага ортогональной траектории к площади сферического отображения одинаково для всех замкнутых линейчатых поверхностей конгруенции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Котельников А. П. Винтовое исчисление и некоторые приложения его к геометрии и механике. Казань, 1935.
2. Бляшке В. Дифференциальная геометрия, т. 1, ОНТИ, 1935.
3. Злотник М. Mathem. Zeitschrift, 28 (1928), стр. 107—115.