В. А. Аркадьев, А. К. Погребков, М. К. Поливанов, Разложения по квадратам, симплектические и пуассоновы структуры, ассоциированные с задачей Штурма–Лиувилля. II, *ТМФ*, 1988, том 75, номер 2, 170–186

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 75, № 2
май, 1988

РАЗЛОЖЕНИЯ ПО КВАДРАТАМ, СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ И ПУАССОНОВЫ СТРУКТУРЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ЗАДАЧЕЙ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ. II

Аркадьев В. А., Погребков А. К., Поливанов М. К.

На основе уточнения понятия касательного вектора, обусловленного спецификой задачи Штурма – Лиувилля, из симплектической формы Захарова – Фаддеева выведена скобка Пуассона, модифицированная по сравнению с гарднеровской за счет специальных граничных членов. Эта скобка невырождена, и в ней разделяются переменные дискретного и непрерывного спектров.

ВВЕДЕНИЕ

В статье [1] были рассмотрены свойства данных рассеяния задачи Штурма — Лиувилля

$$(0.1)\qquad -y''+u(x)y=k^2y,\ -\infty<x<+\infty,$$

в быстроубывающем случае: $u(x)\in\mathscr{S}$, а также свойства вариаций данных рассеяния по потенциалу $u(x)$. Было установлено, что среди этих вариаций имеются неубывающие на асимптотиках $|x|\to\infty$. Этот факт, никак не связанный с гладкостью или скоростью убывания $u(x)$ (можно брать даже финитные u), порождается тем, что в общем положении элементы приведенной матрицы монодромии $a(k)$ и $b(k)$ имеют полюсные особенности по k в нуле [2]. Это заставляет нас рассматривать асимптотики вариаций типа $\delta a(k)/\delta u(x)$, $\delta b(k)/\delta u(x)$ при $\operatorname{Im} k=0$ в смысле обобщенных функций из $\mathscr{S}'$ по k. Этой специфике задачи (0.1), на наш взгляд, уделялось недостаточно внимания, что и потребовало более тщательного анализа, составляющего предмет этой серии статей.

В данной работе мы приведем уточненные определения и выводы, относящиеся к известной гарднеровской скобке Пуассона [3]

$$(0.2)\qquad \{F,G\}_G=\int dx\frac{\delta F}{\delta u(x)}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta G}{\delta u(x)},$$

а также рассмотренной в [4] соответствующей симплектической форме

$$(0.3)\qquad \omega(\xi,\eta)=\int dx\int dy\frac{\varepsilon(y-x)}{2}\xi(x)\eta(y),$$

$\varepsilon(x)$ — знаковая функция. Скобка (0.2) является основной в иерархии пуассоновых структур, ассоциированных с задачей (0.1), и при выборе в качестве гамильтониана

$$H=\int dx\left[u^3(x)+\frac{1}{2}u'(x)^2\right] \tag{0.4}$$

порождает классическое уравнение Кортевега — де Вриза [2—6]

$$u_t-6uu_x+u_{xxx}=0 \tag{0.5}$$

как вполне интегрируемую гамильтонову систему. В (0.5) индексы t и x означают соответствующие частные производные (впрочем, производные по x мы часто обозначаем штрихом).

Скобка (0.2) хорошо определена для таких функционалов $F(u)$ и $G(u)$, вариации которых спадают при $|x|\to\infty$. Однако факт полной интегрируемости устанавливается переходом от потенциала $u(x)$ задачи (0.1) к данным рассеяния, вариации которых, как уже упоминалось, не исчезают на асимпотиках. Точнее, в [1] были получены следующие результаты. Введем вместо сингулярных в нуле элементов $a(k)$ и $b(k)$ приведенной матрицы монодромии функции

$$A(k)=ka(k),\quad B(k)=kb(k), \tag{0.6}$$

регулярные при всех k ($\operatorname{Im}k\geqslant 0$ и $\operatorname{Im}k=0$, соответственно) и удовлетворяющие условию

$$A(0)=-B(0)=ic, \tag{0.7}$$

где вещественная константа c в общем случае отлична от нуля. Данные рассеяния в [1] определялись как

$$\rho(k)=\frac{2}{\pi}\ln\frac{|A(k)|^2}{k^2},\qquad \varphi(k)=-\arg i(-1)^N B(k), \tag{0.8}$$

$\varkappa_n$, $n=1,\ldots,N$, отвечают нулям $a(k)$ в верхней полуплоскости ($a(i\varkappa_n)=$ $=0$), а переменные σ_n, $n=1,\ldots,N$, связаны с коэффициентами пропорциональности решений Йоста в точках $i\varkappa_n$; подробнее см. формулы (1.1)—(1.7), (1.10)—(1.13) в [1]. Там же (см. (2.6)—(2.13)) показано, что

$$\begin{gathered}\frac{\delta A(k)}{\delta u(x)}\to\frac{i}{2}\frac{A(k)}{k+i0},\qquad \frac{\delta B(k)}{\delta u(x)}\to\mp\frac{i}{2}\frac{B(k)}{k\mp i0},\\ \frac{\delta\rho(k)}{\delta u(x)}\equiv\Phi_1(x,k)\to 2\delta(k),\qquad \frac{\delta\varphi(k)}{\delta u(x)}\equiv\Phi_2(x,k)\to\pm\frac{1}{2k},\\ \frac{\delta\varkappa_n}{\delta u(x)}\equiv\Phi_{1n}(x)\to 0,\qquad \frac{\delta\sigma_n}{\delta u(x)}\equiv\Phi_{2n}(x)\to\mp 2,\qquad x\to\pm\infty.\end{gathered} \tag{0.9}$$

Таким образом, действительно, лишь вариации $\varkappa_n$ исчезают на асимптотиках, в то время как вариации остальных данных рассеяния имеют конечные ненулевые пределы. На таких функционалах, понятно, скобка (0.2) теряет антисимметрию. В этой связи в [6] использовалось явно антисимметризованное выражение

$$\{F,G\}_{\mathrm{as}}=\frac{1}{2}\int dx\left(\frac{\delta F}{\delta u(x)}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta G}{\delta u(x)}-\frac{\delta G}{\delta u(x)}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta F}{\delta u(x)}\right), \tag{0.10}$$

что совпадает с (0.2) лишь при $\left.\dfrac{\delta G}{\delta u(x)}\dfrac{\delta F}{\delta u(x)}\right|_{x=-\infty}^{x=+\infty}=0.$

Легко видеть, что выражения (0.2) и (0.10) существенно различны. Выберем в качестве G первый из локальных интегралов (обозначения см. в [1])

$$(0.11)\qquad J_{-1}=\int dx\,u(x).$$

Тогда

$$(0.12)\qquad \{F,J_{-1}\}_G=0,\qquad \{F,J_{-1}\}_{\text{as}}=\frac{1}{2}\left[\frac{\delta F}{\delta u(-)}-\frac{\delta F}{\delta u(+)}\right],$$

здесь и далее мы обозначаем

$$(0.13)\qquad \frac{\delta F}{\delta u(\pm)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\delta F}{\delta u(x)}$$

Таким образом, J_{-1} аннулирует гарднеровскую скобку (впрочем, если его подставить вместо F, то и это утверждение неверно) и не аннулирует антисимметризованную, если не выполняется специальное условие на асимптотики F: $\dfrac{\delta F}{\delta u(+)}=\dfrac{\delta F}{\delta u(-)}$. Последнее условие, хотя сам J_{-1} ему удовлетворяет, неестественно в качестве условия на класс допустимых функционалов: как видно из (0.9) ему не удовлетворяют $\varphi(k)$ и σ_n. Понятно, что J_{-1} аннулирует, в частности, функционалы с исчезающими асимптотиками, поэтому естественно называть его псевдоаннулятором для скобки (0.10). С существованием такого псевдоаннулятора связана еще одна особенность: знак интеграла нельзя проносить под знак скобки. Например:

$$(0.14)\qquad \{u(x),J_{-1}\}_{\text{as}}=0,\qquad \left\{\int_{-\infty}^{x}dy\,u(y),J_{-1}\right\}_{\text{as}}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, здесь мы столкнулись с непривычной ситуацией: J_{-1} аннулирует $u(x)$, но не аннулирует некоторые функционалы от u. В этой связи в работе [7] была предложена модифицированная скобка Пуассона

$$(0.15)\qquad [F,G]=\{F,G\}_{\text{as}}+\frac{1}{2}\left(\frac{\delta F}{\delta u(+)}\frac{\delta G}{\delta u(-)}-\frac{\delta F}{\delta u(-)}\frac{\delta G}{\delta u(+)}\right)\equiv$$
$$\equiv\int dx\int dy\,\frac{\varepsilon(y-x)}{2}\left(\frac{\delta F}{\delta u(x)}\right)'\left(\frac{\delta G}{\delta u(y)}\right)'.$$

Напомним, что $\varepsilon(x)$ — знаковая функция, а штрих означает дифференцирование по x или y. Для этой скобки J_{-1} является аннулятором для всех функционалов, в том числе и с произвольными конечными значениями вариационных производных на асимптотиках. В [7] были вычислены значения скобки (0.15) для данных рассеяния. При этом выяснился следующий удивительный факт: непрерывные и дискретные степени свободы относительно этой скобки не разделяются (см. также формулы (3.22) ниже). На самом деле, если исправить мелкие арифметические неточности на с. 53—57 в книге [6], то обнаружится, что этот же эффект имеет место и для скобки (0.10). Но в то же время он явным образом противоречит факту диагонализации симплектической формы (0.3) в терминах данных рассеяния, установленному в [4].

Для устранения этих парадоксов следует прежде всего дать четкие определения объектов, с которыми мы имеем дело. Начнем с описания класса функционалов $F(u)$, естественного для рассматриваемой задачи. В него должны входить регулярные элементы $A(k)$ и $B(k)$ приведенной матрицы монодромии и дискретные и непрерывные данные рассеяния. Учитывая (0.9), а также подробное обсуждение в работе [1], мы включим в класс рассматриваемых функционалов те, для которых существуют первая и вторая вариационные производные Фреше, причем $(\delta F/\delta u(x))_x \in \mathcal{S}$, $(\delta^2 F/\delta u(x)\,\delta u(y))_{xy} \in \mathcal{S}$ и как первая, так и вторая вариации имеют конечные пределы при $x\to\pm\infty$. При этом если функционал зависит от спектрального параметра k, то при $\operatorname{Im} k=0$ эти вариационные производные, равно как и пределы по x, следует понимать в смысле $\mathcal{S}'$ по k. Именно в таком смысле понимаются пределы в (0.9), и в этой связи следует проявлять особую осторожность, поскольку $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\delta F}{\delta u(x)} \dfrac{\delta G}{\delta u(x)}$, вообще говоря, в таком случае не равен произведению пределов.

Функционалы такого типа являются допустимыми в терминологии [8], поскольку в любой из перечисленных скобок $\{u(x), F\} = (\delta F/\delta u(x))'$, т. е. быстрое убывание $u(x)$ сохраняется в динамике, заданной таким функционалом F, для которого пределы (0.13) могут отличаться от нуля.

Требование существования вторых вариационных производных было включено, поскольку они входят в тождество Якоби. При этом, как выяснилось в [1] (см. конец раздела 2), пределы $\delta^2 F/\delta u(x)\delta u(y)$ по x и y, вообще говоря, зависят от порядка, т. е. среди допустимых есть функционалы F (например, $kB(k)$), для которых

$$\frac{\delta^2 F}{\delta u(+)\,\delta u(-)} \neq \frac{\delta^2 F}{\delta u(-)\,\delta u(+)} \tag{0.16}$$

в обозначениях, аналогичных (0.13), причем сначала берется внутренний предел, а потом наружный. Учет этого факта, на который также не обращалось внимания ранее, показывает, что антисимметричная скобка (0.10) вообще не есть скобка Пуассона: для нее нарушается тождество Якоби! Действительно, аккуратно вычисляя по (0.10), имеем

$$\{\{F,G\}_{\text{as}}, H\}_{\text{as}} + (\text{цикл}) = -\frac{1}{4}\left(\frac{\delta^2 F}{\delta u(+)\,\delta u(-)} - \frac{\delta^2 F}{\delta u(-)\,\delta u(+)}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\delta G}{\delta u(+)}\frac{\delta H}{\delta u(-)} - \frac{\delta H}{\delta u(+)}\frac{\delta G}{\delta u(-)}\right) + (\text{цикл}). \tag{0.17}$$

Конечно, легко указать более простые, чем данные рассеяния, функционалы, для которых выполнено неравенство (0.16). Например,

$$F = \int dx \int dy\, u(x)\, u(y) \operatorname{arctg}(x+y).$$

Отметим, что такое нарушение тождества Якоби в случае, когда имплектический оператор (здесь $\partial/\partial x$) имеет ядро, известно в общей ситуации [9]. Множество функционалов $F(u)$ с перечисленными свойствами мы в дальнейшем будем обозначать $\mathcal{F}$.

В этой работе, являющейся развернутой версией заметки [10], мы хотим прояснить перечисленные выше проблемы. А именно мы показываем, что специфика функционалов из $\mathcal{F}$ требует расширения понятия вектора, касательного к этому классу. Соответственно уточняется и симплектическая форма (0.3). В результате мы получаем скобку Пуассона

$$(0.18)\qquad \{F,G\}=\{F,G\}_{as}-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta F}{\delta u(+)}\frac{\delta G}{\delta u(-)}-\frac{\delta F}{\delta u(-)}\frac{\delta G}{\delta u(+)}\right)$$

(ср. (0.10) и (0.15)) и пересчитываем ее в термины вариации по данным рассеяния. Эта скобка невырождена в том же смысле, что и (0.10): J_{-1} является для нее псевдоаннулятором,

$$(0.19)\qquad \{F,J_{-1}\}=\frac{\delta F}{\delta u(-)}-\frac{\delta F}{\delta u(+)}$$

(мы используем обозначения (0.13)). В отличие от (0.10) наша скобка, конечно, удовлетворяет тождеству Якоби, и в отличие от (0.10) и (0.15) дискретные и непрерывные данные рассеяния расщеплены и дают набор канонических переменных. Кроме того, мы покажем, что скобка (0.15) есть в определенном смысле скобка Дирака [11], построенная по (0.18), где одна из связей – условие J_{-1}=const. Напомним (см., например, (4.15) в [1]), что J_{-1} содержит как непрерывные, так и дискретные данные рассеяния. Поэтому именно наложение указанной связи приводит к их зацеплению в (0.15). Аналогичное утверждение для этой скобки было получено в [7], где в качестве исходного использовалось выражение (0.10).

1. ГЛАДКИЕ КРИВЫЕ, КАСАТЕЛЬНЫЕ ВЕКТОРЫ И СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ ФОРМЫ

Задание симплектической формы требует введения в множество функций $u(x)$ структуры многообразия и определения векторов (векторных полей), касательных к этому многообразию. Соответствующее построение и его приложение к гамильтоновой механике в конечномерном случае хорошо известно (см. [12]). Различные обобщения (см., например, [13]) на бесконечномерный случай представляются нам ограничительными, поскольку априори фиксируют структуру касательного пространства. Не вдаваясь в обсуждение общего случая, мы будем расширять встречающиеся в [12] понятия ровно настолько, насколько это диктуется рассматриваемой задачей. В частности, не вводя понятия многообразия в множество функций $u(x)\in\mathscr{S}$, мы будем опираться на естественно возникшую у нас в работе [1] (см. (2.2)) при вычислении вариационных производных норму

$$(1.1)\qquad \|h\|=\int dx\,|h(x)|$$

и дадим определение гладкой кривой на этом множестве и касательного к ней вектора как дифференциального оператора на множестве $\mathscr{F}$.

Итак, рассмотрим кривую $u^\tau(x)$, $\tau\in[0,1]$, на множестве функций из $\mathscr{S}$ такую, что

$$(1.2)\qquad \forall\tau\in[0,1]:\ u^\tau(x)\in\mathscr{S},\quad \|u^{\tau+\Delta}-u^\tau\|=O(\Delta)\ \text{при}\ \Delta\to0.$$

$$\exists\ \frac{\partial}{\partial\tau}u^\tau(x)\equiv\lim_{\Delta\to0}\frac{u^{\tau+\Delta}(x)-u^\tau(x)}{\Delta}\in\mathscr{S},$$

причем предел здесь понимается в смысле $\mathscr{S}'$. Касательный вектор ξ^τ в точке τ данной кривой есть

(1.3) $$\xi^\tau F(u^\tau) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{F(u^{\tau+\Delta}) - F(u^\tau)}{\Delta}.$$

Обозначая для простоты

(1.4) $$f(x) = \frac{\delta F}{\delta u(x)}, \qquad f(\pm) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x),$$

по определению рассматриваемого множества функционалов и (1.2) имеем

$$\xi^\tau F(u^\tau) = \lim_{\Delta\to 0} \int dx\, f^\tau(x)\, \frac{u^{\tau+\Delta}(x) - u^\tau(x)}{\Delta}, \qquad f^\tau(x) = f(x)\,|_{u=u^\tau}.$$

Заметим, что если $f(\pm)=0$, т. е. $f(x)\in\mathscr{S}$, то этот предел существует и конечен в силу (1.2):

(1.5) $$\xi^\tau F(u^\tau) = \int dx\, f^\tau(x)\, \xi^\tau(x),$$

где

(1.6) $$\xi^\tau(x) = \frac{\partial}{\partial\tau} u^\tau(x) \in \mathscr{S}.$$

Именно этим и было обусловлено то, что предел в (1.2) понимался в смысле $\mathscr{S}'$. Наша задача — дать такое уточнение понятия гладкости кривой, которое обеспечит существование предела (1.3) для произвольного $F\in\mathscr{F}$ с ненулевыми $f(\pm)$. Для этого после ряда тождественных преобразований перепишем $\xi^\tau F$ в виде

(1.7) $$\xi^\tau F(u^\tau) = \frac{f^\tau(+) + f^\tau(-)}{2} \frac{\partial}{\partial\tau} \int dy\, u^\tau(y) + \int dx\, f^\tau(x)' \frac{\partial}{\partial\tau} \int dy\, \frac{\varepsilon(y-x)}{2} u^\tau(y),$$

где мы воспользовались тем, что $f'(x)\in\mathscr{S}$. Поскольку дифференцирование в (1.7) понимается в смысле $\mathscr{S}'$, мы не можем, вообще говоря, внести производные $\partial/\partial\tau$ под знаки интегралов. Мы потребуем существования этих производных и запишем

(1.8) $$\frac{\partial}{\partial\tau} \int dy\, \varepsilon(y-x)\, u^\tau(y) = \int dy\, \varepsilon(y-x)\, \xi^\tau(y) + \xi_+^\tau - \xi_-^\tau,$$
$$\frac{\partial}{\partial\tau} \int dy\, u^\tau(y) = \int dy\, \xi^\tau(y) + \xi_+^\tau + \xi_-^\tau,$$

где величины $\xi_\pm^\tau$ и определяются этими равенствами, $\xi^\tau(x)$ определено в (1.6). Первое равенство в (1.8) понимается в смысле $\mathscr{S}'$ по x, поэтому (1.6) есть следствие этого условия.

Итак, вектор, касательный к кривой в точке τ, задается функцией $\xi^\tau(x)\in\mathscr{S}$ и параметрами $\xi_\pm^\tau$. Рассматривая эти параметры как функции τ, легко понять, что их носители имеют нулевую меру. Иначе, интегрируя (1.8), мы пришли бы к противоречию с условием $u^\tau(x)\in\mathscr{S}$. Таким образом, на кривой таких особых точек, где по крайней мере один из параметров $\xi_\pm^\tau$ отличен от нуля, «мало», например это дискретные точки. Поэтому при рассмотрении семейства векторов, касательных к некоторой кривой, мы можем считать, что оно задается семейством функций $\xi^\tau(x)$, которые принадлежат $\mathcal{S}$ для почти всех τ. При приближении τ к особой точке τ_0 от $\xi^\tau(x)$ «отрывается и уходит на бесконечность шапочка» — функция с компактным носителем, так что

$$\xi_\pm^{\tau_0} = \pm \lim_{x\to\pm\infty} \lim_{\tau\to\tau_0} \int_x^{\pm\infty} \xi^\tau(y)\,dy.$$

Выполняя в (1.7) интегрирование по частям, с учетом (1.8) находим действие касательного в точке u вектора $\xi=(\xi(x), \xi_+, \xi_-)$ на произвольный функционал $F\in\mathcal{F}$:

$$(1.9)\qquad \xi F = \int dx \frac{\delta F}{\delta u(x)} \xi(x) + \xi_+ \frac{\delta F}{\delta u(+)} + \xi_- \frac{\delta F}{\delta u(-)}$$

(см. обозначения (0.13)). Мы получили очевидное расширение понятия вектора, обусловленное природой класса $\mathcal{F}$, по сравнению с обычным выражением, содержащим только первый член.

Теперь, однако, следует проверить, что коммутатор двух векторов есть вектор. Тогда тождество Якоби для скобки Пуассона будет следовать из замкнутости соответствующей симплектической формы. Рассмотрим два вектора $\xi=(\xi(x), \xi_+, \xi_-)$, $\eta=(\eta(x), \eta_+, \eta_-)$. Пользуясь (1.9), находим

$$(1.10)\qquad [\xi,\eta]F = \zeta F + (\xi_+\eta_- - \xi_-\eta_+)\left(\frac{\delta}{\delta u(+)}\frac{\delta F}{\delta u(-)} - \frac{\delta}{\delta u(-)}\frac{\delta F}{\delta u(+)}\right),$$

где $\zeta=(\zeta(x), \zeta_+, \zeta_-)$ — вектор с компонентами

$$(1.11)\qquad \zeta(x) = \int dy\, \xi(y) \frac{\delta\eta(x)}{\delta u(y)} + \xi_+ \frac{\delta\eta(x)}{\delta u(+)} + \xi_- \frac{\delta\eta(x)}{\delta u(-)} - (\xi\leftrightarrow\eta),$$

$$\zeta_+ = \int dx\, \xi(x) \frac{\delta\eta_+}{\delta u(x)} + \xi_+ \frac{\delta\eta_+}{\delta u(+)} + \xi_- \frac{\delta\eta_+}{\delta u(-)} - (\xi\leftrightarrow\eta),$$

$$\zeta_- = \int dx\, \xi(x) \frac{\delta\eta_-}{\delta u(x)} + \xi_+ \frac{\delta\eta_-}{\delta u(+)} + \xi_- \frac{\delta\eta_-}{\delta u(-)} - (\xi\leftrightarrow\eta).$$

Второе слагаемое в (1.10) по определению класса $\mathcal{F}$, вообще говоря, не обязано обращаться в нуль, а тогда (1.10) не есть вектор. Обратить это слагаемое в нуль можно лишь условием на вектора $\xi_+\eta_-=\xi_-\eta_+$ $\forall\xi, \eta$. Тогда существует не зависящая от векторов (и, конечно, функционалов) константа ν такая, что $\xi_+=\nu\xi_-$ $\forall\xi$.

Естественно потребовать, чтобы вся теория была инвариантна при замене $x\to -x$, но при этом, очевидно, параметры $\xi_\pm$ меняются местами. Следовательно, $\nu^2=1$, и мы положим

$$(1.12)\qquad \xi_+=\xi_0, \qquad \xi_-=\nu\xi_0,$$

т. е. на самом деле вектор задается как $\xi=(\xi(x), \xi_0)$ с одним дополнительным параметром, а знаковый множитель ν определяет правило действия векторов:

$$(1.13)\qquad \xi F=\int dx\,\xi(x)\,\frac{\delta F}{\delta u(x)}+\xi_0\left(\frac{\delta F}{\delta u(+)}+\nu\frac{\delta F}{\delta u(-)}\right),\qquad \nu=\pm1.$$

Теперь мы имеем полное описание касательных векторов и гладких кривых (см. формулы (1.2), (1.6), (1.8) и (1.12)).

Следующая наша задача — определение дифференциальных форм на построенном множестве касательных векторов. Пример 1-формы дает равенство (1.13), определяющее значение дифференциала на векторе ξ:

$$(1.14)\qquad dF(\xi)=\xi F.$$

В общем случае 1-форма — линейное отображение множества векторов в (вещественные) числа. Соответственно для вектора $\xi=(\xi(x),\ \xi_0)$ имеем

$$(1.15)\qquad \omega^1(\xi)=\int dx\,\omega(x)\,\xi(x)+\omega_0\xi_0.$$

Мы видим, что 1-форма задается функцией $\omega(x)$ и параметром ω_0. Про функцию $\omega(x)$ без потери общности будем считать, что она обладает теми же свойствами, что и вариации $\delta F/\delta u(x)$ для $F\in\mathcal{F}$. Параметр ω_0, вообще говоря, не зависит от $\omega(x)$. Аналогично с расширением числа параметров определяются старшие формы как полилинейные антисимметричные отображения, например,

$$(1.16)\qquad \omega^2(\xi,\eta)=\int dx\int dy\,\omega(x,y)\,\xi(x)\,\eta(y)+$$
$$+\int dx\,\omega_0(x)\,[\xi_0\eta(x)-\eta_0\xi(x)],$$

где $\omega(x,y)=-\omega(y,x)$, и т. д.

Покажем, что параметры ω_0, $\omega_0(x)$ и проч. в известном смысле лишние и от них можно избавиться. Действительно, нам нужны не все формы, а лишь такие, на которых определена операция d внешнего дифференцирования, обладающая обычными свойствами: $d\omega^k$ — $(k+1)$-форма и выполнена теорема Стокса. Значение $d\omega^k$ на векторах $\xi_1,\dots,\xi_{k+1}$ для этого должно (см. [12]) определяться как главная линейная часть интеграла формы ω^k по граням $(k+1)$-мерного полиэдра, натянутого на $\xi_1,\dots,\xi_{k+1}$. Для того чтобы выделить эту главную часть, мы, конечно, должны требовать непрерывности формы ω^k на соответствующих гранях. Например, форма ω^1, рассматриваемая в точках некоторой гладкой кривой:

$$\omega^1(\xi^\tau)=\int dx\,\omega(x)\,|_{u=u^\tau}\xi^\tau(x)+\omega_0|_{u=u^\tau}\xi_0^\tau,$$

должна быть непрерывной функцией τ. Как мы видели, $\xi_0^\tau=0$ при почти всех τ. При подходе к этим точкам от $\xi^\tau(x)$ «отрываются шапочки», уходящие на бесконечность, с коэффициентами, удовлетворяющими (1.12). Поэтому непрерывность 1-формы на кривой имеет место лишь при $\omega_0=\omega(+)+\nu\omega(-)$, где

$$(1.17)\qquad \omega(\pm)=\lim_{x\to\pm\infty}\omega(x),$$

т. е. вместо (1.15) мы интересуемся лишь 1-формами вида

$$(1.18)\qquad \omega^1(\xi)=\int dx\,\omega(x)\,\xi(x)+\xi_0(\omega(+)+\nu\omega(-)).$$

Именно такой формой по построению является дифференциал dF. Аналогично для 2-форм вместо общего вида (1.16) мы будем интересоваться лишь формами, которые задаются как

$$(1.19)\qquad \omega^2(\xi,\eta)=\int dx\int dy\,\omega(x,y)\xi(x)\eta(y)+ + \int dx(\omega(x,+)+\nu\omega(x,-))(\eta_0\xi(x)-\xi_0\eta(x))$$

с очевидными обозначениями типа (1.17). Аналогично выбираются старшие формы.

На таком множестве форм дифференцируемость сводится к существованию вариационных производных от ядер форм и описывается стандартной формулой

$$(1.20)\qquad d\omega(\xi_1,\ldots,\xi_{n+1})=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}\xi_i\omega(\xi_1,\ldots,\hat{\xi}_i,\ldots,\xi_{n+1})+ + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(-1)^{i+j}\omega([\xi_i,\xi_j],\ \xi_1,\ldots,\hat{\xi}_i,\ldots,\hat{\xi}_j,\ldots,\xi_{n+1}],$$

где $\hat{}$ означает, что соответствующий вектор пропущен. При этом теорема Стокса выполняется по построению. Легко проверить, что выделенный класс форм сохраняется при дифференцировании именно за счет условий (1.12), которые исключают из всех формул плохо определенные и зависящие от порядка предельных переходов выражения типа $\dfrac{\delta}{\delta u(-)}\omega(+)$.

2. СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ФОРМА ЗАХАРОВА — ФАДДЕЕВА И СКОБКА ПУАССОНА

Полученные формулы ((1.18), (1.19) и т. п.) можно рассматривать как правило продолжения дифференциальных форм, заданных на неособых векторах, т. е. векторах вида $\xi=(\xi(x),0)$, на более общую ситуацию $\xi=(\xi(x),\xi_0)$. Поэтому по (1.19) вместо (0.3) имеем 2-форму

$$(2.1)\qquad \omega(\xi,\eta)=\int dx\int dy\frac{\varepsilon(y-x)}{2}\xi(x)\eta(y)- -\frac{1-\nu}{2}\int dx(\xi_0\eta(x)-\eta_0\xi(x)).$$

Напомним, что $\varepsilon(x)$ — знаковая функция, а $\nu=\pm1$ характеризует нашу теорию. Видно, что форма невырождена лишь при

$$(2.2)\qquad \nu=-1,$$

поэтому во всех формулах следует положить $\nu=-1$. В частности, обобщение формы Захарова — Фаддеева принимает вид

$$(2.3)\qquad \omega(\xi,\eta)=\int dx\int dy\frac{\varepsilon(y-x)}{2}\xi(x)\eta(y)- -\int dx(\xi_0\eta(x)-\eta_0\xi(x)).$$

Эта форма невырождена и, как легко проверить по (1.20), замкнута: $d\omega=0$. Более того, она точна:

$$\omega=d\omega^1,\qquad \omega^1(\xi)=\int dx\int dy\,\frac{\varepsilon(x-y)}{4}\,u(y)\,\xi(x)+\frac{\xi_0}{2}\int dx\,u(x). \tag{2.4}$$

Построим отображение I дифференциалов dG, $G\in\mathscr{F}$, в векторы, т. е. при всех ξ решим равенство

$$\omega(\xi, IdG)=dG(\xi). \tag{2.5}$$

В силу (1.13), (1.14), (2.1) и (2.3) это дает два условия

$$\int dy\,\frac{\varepsilon(y-x)}{2}\,(IdG)(y)+(IdG)_0=\frac{\delta G}{\delta u(x)}, \tag{2.6}$$

$$\int dx\,(IdG(x))=\frac{\delta G}{\delta u(-)}-\frac{\delta G}{\delta u(+)}$$

где вектор IdG имеет компоненты $IdG=((IdG)(x),\,(IdG)_0)$.

Теперь видно, зачем, собственно, нам потребовалось расширение понятия касательного вектора. А именно, если $(IdG)_0=0$, то первое равенство в (2.6) разрешимо лишь для таких функционалов, для которых

$$\frac{\delta G}{\delta u(+)}+\frac{\delta G}{\delta u(-)}=0. \tag{2.7}$$

Набор этих G слишком узок, поскольку условие (2.7) исключает из рассмотрения, например, J_{-1}, $a(k)$ и $\rho(k)$.

В нашем подходе равенства (2.6) легко разрешаются для любого $G\in\mathscr{F}$ и дают

$$(IdG)(x)=-\left(\frac{\delta G}{\delta u(x)}\right)_x,\qquad (IdG)_0=\frac{1}{2}\left(\frac{\delta G}{\delta u(+)}+\frac{\delta G}{\delta u(-)}\right). \tag{2.8}$$

Окончательно по стандартному определению [12]

$$\{F, G\}=\omega(IdF, IdG) \tag{2.9}$$

мы получаем из расширенной формы (2.3) по (2.8) скобку Пуассона (0.18). Она антисимметрична, невырождена и удовлетворяет тождеству Якоби. В этом можно убедиться как по построению, используя соответствующие свойства симплектической формы (2.3), так и непосредственно по формуле (0.18). При этом выясняется, что граничный член, отличающий (0.18) от (0.10), приводит к компенсации слагаемых типа $\left(\frac{\delta}{\delta u(+)}\frac{\delta F}{\delta u(-)}-\frac{\delta}{\delta u(-)}\frac{\delta F}{\delta u(+)}\right)$, нарушавших тождество Якоби для (0.10) (ср. (0.17)).

Все парадоксы, указанные во введении, сняты за счет расширения понятия касательного вектора. Без такого расширения мы получили бы гарднеровскую скобку (0.2), которая в силу (2.7) просто не определена на J_{-1}, $a(k)$, $\rho(k)$. Скобка (0.18) помимо J_{-1} имеет еще один важный псевдоаннулятор, в известном смысле сопряженный J_{-1}. Действительно, рассмотрим скобку произвольного $F \in \mathcal{F}$ с функционалом $k\varphi(k)$:

$$\{F, k\varphi(k)\} = \frac{k}{2}\int dx \frac{\delta F}{\delta u(x)}\left(\frac{\delta\varphi(k)}{\delta u(x)}\right)_x -$$
$$-\frac{k}{2}\int dx\left(\frac{\delta F}{\delta u(x)}\right)_x \frac{\delta\varphi(k)}{\delta u(x)} + \frac{1}{4}\left(\frac{\delta F}{\delta u(+)} + \frac{\delta F}{\delta u(-)}\right),$$

где для $\delta\varphi(k)/\delta u(\pm)$ мы воспользовались формулами (0.9). Нас интересует предел этого выражения при $k \to 0$. Заметим, что второй член — хорошо определенная гладкая функция при всех k, т. к. $\left(\frac{\delta F}{\delta u(x)}\right)_x \in \mathcal{S}$. Перебрасывая производную в первом слагаемом и еще раз пользуясь (0.9), получаем

$$\lim_{k\to 0}\{F, k\varphi(k)\} = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta F}{\delta u(+)} + \frac{\delta F}{\delta u(-)}\right). \tag{2.10}$$

Мы видим, что, действительно, (0.18) не допускает предельного перехода под знаком скобки по аргументу $\varphi(k)$, т. к. по построению (ср. [1, (1.10)]) $\varphi(0)=0$. Итак, $\lim\limits_{k\to 0}\{\cdot, k\varphi(k)\}$ — псевдоаннулятор в смысле, указанном во введении. В частности, $\{u(x), J_{-1}\}=0$, $\lim\limits_{k\to 0}\{u(x), k\varphi(k)\}=0$ (напомним, что мы понимаем эти выражения как обобщенные функции из $\mathcal{S}'$ по x). Существование таких псевдоаннуляторов обусловлено спецификой симплектической формы (2.3): неособая компонента имплектического оператора I (т. е. $(IdF)(x)$, см. (9.8)) имеет ядро.

Наличие псевдоаннуляторов вызывает некоторое неудобство интерпретации. J_{-1} и $\lim\limits_{k\to 0} k\varphi(k)$ имеют нулевые скобки с $u(x)$, но не со всеми функционалами от u. От этого дефекта можно избавиться, если наложить условия $J_{-1}=\mathrm{const}$ и $\lim\limits_{k\to 0}\{\cdot, k\varphi(k)\}=0$ в качестве связей. Тогда, замечая, что по (2.10)

$$\lim_{k\to 0}\{J_{-1}, k\varphi(k)\}=1, \tag{2.11}$$

мы можем воспользоваться процедурой Дирака [11] для построения скобки, согласованной с поверхностью связей. Скобка Дирака в нашем случае требует очевидной модификации, связанной с предельным переходом $k\to 0$, и имеет вид

$$[F, G]_{\mathrm{Dirac}} = \{F, G\} - \lim_{k\to 0}\frac{\{F, J_{-1}\}\{G, k\varphi(k)\} - \{F, k\varphi(k)\}\{G, J_{-1}\}}{\{J_{-1}, k\varphi(k)\}}. \tag{2.12}$$

Подставляя сюда (0.18), (0.19) и (2.10), мы убеждаемся в том, что (2.12) и есть скобка (0.15), введенная Фаддеевым и Тахтаджяном в [7].

В следующей публикации мы проведем аналогичное построение для всей иерархии скобок Пуассона, ассоциированных с задачей Штурма — Лиувилля (0.1). Поэтому здесь для полноты и удобства ссылок мы дадим прямой вывод скобки (0.15) из симплектической формы. Для этого условия, которые служили нам связями, следует сформулировать как дополнительные требования гладкости рассматриваемых кривых $u^\tau(x)$. Тогда, возвращаясь к началу раздела 1, видим, что прежде всего интеграл $J_{-1}{}^{\tau}=\int dy\, u^{\tau}(y)$ должен быть константой на каждой кривой: $\frac{\partial}{\partial\tau}\int dy\, u^{\tau}(y)=0$. Аналогично требование $\lim\limits_{k\to 0}\frac{\partial}{\partial\tau}k\varphi^{\tau}(k)=0$ (где φ^{τ} построено по u^{τ}) по (1.7) и асимптотикам (0.9) сводится к условию

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\partial}{\partial\tau}\int dy\,\varepsilon(y-x)\,u^{\tau}(y)+\lim_{x\to-\infty}\frac{\partial}{\partial\tau}\int dy\,\varepsilon(y-x)\,u^{\tau}(y)=0.$$

В силу (1.8) и (1.12) эти дополнительные условия гладкости формулируются как ограничения на класс касательных векторов:

$$(2.13)\qquad \xi_0=-\frac{1}{2}\int dx\,\xi(x),\qquad \nu=1.$$

По (1.13) это означает, что действие вектора ξ на произвольный $F\in\mathcal{F}$ задается одной функцией $\xi(x)\in\mathcal{S}$ по правилу

$$(2.14)\qquad \xi F=\int dx\int dy\,\xi(x)\,\frac{\varepsilon(x-y)}{2}\left(\frac{\delta F}{\delta u(y)}\right)'.$$

Легко понять, что это те и только те векторы, для которых

$$(2.15)\qquad \xi J_{-1}=0,\qquad \lim_{k\to 0}\xi\,(k\varphi(k))=0.$$

В силу условия $\nu=1$ наша модификация (2.1) симплектической формы сводится к исходному выражению (0.3). Эта форма антисимметрична и невырождена — параметр ξ_0 из нее выпал, но по (2.13) он не является независимым. Новое правило действия векторов определяет новое правило внешнего дифференцирования: для функционалов — по (1.14), а для старших форм — по (1.20). Очевидно, что форма (0.3) замкнута относительно этого дифференцирования.

По равенству (2.5) построим новый оператор $\tilde{I}$. С учетом (2.14) имеем

$$(2.16)\qquad (\tilde{I}dF)(x)=-\left(\frac{\delta F}{\delta u(x)}\right)'.$$

Определяя аналогично (2.9) скобку Пуассона как $[F,G]=\omega(\tilde{I}dF,\tilde{I}dG)$, мы снова получаем выражение (0.15).

Обратим внимание, что мы получили вырожденную скобку (0.15):

$$(2.17)\qquad [F,J_{-1}]=0=\lim_{k\to 0}\,[F,k\varphi(k)]\qquad \forall F\in\mathcal{F},$$

исходя из невырожденной симплектической формы. Это происходит за счет вырожденности действия вектора (см. (2.15)). J_{-1} и $\lim\limits_{k\to 0}[\cdot,k\varphi(k)]$ являются настоящими аннуляторами для (0.15) в обычном смысле.

3. ПЕРЕХОД К ДАННЫМ РАССЕЯНИЯ

В этом разделе мы, пользуясь результатами работы [1] (соотношениями полноты и ортогональности и т. п.), выполним «преобразование Фурье», т. е. перейдем к данным рассеяния в построениях предыдущих разделов. Прежде всего в силу выражений (0.9) для вариаций данных рассеяния имеем

$$\frac{\delta F}{\delta u(x)}=\frac{1}{2}\int dk\left[\frac{\delta F}{\delta\rho(k)}\Phi_1(x,k)+\frac{\delta F}{\delta\varphi(k)}\Phi_2(x,k)\right]+ \tag{3.1}$$
$$+\sum_n\left[\frac{\partial F}{\partial\varkappa_n}\Phi_{1n}(x)+\frac{\partial F}{\partial\sigma_n}\Phi_{2n}(x)\right],$$

причем напомним (см. [1, (3.9)]), что

$$\frac{\delta}{\delta\rho(k)}\equiv\theta(k)\frac{\delta}{\delta\rho(k)}+\theta(-k)\frac{\delta}{\delta\rho(-k)}, \tag{3.2}$$
$$\frac{\delta}{\delta\varphi(k)}\equiv\theta(k)\frac{\delta}{\delta\varphi(k)}-\theta(-k)\frac{\delta}{\delta\varphi(-k)},$$

а $\Phi_i(x,k)$, $\Phi_{in}(x)$, $i=1,2,$ — «квадраты» функций Йоста, определенные в [1, (2.7)—(2.10)]. По асимтотикам (0.9) получаем

$$\frac{\delta F}{\delta u(\pm)}\equiv\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\delta F}{\delta u(x)}=\frac{\delta F}{\delta\rho(0)}\pm \tag{3.3}$$
$$\pm\frac{1}{4}\int\frac{dk}{k}\frac{\delta F}{\delta\varphi(k)}\mp2\sum_n\frac{\partial F}{\partial\sigma_n}.$$

Заметим, что $\dfrac{\delta F}{\delta\varphi(0)}=0$ для $F\in\mathcal{F}$, так что интеграл в (3.3) сходится.

Теперь мы можем перевести на язык данных рассеяния определение (1.13) касательного вектора:

$$\xi F=\frac{1}{2}\int dk\left[\xi_1(k)\frac{\delta F}{\delta\rho(k)}+\xi_2(k)\frac{\delta F}{\delta\varphi(k)}\right]+ \tag{3.4}$$
$$+\sum_n\left[\xi_{1n}\frac{\partial F}{\partial\varkappa_n}+\xi_{2n}\frac{\partial F}{\partial\sigma_n}\right],$$

где

$$\xi_1(k)=\int dx\,\xi(x)\Phi_1(x,k)+2(1+\nu)\xi_0\delta(k), \tag{3.5}$$
$$\xi_2(k)=\int dx\,\xi(x)\Phi_2(x,k)+\frac{1-\nu}{2}\frac{\xi_0}{k},$$
$$\xi_{1n}=\int dx\,\xi(x)\Phi_{1n}(x),\qquad \xi_{2n}=\int dx\,\xi(x)\Phi_{2n}(x)-2(1-\nu)\xi_0.$$

Напомним, что $\nu=\pm1$ — параметр, определяющий действие касательного вектора. В силу того что $\xi(x)\in\mathcal{S}$ и выполнены свойства функций $\Phi_i(x,k)$ из [1], интегральные члены в (3.5) — гладкие функции k, а введенное нами расширение вектора (параметр ξ_0) добавляет сингулярность в зависимости от знака ν либо к $\xi_1(k)$, либо к $\xi_2(k)$. Например, при $\nu=-1$

$$\xi_0=k\xi_2(k)|_{k=0}. \tag{3.6}$$

Формулы (3.5) определяют параметры вектора ξ в новом представлении. В силу соотношения полноты (см. [1, (3.4)]) можно обратить (3.5):

$$\xi(x)=\frac{1}{2}\int dk[k\xi_1(k)\Phi_2'(x,k)-k\xi_2(k)\Phi_1'(x,k)]+ \tag{3.7}$$
$$+\sum_n[\xi_{1n}\Phi_{2n}'(x)-\xi_{2n}\Phi_{1n}'(x)],$$

а параметр ξ_0 определяется (3.6) или соответствующим равенством для $\nu=1$.

Аналогично могут быть переписаны в представлении данных рассеяния выражения для дифференциальных форм из раздела 1. В частности, симплектическая форма (2.1) Захарова — Фаддеева с учетом (3.5), а также соотношения полноты (см. [1, (3.4)]) принимает вид

$$\omega(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\int dk\,k[\xi_1(k)\eta_2(k)-\xi_2(k)\eta_1(k)]+ \\ +\sum_n(\xi_{1n}\eta_{2n}-\xi_{2n}\eta_{1n}). \tag{3.8}$$

Отметим, что (3.8) не содержит ν. Таким образом, от выбора ν зависит только особенность в $\xi_1(k)$ или $\xi_2(k)$ (см. (3.5)). При этом для $\nu=1$ параметр ξ_0 входит лишь в $\xi_1(k)$ как коэффициент при $\delta(k)$. Ввиду наличия множителя k в подынтегральном выражении (3.8) это слагаемое аннулируется и зависимость от ξ_0 выпадает, т. е. форма (3.8) при $\nu=1$ вырождена, как это отмечалось выше. Поэтому, так же как и в разделе 2, мы построим скобку Пуассона исходя из невырожденной формы ($\nu=-1$).

Решим уравнение (2.5), т. е. найдем оператор I:

$$(IdG)_1(k)=-\frac{1}{k}\frac{\delta G}{\delta\varphi(k)},\qquad (IdG)_2(k)=\frac{1}{k}\frac{\delta G}{\delta\rho(k)}, \\ (IdG)_{1n}=-\frac{\partial G}{\partial\sigma_n},\qquad (IdG)_{2n}=\frac{\partial G}{\partial\varkappa_n}, \tag{3.9}$$

где $(IdG)_1(k)$ и т. д.— компоненты вектора IdG в новом представлении (3.4). Поскольку для $G\in\mathcal{F}$, вообще говоря, $\delta G/\delta\rho(0)$ отлично от нуля, мы еще раз убеждаемся в необходимости введенного расширения понятия касательного вектора: $(IdG)_2(k)=\dfrac{1}{k}\dfrac{\delta G}{\delta\rho(0)}+$ *регулярная часть* в соответствии с (3.5).

Окончательно по (2.9) имеем скобку Пуассона

$$\{F,G\}=\frac{1}{2}\int\frac{dk}{k}\left[\frac{\delta F}{\delta\rho(k)}\frac{\delta G}{\delta\varphi(k)}-\frac{\delta G}{\delta\rho(k)}\frac{\delta F}{\delta\varphi(k)}\right]+ \\ +\sum_n\left(\frac{\partial F}{\partial\varkappa_n}\frac{\partial G}{\partial\sigma_n}-\frac{\partial G}{\partial\varkappa_n}\frac{\partial F}{\partial\sigma_n}\right). \tag{3.10}$$

Легко проверить по (3.1) и соотношениям ортогональности [1, (3.3)], что (3.10) есть наша скобка (0.18) в представлении данных рассеяния. Как указывалось в разделе 2, она действительно обладает всеми свойствами скобки Пуассона. Исходная симплектическая форма ((3.8) при $\nu=-1$) диагональна по дискретным и непрерывным данным рассеяния; таким образом, полученное расширение касательного вектора согласовано с результатом работы [4]. Теперь видно, что скобка (0.18) также диагональна в представлении данных рассеяния на всем классе функционалов $\mathcal{F}$.

Как следует из тождества следов, псевдоаннулятор J_{-1} (0.11) этой скобки в данных рассеяния (см. [1, (4.15)]) имеет вид

$$J_{-1}=\frac{1}{2}\int dp\,\rho(p)-4\sum_n\varkappa_n. \tag{3.11}$$

Поэтому из (3.10) имеем

$$\{F, J_{-1}\} = -\frac{1}{2}\int dk \frac{\delta F}{\delta\varphi(k)} + 4\sum_n \frac{\partial F}{\partial\sigma_n}, \tag{3.12}$$

что вследствие (3.3), конечно, совпадает с (0.19). Аналогично по (3.10) воспроизводится результат (2.10):

$$\lim_{k\to 0}\{F, k\varphi(k)\} = \frac{\delta F}{\delta\rho(0)}. \tag{3.13}$$

Рассматривая $J_{-1}=\mathrm{const}$ и $\lim\limits_{k\to 0}\{\cdot, k\varphi(k)\}=0$ как связи, по (2.12) получаем скобку Дирака

$$\begin{aligned}[F, G] = \frac{1}{2}\int \frac{dk}{k}\Big[\Big(\frac{\delta F}{\delta\rho(k)} - \frac{\delta F}{\delta\rho(0)}\Big)\frac{\delta G}{\delta\varphi(k)} - \\ -\Big(\frac{\delta G}{\delta\rho(k)} - \frac{\delta G}{\delta\rho(0)}\Big)\frac{\delta F}{\delta\varphi(k)}\Big] + \sum_n\Big[\Big(\frac{\partial F}{\partial\varkappa_n} + 4\frac{\delta F}{\delta\rho(0)}\Big)\frac{\partial G}{\partial\sigma_n} - \\ -\Big(\frac{\partial G}{\partial\varkappa_n} + 4\frac{\delta G}{\delta\rho(0)}\Big)\frac{\partial F}{\partial\sigma_n}\Big].\end{aligned} \tag{3.14}$$

Опять-таки пользуясь соотношениями ортогональности, легко проверить, что (3.14) есть скобка Пуассона (0.15). Как уже говорилось, скобка (3.14) была построена в [7] как раз так, чтобы J_{-1} являлся ее аннулятором. Приведенный вывод наглядно объясняет причину зацепления дискретных и непрерывных данных рассеяния: это есть следствие условия связи $J_{-1}=\mathrm{const}$ (см. (3.11)).

Как говорилось в разделе 2, эту скобку можно получить и непосредственно из формы, если связи рассматривать как ограничения (2.15) на допустимые касательные векторы. По (3.4) это дает

$$\begin{aligned}\xi J_{-1} &\equiv \frac{1}{2}\int dk\, \xi_1(k) - 4\sum_n \xi_{1n} = 0, \\ \lim_{k\to 0} \xi k\varphi(k) &\equiv \lim_{k\to 0} k\xi_2(k) = 0.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Второе условие означает, что $\xi_2(0)$ существует и конечно, т. е. $\nu=1$ (см. (3.5)). Первое условие выражает ξ_0 (коэффициент у δ-функции в $\xi_1(k)$) через гладкую часть $\xi_1(k)$ и дискретные переменные ξ_{1n}. Мы можем исключить ξ_0, вычитая из (3.4) первое равенство в (3.15), умноженное на $\delta F/\delta\rho(0)$. Тогда действие касательного вектора на функционал задается формулой

$$\begin{aligned}\xi F = \frac{1}{2}\int dk\Big[\xi_1(k)\Big(\frac{\delta F}{\delta\rho(k)} - \frac{\delta F}{\delta\rho(0)}\Big) + \xi_2(k)\frac{\delta F}{\delta\varphi(k)}\Big] + \\ + \sum_n\Big[\xi_{1n}\Big(\frac{\partial F}{\delta\varkappa_n} + 4\frac{\delta F}{\delta\rho(0)}\Big) + \xi_{2n}\frac{\partial F}{\partial\sigma_n}\Big].\end{aligned} \tag{3.16}$$

Видно, что δ-образное слагаемое в $\xi_1(k)$ действительно выпадает, так что $\xi_1(k)$ и $\xi_2(k)$ можно считать гладкими функциями от k. По равенству (2.5) и форме (3.8) построим оператор $\tilde{I}$, отвечающий новому действию вектора ξ:

$$(3.17)\qquad (\tilde{I}\,dG)_1(k)=-\frac{1}{k}\frac{\delta G}{\delta\varphi(k)},\qquad (\tilde{I}\,dG)_2(k)=\frac{1}{k}\left(\frac{\delta G}{\delta\rho(k)}-\frac{\delta G}{\delta\rho(0)}\right),$$

$$(\tilde{I}dG)_{1n}=-\frac{\partial G}{\partial\sigma_n},\qquad (\tilde{I}dG)_{2n}=\frac{\partial G}{\partial\varkappa_n}+4\frac{\delta G}{\delta\rho(0)},$$

где $(\tilde{I}dG)_1(k)$ и т. д.— компоненты вектора $\tilde{I}dG$. Теперь по (2.5) мы опять возвращаемся к скобке Пуассона (3.14).

В заключение приведем скобки для элементов приведенной матрицы монодромии и данных рассеяния. Заметим, что в силу стандартного дисперсионного соотношения (см. [6]) для $a(k)$ и определения $\rho(k)$ и $\varphi(k)$ (см. [1, (1.10)])

$$(3.18)\qquad \frac{\delta a(k)}{\delta\rho(p)}=\frac{ka(k)}{2i[p^2-(k+i0)^2]},$$

$$(3.19)\qquad \frac{\delta B(k)}{\delta\varphi(p)}=-i[\delta(k-p)-\delta(k+p)]B(k).$$

Мы выписали вариационные производные для $a(k)$ и $B(k)=kb(k)$ потому, что они после интегрирования с пробной функцией по k дают гладкую функцию p. Вариационная производная $\delta b(k)/\delta\varphi(p)=-i[\delta(k-p)-$ $-\delta(k+p)]b(k)$ этим свойством не обладает. Соответственно именно $a(k)$ и $B(k)$ можно подставлять в скобки Пуассона (3.10) и (3.14):

$$(3.20)\qquad \{a(k),B(p)\}=\frac{ka(k)B(p)}{2p[(k+i0)^2-p^2]},$$

$$[a(k),B(p)]=\frac{pa(k)B(p)}{2(k+i0)[(k+i0)^2-p^2]}.$$

Полученные выражения имеют правильную комплексную структуру в том смысле, что их правые части являются пределами на вещественной оси из верхней полуплоскости по k, поскольку k входит в знаменатели в виде $k+i0$. При этом именно множитель $(k+i0)^{-1}$ во второй скобке и ответствен за зацепление дискретного и непрерывного спектров. Вспоминая, что интеграл J_{-1} — коэффициент при k^{-1} разложения $\ln a(k)$, видим, что J_{-1} не аннулирует первую скобку (правая часть порядка k^{-1}) и аннулирует вторую (правая часть порядка k^{-3}).

Ненулевые скобки Пуассона (0.18) и (0.15) для данных рассеяния по (3.10) и (3.14) имеют вид

$$(3.21)\qquad \{\rho(k),\varphi(p)\}=\frac{1}{p}[\delta(k-p)+\delta(k+p)],\qquad \{\varkappa_m,\sigma_n\}=\delta_{mn},$$

$$(3.22)\qquad [\rho(k),\varphi(p)]=\frac{1}{p}[\delta(k-p)+\delta(k+p)-2\delta(k)],$$

$$[\rho(k),\sigma_n]=8\delta(k),\qquad [\varkappa_m,\sigma_n]=\delta_{mn}.$$

Литература

[1] *Аркадьев В. А., Погребков А. К., Поливанов М. К.* // ТМФ. 1987. Т. 72. № 3. С. 323–339.
[2] *Калоджеро Ф., Дегасперис А.* Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений. М.: Мир, 1985.
[3] *Gardner C. S.* // J. Math. Phys. 1971. V. 12. P. 1548.
[4] *Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д.* // Функц. анализ и его прилож. 1971. Т. 5. В. 4. С. 18–27.
[5] *Gardner C. S., Green J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.* // Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19. P. 1095.
[6] *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
[7] *Faddeev L. D., Takhtajan L. A.* // Lett. Math. Phys. 1985. V. 10. P. 183–188.
[8] *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
[9] *Семенов-Тян-Шанский М. А.* // Функц. анализ и его прилож. 1983. Т. 17. В. 4. С. 17–33.
[10] *Аркадьев В. А., Погребков А. К., Поливанов М. К.* // ДАН СССР, 1988. Т. 298. № 2. С. 324–328.
[11] *Дирак П.* Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979.
[12] *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979.
[13] *Chernoff P. R., Marsden J. E.* // Lect. Notes in Math. V. 425. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1974.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
10.IV.1987 г.

EXPANSIONS OVER SQUARES, SIMPLECTIC AND POISSON STRUCTURES ASSOCIATED WITH THE STURM — LIOUVILLE PROBLEM. II

Arkadiev V. A., Pogrebkov A. K., Polivanov M. K.

Making the notion of the tangential vector more precise, as is appropriate to the Sturm — Liouville problem, one derives from the Zakharov — Faddeev simplectic form the Poisson bracket modified by special boundary terms in comparison with its Gardner form. The bracket is nondegenerate and the variables of the discrete and continuous spectrum are separated in it.