И. Ф. Донин, Кратности $S_n$-модулей и индекс и заряд таблиц, *Функц. анализ и его прил.*, 1993, том 27, выпуск 4, 71–74

Замечание. Нетрудно показать, что каноническое отображение множества классов неприводимых представлений алгебры $\mathfrak{M}^n_{p,\omega}(\Gamma\,;\,\Xi)$ на $\mathrm{Prim}\,(\mathfrak{M}^n_{p,\omega}(\Gamma\,;\,\Xi))$ — биекция. Следовательно, из теоремы 4 вытекает обобщение доказанной в [5] для $p=2$ теоремы о вычислении спектра $C^*$-алгебры $\mathfrak{M}^n_{2,\omega}(\Gamma\,;\,\Xi)$.

**4.** В заключение сформулируем теорему о классификации рассматриваемых алгебр. Наряду с описанным выше сложным контуром $\Gamma$ с множеством узловых точек $\Xi$ и весом $\omega$ рассмотрим другой, аналогично определяемый, сложный контур $\Gamma'$ с множеством узловых точек $\Xi'$ и весом $\omega'$.

Теорема 5. *Для того чтобы банаховы алгебры $\mathfrak{M}^n_{p,\omega}(\Gamma\,;\,\Xi)$ и $\mathfrak{M}^{n'}_{p,\omega'}(\Gamma'\,;\,\Xi')$ были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы пары $(\Gamma\,;\,\Xi)$ и $(\Gamma'\,;\,\Xi')$ были гомеоморфны и чтобы $n$ равнялось $n'$.*

Достаточность является простым следствием теоремы о замене переменной в сингулярном интеграле и содержится в [4, с. 30]. Необходимость доказывается при помощи теоремы 4.

## Литература

**1.** *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. – Кишинев: Штиинца, 1973. **2.** *Крупник Н. Я.* Банаховы алгебры с символом и сингулярные интегральные операторы. – Кишинев: Штиинца, 1984. **3.** *Симоненко И. Б., Чинь Нгок Минь.* Локальный метод в теории одномерных сингулярных интегральных уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами. Нётеровость. – Ростов на Дону: Изд-во РГУ, 1986. **4.** *Roch S., Silbermann B.* Algebras of convolution operators and their image in the Calkin algebra. – Berlin: Akademie Der Wissenschaften der DDR, 1990. **5.** *Пламеневский Б. А., Сеничкин В. Н.* // Изв. вузов. Сер. матем. – 1984. – №4. – С. 37–46. **6.** *Симоненко И. Б.* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1965. – Т. 29, №3. – С. 567–586. **7.** *Стукопин В. А.* // Деп. ВИНИТИ №34 В-88; РЖМат. – 1988. – 4Б1129. **8.** *Хелемский А. Я.* Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии. – М.: «Наука», 1989.

Ростовский институт сельхозмашиностроения
Ростовский государственный университет

Поступило в редакцию
15 июля 1992 г.

УДК 519.46

# Кратности $S_n$-модулей и индекс и заряд таблиц

© 1993. И. Ф. Донин

Пусть $A$ и $B$ — косые диаграммы одного и того же порядка $n$, а $T_A$ и $T_B$ — соответствующие представления симметрической группы $S_n$ (над фиксированным полем характеристики нуль). Существует несколько комбинаторных интерпретаций числа сплетения $\nu(A,B) = \dim \mathrm{Hom}_{S_n}(T_A, T_B)$. Это интерпретации типа правила Литтлвуда–Ричардсона, основанные на комбинаторике диаграмм $A$ и $B$ (см., например, [1, 2, 3]) и интерпретации типа Гельфанда–Зелевинского, где $\nu(A,B)$ представляется как число целых точек некоторого выпуклого многогранника в пространстве схем Гельфанда–Цетлина (ГЦ-схем) (см. [5]). Однако в этих интерпретациях весьма неочевидна симметрия между

$A$ и $B$, хотя ясно, что $\nu(A, B) = \nu(B, A)$.

В этой работе мы даем новую комбинаторную интерпретацию числа $\nu(A, B)$ как множества целочисленных решений системы линейных неравенств, причем эти неравенства симметричны относительно $A$ и $B$ и равенство $\nu(A, B) = \nu(B, A)$ становится самоочевидным.

Далее оказывается, что отклонения от выполнения этих неравенств можно охарактеризовать числами, которые являются обобщениями индекса и заряда таблицы.

**1.** Напомним, что заполнением косой диаграммы $A$ называется функция $t$, определенная на квадратах этой диаграммы, со значениями в множестве натуральных чисел. Будем говорить, что заполнение $t$ имеет форму $A$. Вес заполнения $t$ — это набор $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)$, где $\mu_i$ — число квадратов $x \in A$, таких, что $t(x) = i$. Если $B$ — другая косая диаграмма, то заполнение $t$ назовем $B$-заполнением диаграммы $A$, если $\mu_i = l_i(B)$, где $l_i(B)$ равно числу квадратов в $i$-й строке диаграммы $B$. Заполнение $t$ называется таблицей, если числа $t(x)$ в диаграмме $A$ не убывают вдоль строк слева направо и строго возрастают вдоль столбцов сверху вниз (см. [1]). Заполнение $t$ формы $A$ назовем $B$-таблицей, если $t$ является таблицей и $B$-заполнением одновременно. Если $t$ является $B$-заполнением диаграммы $A$, то свяжем с $t$ слово $\omega(t) = a_1 a_2 \dots a_n$, которое образуется при чтении чисел $t(x)$ в $A$ справа налево и сверху вниз. Слово $\omega(t)$ назовем $B$-решетчатым, если оно состоит из «хороших» элементов $a_i$. При этом «хорошие» элементы определяются так:

(i) все единицы являются хорошими;

(ii) элемент $k$ хороший, если число хороших элементов, строго предшествующих $k$ и равных $k$, меньше, чем число предшествующих хороших элементов, равных $k - 1 + d_k$. Здесь $d_i$, $i \geqslant 2$, — число квадратов $i$-й строки диаграммы $B$, расположенных левее первого квадрата $(i-1)$-й строки диаграммы $B$.

В работе [3] доказаны следующие варианты правила Литтлвуда–Ричардсона.

Предложение 1. *Число $\nu(A, B)$ равно количеству $B$-таблиц $t$ формы $A$, удовлетворяющих условию*

(*) *существует биекция $\varphi\colon B \to A$, такая, что $t(\varphi(x)) = \rho(x)$ для всех $x \in B$ ($\rho(x)$ — номер строки, в которой лежит квадрат $x$) и для любых $x_1, x_2 \in B$, лежащих в одном столбце, $\rho(x_1) > \rho(x_2) \implies \rho(\varphi(x_1)) > \rho(\varphi(x_2))$.*

Предложение 2. *Число $\nu(A, B)$ равно количеству $B$-таблиц $t$ формы $A$, таких, что слово $\omega(t)$ является $B$-решетчатым.*

Формулировка предложения 2 ближе к классической формулировке правила Литтлвуда–Ричардсона.

**2.** Предложение 1 связано со следующей явной реализацией пространства $\mathrm{Hom}_{S_n}(T_A, T_B)$ (см. [3, 4]).

Пусть $R_A$, $C_A$ — подгруппы в группе перестановок квадратов диаграммы $A$, оставляющих инвариантными соответственно строки и столбцы $A$.

Назовем две биекции $\varphi, \psi\colon A \to B$ эквивалентными ($\varphi \sim \psi$), если существуют такие элементы $\alpha_A \in R_A$, $\alpha_B \in R_B$, что $\varphi = \alpha_B \psi \alpha_A^{-1}$. Пусть $P(A, B)$ — пространство, натянутое на множество $K(A, B)$ классов эквивалентности биекций из $A$ в $B$. Будем обозначать через $[\varphi]$ класс эквивалентности, соответствующий биекции $\varphi$. Определим $H(A,B)$ как подпространство в $P(A,B)$, натянутое на элементы вида

$$e_\varphi = \sum_{\beta_A\in C_A,\beta_B\in C_B} [\beta_B\varphi\beta_A^{-1}](-1)^{\widetilde{\beta}_A+\widetilde{\beta}_B},$$

где $\varphi\colon A\to B$ — биекция, а $\widetilde{\beta}_A$ — четность перестановки $\beta_A$. Как показано в [3], пространство $H(A,B)$ изоморфно $\operatorname{Hom}_{S_n}(T_A,T_B)$.

Опишем классы эквивалентности из $K(A,B)$. Пусть $\psi,\varphi\colon A\to B$ — биекции. Обозначим через $\varphi(i,j)$ количество квадратов $j$-й строки диаграммы $A$, которые переходят в $i$-ю строку диаграммы $B$. Ясно, что $\psi\sim\varphi$ тогда и только тогда, когда $\varphi(i,j)=\psi(i,j)$ для всех $i,j$. С другой стороны, если дан набор целых чисел $a=\{a_{ij}\}$, такой, что $a_{ij}\geqslant 0$, $\sum_j a_{ij}=l_i(B)$, $\sum_i a_{ij}=l_j(A)$, то он определяет класс биекций $K_a(A,B)=[\varphi]$, где $\varphi(i,j)=a_{ij}$.

Если $\varphi\colon B\to A$ — биекция, то с ней связано $B$-заполнение $t_\varphi$ диаграммы $A$, а именно, если $x\in A$, то в квадрат $x\in A$ вписывается число $p(\varphi^{-1}(x))$. Ясно, что все $B$-заполнения диаграммы $A$ получаются таким способом. Скажем, что класс $[\varphi]$ является таблицей, если он содержит такую биекцию $\psi\colon B\to A$, что заполнение $t_\psi$ является таблицей. В предложении 1 класс $[\varphi]$ является таблицей. Условие $(*)$ предложения 1 эквивалентно тому, что класс $[\varphi^{-1}]\in K(A,B)$ тоже является таблицей. Это вытекает из следующего элементарного утверждения.

Лемма. *Пусть $t$ — заполнение косой диаграммы $A$, такое, что числа $t(x)$, $x\in A$, строго возрастают по столбцам сверху вниз. Тогда после упорядочения по возрастанию чисел этого заполнения во всех строках строгое возрастание по столбцам сохранится.*

Пусть диаграмма $A$ представлена как разность двух диаграмм Юнга: $A=\lambda\setminus\overline{\lambda}$, где $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$, $\lambda_1\geqslant\dots\geqslant\lambda_p$, $\overline{\lambda}=(\overline{\lambda}_1,\dots,\overline{\lambda}_{\overline{p}})$, $\overline{\lambda}_1\geqslant\dots\geqslant\overline{\lambda}_{\overline{p}}$. Пусть $\varphi\colon B\to A$ — биекция. Легко показать, что класс $[\varphi]$ является таблицей, если выполняется система неравенств

$$\overline{\lambda}_i+\sum_{j\leqslant k}\varphi(i,j)\geqslant\overline{\lambda}_{i+1}+\sum_{j\leqslant k+1}\varphi(i+1,j).$$

Из приведенных выше рассмотрений вытекает

Теорема 1. *Пусть $A=\lambda\setminus\overline{\lambda}$, $B=\mu\setminus\overline{\mu}$ — две косые диаграммы порядка $n$, представленные как разности диаграмм Юнга. Тогда $\dim\operatorname{Hom}_{S_n}(T_A,T_B)$ равно числу целочисленных решений $a_{ij}$ следующей системы:*

$$a_{ij}\geqslant 0,\quad \sum_j a_{ij}=l_i(A),\quad \sum_i a_{ij}=l_j(B), \tag{1}$$

$$\overline{\lambda}_i+\sum_{j\leqslant k}a_{ij}\geqslant\overline{\lambda}_{i+1}+\sum_{j\leqslant k+1}a_{i+1,j}, \tag{2}$$

$$\overline{\mu}_j+\sum_{i\leqslant k}a_{ij}\geqslant\overline{\mu}_{j+1}+\sum_{i\leqslant k+1}a_{i,j+1} \tag{3}$$

*($l_i(A)$ — длина $i$-й строки диаграммы $A$).*

Пусть в теореме 1 $A=\lambda$ — диаграмма Юнга. Положим $\lambda_i^{(k)}=\sum_{j\leqslant k}a_{ij}$. Если числа $a_{ij}$ удовлетворяют неравенствам (1) и (2), то набор $\{\lambda_i^{(k)}\}$ образует

ГЦ-схему типа $\lambda$. Выражая в (3) $a_{ij}$ через $\lambda_i^{(k)}$ получаем правило Гельфанда–Зелевинского [5]. Таким образом, теорема 1 является обобщением этого правила.

**3.** Пусть $b = (b_1, \dots, b_n)$ — последовательность целых чисел длины $n$. Определим индекс и заряд формулами

$$\operatorname{ind}(b) = \sum_{b_j \geqslant b_{j+1}} j, \qquad c(b) = \sum_{b_j \geqslant b_{j+1}} (n-j)$$

соответственно. Пусть $t$ — заполнение косой диаграммы $A$ и $t_i$ — последовательность чисел, получающаяся при чтении $i$-го столбца диаграммы $A$ сверху вниз. Положим $\operatorname{ind}(t) = \sum_i \operatorname{ind}(t_i)$ и $c(t) = \sum_i c(t_i)$. Пусть $a = \{a_{ij}\}$ — набор целых чисел, удовлетворяющих условию (1) теоремы 1. Тогда $a$ определяет классы эквивалентности $K_a(A, B)$, $K_a(B, A)$ биекций $A \to B$ и $B \to A$ соответственно.

Определение. $\operatorname{ind}_a(A, B) = \min_\varphi \operatorname{ind}(t_\varphi)$, $c_a(A, B) = \min_\varphi c(t_\varphi)$, где минимум берется по всем биекциям из класса $K_a(A, B)$.

Если набор $a$ удовлетворяет (2) (соответственно (3)), то $\operatorname{ind}_a(B, A) = 0$ и $c_a(B, A) = 0$ (соответственно $\operatorname{ind}_a(A, B) = 0$ и $c_a(A, B) = 0$).

Таким образом, индекс и заряд можно интерпретировать как степень отклонения от неравенств (2) и (3).

Теорема 2. *Пусть $B$ — диаграмма Юнга и $K_a(B, A)$ — класс, содержащий таблицу. Тогда $c_a(A, B)$ совпадает с зарядом этой таблицы, определенным в* [1].

## Литература

**1.** *Макдональд И.* Симметрические функции и многочлены Холла. – М.: Мир, 1985. **2.** *Zelevinsky A. V.* // J. Algebra. – 1981. – V. 69, No. 1. – P. 82–94. **3.** *Donin I. F.* // Seminar on supermanifolds, Univ. of Stockholm. – 1988. – No. 3. – P. 1–38. **4.** *Донин И. Ф.* // ДАН СССР. – 1988. – Т. 303, №6. – С. 1296–1301. **5.** *Гельфанд И. М., Зелевинский А. В.* Теоретико-групповые методы в физике. – М.: Наука, 1986, Т. 2. – С. 22–31.

Факультет математики,
Университет Бар-Илан, Израиль

Поступило в редакцию
18 ноября 1991 г.

УДК 513.881

# О блочных пространствах Кёте, в которых образ каждого непрерывного оператора имеет базис

 В. П. Кондаков

В заметке [1] был выделен класс $\mathcal{N}$ пространств Кёте–Фреше, в которых произвольный линейный оператор допускает представление в виде

$$T = J + K, \tag{1}$$

где матрица оператора $J$ в основном базисе может иметь отличные от нуля