M. V. Bondarko, Isogeny classes of formal groups over complete discrete valuation fields with an arbitrary residue field,
Algebra i Analiz, 2005, Volume 17, Issue 6, 105–124

Алгебра и анализ
Том 17 (2005), №6

КЛАССЫ ИЗОГЕННОСТИ ФОРМАЛЬНЫХ ГРУПП НАД ПОЛНЫМИ ДИСКРЕТНО-НОРМИРОВАННЫМИ ПОЛЯМИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОЛЕМ ВЫЧЕТОВ

© М. В. БОНДАРКО

Целью работы является явное построение представителей в каждом классе изогенности одномерных формальных групп над кольцом целых полного дискретно-нормированного поля характеристики 0 с произвольным полем вычетов характеристики p. Логарифмы представителей выписываются явно, считается количество попарно-неизоморфных представителей указанного вида в каждом классе изогенности. Этот результат является обобщением и усилением результата, полученного Лаффолем в случае алгебраически замкнутого поля вычетов. Мы полностью описываем гомоморфизмы между построенными представителями. С помощью полученных результатов мы вычисляем многоугольник Ньютона и „дробную часть" логарифма для произвольной одномерной формальной группы. Кроме того, вычисляются нормирования и „вычеты" элементов кручения формального модуля. Вводится некоторое нормирование логарифмов формальных групп. Доказывается равносильность определений нормирования в терминах нормирования коэффициентов логарифма и в терминах нормирования его корней (т.е. элементов кручения формального модуля). Нормирование зависит только от класса изоморфности формальных групп; оно неположительно и равно 0 для групп, изоморфных представителям, и только для них.

В работе используются классификационные результаты М. В. Бондарко и С. В. Востокова: инвариантные модули Картье–Дьедонне и инвариант дробной части логарифма формальной группы.

Ключевые слова: формальная группа, изогения, модуль Картье–Дьедонне, полное дискретно-нормированное поле.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 04–01–00082а.

Введение

В работе [6] было доказано, что каждый класс изогенности одномерных формальных групп над кольцами целых полных дискретно-нормированных полей характеристики 0 с алгебраически замкнутым полем вычетов характеристики p содержит групповой закон, логарифм которого имеет некоторый явно описанный вид. Таким образом, был сделан шаг к явной классификации одномерных формальных групп с точностью до изогении. Целью этой работы является распространение этого результата на произвольные полные дискретно-нормированные поля характеристики 0 с полем вычетов характеристики p. В отличие от [6] мы явно указываем связь между логарифмами формальных групп в классе изогенности и логарифмом построенного нами представителя. Мы также указываем количество попарно-неизоморфных представителей указанного вида в каждом классе изогенности. Мы полностью описываем гомоморфизмы между построенными представителями. В качестве приложения полученного результата мы вычисляем нормирования и „вычеты" элементов кручения одномерных формальных модулей. Мы также вычисляем для произвольной одномерной формальной группы дробную часть ее логарифма (см. определение ниже, а также [1, 2]). Напомним, что дробная часть логарифма является инвариантом группы, который описывает группу с точностью до изогений некоторого специального вида, явно описанного в [2]. Это инвариант дает несколько больше информации о группе, чем функтор, построенный Фонтеном в [4]. Отметим, что для несовершенного поля вычетов никаких классификационных результатов, кроме полученных в [2], ранее известно не было.

Для построения канонических представителей и доказательства того, что они являются таковыми, мы пользуемся методами работ [1] и [2]. Мы напоминаем определения и основные свойства инвариантных модулей Картье–Дьедонне. Мы также приводим определение инварианта дробной части логарифма и вычисляем ее для всех одномерных формальных групп. Для простоты мы формулируем все определения и результаты [2] только для одномерных групп (хотя все они естественным образом распространяются на группы произвольной размерности).

Мы начинаем работу с напоминания основных понятий и результатов работы [2]. В начале §1 мы напоминаем понятие p-типической формальной группы. Для простоты, в основном мы рассматриваем формальные группы этого типа, хотя наши методы работают и для произвольных формальных групп. Одним из существенных отличий общего случая от случая алгебраически замкнутого (а также просто совершенного) поля вычетов является отсутствие в общем случае поля инерции (и автоморфизма Фробениуса на нем). Однако мы приводим формулировку важной структурной теоремы из

[2] о том, что на каждом абсолютно неразветвленном полном дискретно-нормированном поле можно ввести (неоднозначно) оператор Фробениуса σ. В [2] также было доказано, что любое полное дискретно-нормированное поле является вполне разветвленным расширением σ-поля. В конце параграфа мы напоминаем, что оператор, соответствующий логарифму p-типической формальной группы над вполне разветвленным расширением σ-поля, представляется в виде дроби некоторого вида.

В §2 мы формулируем определение инвариантного модуля Картье–Дьедонне формальной группы. С помощью свойств этих модулей мы явно строим „хорошие" формальные групповые законы.

В §3 мы напоминаем свойства „дробной части" для рядов и формальных групп. Мы определяем в терминах коэффициентов логарифма некоторое неположительное нормирование формальных групповых законов. Мы полностью описываем гомоморфизмы между хорошими группами в терминах дробной части логарифма. В конце параграфа мы формулируем основную теорему и доказываем, что каждая группа изогенна хорошей.

В §4 мы изучаем связь между многоугольниками Ньютона, нормированиями корней логарифма и другими инвариантами формальной группы. С помощью полученных результатов мы вычисляем дробную часть логарифма для произвольной формальной группы. Мы доказываем, что нормирование логарифма можно определить в терминах нормирования его корней, а поэтому оно зависит только от класса изоморфности формальных групп. Доказывается, что нормирование равно 0 для групп, изоморфных хорошим, и только для них. Также выясняется, что „хорошесть" формальной группы зависит только от „дробной части" ее логарифма. Далее, мы завершаем доказательство основной теоремы 3.4.1. В конце параграфа мы напоминаем определения и свойства инвариантных модулей Картье–Дьедонне для не p-типических групп. Эти свойства позволяют установить, когда произвольный (не обязательно p-типический) ряд является логарифмом формальной группы, изоморфной данной хорошей группе.

В §5 мы сравниваем функтор дробной части логарифма формальной группы с функтором, построенным Фонтеном в работе [4]. Полученные результаты позволяют построить примеры групп, инварианты Фонтена которых совпадают, но инварианты дробной части неэквивалентны (т.е. рассмотрение дробных частей показывает, что группы неизоморфны).

Автор глубоко благодарен С. В. Востокову за полезные замечания.

Обозначения. K/N — расширение полных дискретно-нормированных полей характеристики 0 с полем вычетов характеристики p, e — индекс ветвления K, π — некоторый униформизующий элемент K, $\mathfrak{O}$ — кольцо целых N, $\mathfrak{O}_K$ — кольцо целых K, $\mathfrak{M}$ — идеал нормирования K, k — поле вычетов

$\mathfrak{O}_K$, $\overline{a} \in k$ будет обозначать вычет элемента $a \in \mathfrak{O}_K$; $v = v_K$ — нормализованное нормирование на K, продолженное также на алгебраическое замыкание $\mathbb{K}$ поля K,

F будет обозначать одномерный формальный групповой закон конечной высоты над $\mathfrak{O}_K$, $\overline{F}$ — редукция F по модулю π.

Все утверждения, доказательства которых не приводятся в этой работе, были доказаны в [2].

§1. Некоторые результаты из [2]

1.1. p-типические группы. Так как в этой статье мы будем изучать только одномерные формальные группы над кольцами нулевой характеристики, наши формальные группы будут иметь логарифмы. Следующее утверждение хорошо известно [5, теорема 16.4.14].

Предложение 1.1.1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — коммутативная $\mathbb{Z}_p$-алгебра. Тогда формальная группа над $\mathfrak{A}$ с логарифмом $\lambda = x + \sum a_i x^i$, $a_i \in \mathbb{Q}_p\mathfrak{A}$, строго изоморфна над $\mathfrak{A}$ формальной группе с логарифмом, равным $\lambda' = x + \sum a_{p^j} x^{p^j}$.*

Таким образом, мы можем считать, что логарифм λ формальной группы F имеет вид $\Lambda(\Delta)(x)$, где Λ лежит в кольце $K[[\Delta]]$. Здесь мы определяем линейное действие $K[[\Delta]]$ на x, пользуясь правилом $a\Delta^s(x) = ax^{p^s}$ для каждого $s \geqslant 0$, $a \in K$. Такие группы называются p-типическими.

1.2. σ-поля и их свойства. Основная структурная теорема. Напомним теорему, имеющую большое значение для изучения формальных групп над полями с несовершенным полем вычетов.

Будем называть пару (N, σ) σ-полем, если σ — эндоморфизм N, удовлетворяющий сравнению $\sigma(x) - x^p \in p\mathfrak{O}$ для каждого $x \in \mathfrak{O} = \mathfrak{O}_N$. Заметим, что многие $\mathfrak{O}$ допускают более одного σ. Например, на кольце одномерного нормирования поля $\mathbb{Q}_p\{\{t\}\}$ (наименьшего двумерного локального поля характеристики $(0, p, p)$) мы можем определить $\sigma(t) = t^p$, при этом σ зависит от выбора параметра t. Конечно же, абсолютный индекс ветвления любого σ-поля равен 1.

Сформулируем основную структурную теорему для полных дискретно-нормированных полей. Автору не удалось найти приведенную ниже формулировку в литературе. Теорема была доказана в [2] с помощью метода, взятого из [3, гл. 2].

Теорема 1.2.1 (основная структурная теорема). *Каждое полное дискретно-нормированное поле K является вполне разветвленным расширением σ-поля N.*

В частности, на каждом абсолютно неразветвленном поле можно ввести оператор σ.

Введем обозначения, которыми будем пользоваться в течение всей работы.

Для каждого σ-поля N мы рассматриваем (некоммутативное) кольцо W, которое совпадает с $\mathfrak{O}[[\Delta]]$ как левый $\mathfrak{O}$-модуль и удовлетворяет соотношению $\Delta a = \sigma(a)\Delta$ для каждого $a \in \mathfrak{O}$.

N-модуль $N[[\Delta]]$ с таким же умножением мы будем обозначать через W'; мы также рассматриваем $NW = \bigcup_{i>0} p^{-i}W \subset W'$.

Мы будем считать, что $w = (w_i)$ — некоторый базис $\mathfrak{O}_K$ над $\mathfrak{O}$.

1.3. Представление Λ в виде дроби. Пусть N — σ-поле, $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}_N$ — его кольцо целых, пусть K — вполне разветвленное расширение N. Мы имеем $e = [K : N]$.

Кольцо $K[[\Delta]]$ имеет естественную структуру правого W-модуля. Заметим, что для ее определения нет необходимости распространять σ на K (так как нам не нужны выражения вида Δx при $x \notin \mathbb{N}$). Для $a_i \in K$, $b_i \in N$, $i \geqslant 0$, мы определяем

$$\Big(\sum a_i\Delta^i\Big)\Big(\sum b_i\Delta^i\Big) = \sum_{i\geqslant 0}\ \sum_{j+l=i,\ j,l\geqslant 0} a_j\sigma^j(b_l)\Delta^i.$$

Следующая теорема была доказана в [2].

Теорема 1.3.1. 1. *Пусть $\Lambda \in K[[\Delta]]$ соответствует формальной группе F над $\mathfrak{O}_K$ (т.е. $\Lambda(\Delta)(x)$ является логарифмом p-типической группы F). Тогда Λ можно представить в виде vu^{-1}, где $vp^l\pi^{-p^l} \in \mathfrak{O}_K[[\Delta]]$, $l = [\log_p(pe/(p-1))]$, $u \in p + W\Delta$.*

2. *Пусть $\Lambda = vu^{-1}$, $\Lambda' = v'u'^{-1}$, где F и F' — группы конечной высоты. Тогда $u = u'\varepsilon$ для $\varepsilon \in W$, если и только если $\overline{F} = \overline{F}'$ (как ряды над k).*

3. *Если $u = \sum u_i\Delta^i$, то высота F равна* $\min i :\ p \nmid u_i$.

Мы будем называть u **специальным** элементом W, считать высоту u равной высоте F.

§2. Инвариантные модули Картье–Дьедонне; построение хороших групп и их свойства

2.1. Инвариантные модули Картье–Дьедонне. Для каждого $\alpha \in K$ мы определяем оператор $\langle\alpha\rangle$ на $K[[\Delta]]$: $\langle\alpha\rangle(\sum c_i\Delta^i) = \sum c_i\alpha^{p^i}\Delta^i$.

Определение 2.1.1. Для формальной группы F с логарифмом $\lambda = \Lambda(x)$, $\Lambda \in K[[\Delta]]$, определим

$$D_F = \langle\langle w_i\rangle\Lambda\rangle W = \sum\langle w_i\rangle W \subset K[[\Delta]].$$

D_F будет называться инвариантным модулем Картье–Дьедонне группы F.

Предложение 2.1.2. 1. *D_F не зависит от выбора базиса w.*

2. *Пусть $a \in \mathfrak{O}_K$, формальным группам F_1 и F_2 соответствуют модули D_1 и D_2 соответственно. Из F_1 в F_2 существует гомоморфизм f, $f(x) \equiv ax \mod \deg 2$ тогда и только тогда, когда $aD_1 \subset D_2$.*

3. *Группы F_1 и F_2 строго изоморфны в том и только в том случае, если $D_1 = D_2$.*

4.
$$D_F = \{f \in K[[\Delta]] : \exp_F(f(\Delta)(x)) \in \mathfrak{O}_K[[x]]\},$$
где $\exp_F$ — обратное отображение к λ_F.

5. *Для каждого $\alpha \in \mathfrak{O}_K$ выполнено $\langle\alpha\rangle D_F \subset D_F$.*

Из п. 5 получаем, что $D_F \cap \mathfrak{O}_K$ — идеал $\mathfrak{O}_K$. Введем обозначение $D_F \cap \mathfrak{O}_K = \mathfrak{M}^{n(F)}$.

Так как D_F является W-модулем, мы имеем $\mathfrak{M}^{n(F)}[[\Delta]] \subset D_F$.

Для формальной группы F и $a \in \mathfrak{O}_K$ будем обозначать через F_a формальный групповой закон $a^{-1}F(ax, ay)$. Очевидно, его коэффициенты целые, и если $\lambda = \Lambda(x)$, то соответствующий F_a оператор Λ_{F_a} равен $a^{-1}\langle a\rangle\Lambda$.

Предложение 2.1.3. 1. *Пусть $\Lambda = \sum a_i\Delta^i$. Тогда $n(F) = \max(0, -[\inf_{i>0} \frac{v(a_i)}{p^i-1}])$.*

2. *$n(F_\pi) = \max(0, n(F) - 1)$.*

Доказательство. 1. Если $\inf_{i>0} \frac{v(a_i)}{p^i-1} \geqslant 0$, то $\lambda \in \mathfrak{O}_K[[x]]$ и все очевидно.

Пусть теперь $\inf_{i>0} \frac{v(a_i)}{p^i-1} = s < 0$. Так как $\underline{\lim}_i \frac{v(a_i)}{p^i-1} = 0$, то $s \in \mathbb{Q}$ и существует наибольшее такое $j \in \mathbb{Z}$, что $\frac{v(a_j)}{p^j-1} = s$. Пусть $\exp_F = \sum b_i x^i$. Рассмотрим поле $L = K[\pi^s]$, введем переменную $y = \pi^s x$. Мы имеем $\lambda(x) = \pi^{-s} f(y)$, $f \in y + \mathfrak{O}_L[[y]]y$. Значит, $\exp_F(\pi^{-s}x) = \pi^{-s}g(x)$, g — обратный к f по композиции. Мы получаем, что $n(F) \geqslant -[\inf_{i>0} \frac{v(a_i)}{p^i-1}]$.

С другой стороны, так как редукция f — многочлен, то редукция g — не многочлен. Таким образом, существуют сколь угодно большие j такие, что $v(b_j) = (j-1)s$. Поэтому, если $v(a) < s$, то $\exp_F(ax) \notin \mathfrak{O}_K[[x]]$.

2. Немедленно следует из п. 1. •

2.2. Построение групп.

Предложение 2.2.1. *Пусть $s = -[e/(1-p)]$, $a \in \mathfrak{O}_K$, $v_K(a) = l \leqslant s$. Предположим, что для некоторого специального элемента $u \in W$, $\Lambda = vu^{-1}$ и формального группового закона F' над $\mathfrak{O}_K$, удовлетворяющего $a^{-1}\pi^s\mathfrak{O}_K W \subset D_{F'}$, мы имеем $\langle a\rangle\Lambda \in aD_{F'}$, $\Lambda u \in aD_{F'}$. Тогда $\Lambda(x)$ —*

логарифм формальной группы F над $\mathfrak{O}_K$, при этом формальная группа F' строго изоморфна F_a.

Утверждение было доказано в работе [2].

Предложение 2.2.2. *Пусть высота u (см. п. 1.3) равна h, $v = p + \sum_{i=1}^{\infty} v_i \Delta^i$, для $i = s$ достигается минимум $\frac{e-v(v_i)}{p^i-1}$. Обозначим через $l = l(F)$ величину $\min_{0<s<h}(\frac{e-v(v_s)}{p^s-1}, \frac{e}{p^h-1})$. Пусть $v(v_i) \geqslant \max(l, e - l(p^i - 1))$ для $i \geqslant 1$. Тогда для $\Lambda = vu^{-1}$ ряд $\Lambda(x)$ — логарифм формальной группы над $\mathfrak{O}_K$.*

Доказательство. Так как условие не зависит от K, мы можем считать, что $p^s - 1 \mid e - v(v_s)$ для всех $s < h$. Возьмем F' равный аддитивному формальному групповому закону. Мы имеем $D_{F'} = \mathfrak{O}_K[[\Delta]]$. Легко видеть, что для $\Lambda = \sum c_i \Delta^i$ выполнено $v(c_i) \geqslant v(v_{i \bmod h}) - e[i/h]$ (см. лемму 3.2.1 ниже). Значит, для $a = \pi^l$ условия предложения 2.2.1 выполнены. •

Мы будем называть группу F **хорошей**, если выполнено $v(v_i) \geqslant e\max(1 - \frac{i}{h}, \frac{1}{h})$. Все логарифмы хороших групп удовлетворяют условию предыдущего утверждения.

Заметим, что на условие на v не влияет домножение на элемент $\varepsilon \in 1 + W\Delta$. Поэтому свойство логарифма быть хорошим не зависит от выбора представления Λ в виде vu^{-1}.

§3. Свойства дробных частей; формулировка основной теоремы

В этом параграфе мы докажем, что каждая (одномерная) формальная группа конечной высоты изогенна одной из хороших групп (см. определение в п. 2.2).

3.1. Дробная часть логарифма формальной группы. В этом пункте мы определяем дробные части и напоминаем, что дробная часть логарифма классифицирует формальные группы с точностью до изогении некоторого типа, который может быть явно описан.

Мы рассматриваем кольцо

$$R = \mathfrak{O}_K[[\Delta]] \otimes_{\mathfrak{O}_K} K = \mathfrak{O}_K[[\Delta]] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = \bigcup_{i \geqslant 0} p^i \mathfrak{O}_K[[\Delta]] \subset K[[\Delta]].$$

Для формальной группы F мы определяем $r(F)$ как вычет $\Lambda \bmod R$. Мы имеем $r(F) \in Ru^{-1}/R$, где $\Lambda = vu^{-1}$ — представление, описанное в теореме 1.3.1.

Заметим, что $r(F)$ не зависит от того, над каким полем мы рассматриваем F.

Сформулируем основные результаты о дробных частях (доказательство см. в [2]).

Теорема 3.1.1. I. 1. *Существует гомоморфизм f из F в F', $f(x) \equiv ap^s x \mod \deg 2$, для фиксированного $a \in K$ и некоторого $s \in \mathbb{Z}$ в том и только в том случае, если $ar = r'\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon \in NW$. Здесь $r = r(F)$, а $r' = r(F')$.*

2. *Пусть F и F' удовлетворяют условиям части 1, F — группа конечной высоты, $\Lambda = vu^{-1}$. Тогда существует гомоморфизм f из F в F', $f(x) \equiv ap^s x \mod \deg 2$ для фиксированного $s \in \mathbb{Z}$, если и только если $ap^s v \in D_{F'}$.*

II. *Пусть F и F' — формальные группы конечной высоты, пусть $a \in K$, $b \in \mathfrak{O}$, а $m \in \mathbb{Z}$. Разложим u как $p - \sum u_i\Delta^i$, $u_i \in \mathfrak{O}$. Тогда $u_h \in \mathfrak{O}^*$, $u_i \in p\mathfrak{O}$ для $i < h$, где h — высота F.*

Если существует изогения $f = \sum a_i x^i \equiv ax \mod \deg 2$ из F в F', высота f равна m и $a_{p^m} \equiv b \mod \pi$, то

$$ar(F) = r(F')b\varepsilon\Delta^m \tag{1}$$

для некоторого $\varepsilon \in 1 + W\Delta$.

При этом если поле k совершенно, то равенство (1) полностью характеризует все возможные $r(F')$.

3.2. Нормирование дробной части логарифма. Пусть высота F равна h, $\Lambda = vu^{-1}$. Нетрудно видеть, что можно найти остаток v по модулю u, т.е. для некоторых $w = \sum_{i=0}^{h-1} w_i\Delta^i$ и $y \in R$ мы имеем $v = w + yu$. Соответствующее утверждение доказывается так же, как стандартное утверждение про деление с остатком. Таким образом, $r(\Lambda) = r(wu^{-1})$.

Обозначим те j, $0 \leqslant j < h$, при которых достигается минимум $v(w_i) + \frac{ie}{h}$, через $b_i = b_i(F)$, $1 \leqslant i \leqslant s$.

Обозначим $s = \#b_i$ через $s(F)$.

Введем нормирование v_h на $K[[\Delta]]$ как

$$v_h\Bigl(\sum_{i\geqslant 0} a_i\Delta^i\Bigr) = \inf\Bigl(v(a_i) + \frac{ie}{h}\Bigr)$$

(вообще говоря, значение $v_h(f)$ может быть равно $-\infty$).

Обозначим $v_h(w) - e$ через $v(F)$.

Лемма 3.2.1. *Пусть $\Lambda = \sum_{i\geqslant 0} a_i\Delta^i$. Тогда при i, больших некоторого $I > 0$, мы имеем*

1. *$v(F) = v(a_i) + \frac{ie}{h}$, если и только если $v(w_{i \bmod h}) = v(F) + e(1 - \{\frac{i}{h}\})$.*
2. *Для всех прочих $i > I$ выполнено $v(a_i) + \frac{ie}{h} > v_h(F)$.*

Доказательство. Рассмотрим кольцо W_h элементов W', целых относительно нормирования v_h (с умножением, как в W), пусть $\mathfrak{M}_h$ — его максимальный идеал. Разложим u как $p - \sum u_i\Delta^i$, $u_i \in \mathfrak{O}$. В W_h мы имеем $u \equiv p - u_h\Delta^h \mod p\mathfrak{M}_h$. Таким образом,

$$u^{-1} \equiv (p-u_h\Delta^h)^{-1} \equiv \sum_{j\geqslant 0} p^{j-1}u_h\sigma^h(u_h)\dots\sigma^{jh-h}(u_h)\Delta^{jh} \mod p^{-1}\mathfrak{M}_h. \quad (2)$$

Кроме того, $wu^{-1} = vu^{-1} + f(\Delta)$, $f(\Delta) \in R$. Обозначим для каждого вещественного y через $\mathfrak{M}_{h,y}$ множество $\{f = \sum a_i x^i \in K[[\Delta]] : v(a_i) \geqslant y - ei/h\}$. Мы имеем

$$\Lambda \equiv \sum_{j\geqslant 0} p^{j-1}wu_h\sigma^h(u_h)\dots\sigma^{jh-h}(u_h)\Delta^{jh} \mod (\mathfrak{M}_{h,v(F)+1/h}, R), \quad (3)$$

откуда сразу получаем требуемое. •

3.3. Свойства хороших групп. Применим свойства дробной части логарифма для изучения хороших формальных групп.

Предложение 3.3.1. 1. *Группа F' с логарифмом $\lambda' = \Lambda'(x)$ изоморфна хорошей группе F с логарифмом $\lambda = \Lambda(x)$, если и только если $n(F') \leqslant -[\frac{e}{h-ph}]$ и $\Lambda'\varepsilon \equiv a\Lambda \mod R$ для некоторых $\varepsilon \in W^*$, $a \in \mathfrak{O}_K^*$.*

При этом ряд, задающий изоморфизм из F в F', сравним с ax по модулю степени 2.

2. *Пусть F, F' — хорошие группы, r, r' — дробные части их логарифмов. Тогда для любого $a \in \mathfrak{O}_K$ выполнено:*

Существует гомоморфизм из F в F', причем ряд, задающий гомоморфизм, сравним с $ax \mod \deg 2$ тогда и только тогда, когда для некоторого $\varepsilon \in W$ мы имеем $a\Lambda \equiv \Lambda'\varepsilon \mod R$.

Доказательство. Если F изоморфна F', то $D_{F'} = aD_F$, поэтому $n(F) = n(F')$. Далее, из предложения 2.1.3 мы имеем $n(F) \leqslant -[\frac{e}{h-ph}]$. При этом, согласно п. II теоремы 3.1.1, $a\Lambda \equiv \Lambda'\varepsilon$ для некоторых $\varepsilon \in W^*$, $a \in \mathfrak{O}_K^*$, где ряд, задающий изоморфизм, сравним с $ax \mod \deg 2$.

Докажем следствие в обратную сторону. Нам нужно проверить условие I.2 теоремы 3.1.1 для групп F, F'. Пусть $\Lambda = vu^{-1}$. Так как $v \in \mathfrak{M}^{-[-e/h]}[[\Delta]]$, из условия на $n(F)$ мы получаем $av \in D_{F'}$. Поэтому существует ряд, задающий изоморфизм из F в F', сравнимый с ax по модулю степени 2.

2. Условие на дробные части следует из существования гомоморфизма, согласно п. II теоремы 3.1.1. Обратное следствие так же, как и выше, мгновенно получаем из п. I.2 теоремы 3.1.1. •

Замечание 3.3.2. Мы доказали, что группу гомоморфизмов между хорошими группами можно восстановить по дробным частям логарифмов. Этот результат аналогичен результату для гомоморфизмов формальных групп над полем малого ветвления (т.е. $e < p$, см. [1] и [2]).

Ниже мы увидим, что условие на $n(F)$ автоматически следует из условия на дробные части.

Теперь исследуем кольцо эндоморфизмов хорошей группы.

Предложение 3.3.3. *Пусть $A \subset \mathfrak{O}_K$ — кольцо $\mathfrak{O}_K$-эндоморфизмов хорошей группы F. Тогда A является кольцом целых некоторого локального поля (т.е. конечного расширения $\mathbb{Q}_p$) $L \subset K$.*

Доказательство. Пусть L — поле частных A. Так как высота F конечна, то L — локальное поле (см. [5]). Нам нужно доказать, что если $\alpha \in L \cap \mathfrak{O}_K$, то $\alpha \in A$. Мы имеем $p^s\alpha \in A$ для некоторого $s \in \mathbb{Z}$. Согласно ч. I.2 теоремы 3.1.1, достаточно проверить, что $\alpha v \in D_F$. Это снова следует из того, что $v \in \mathfrak{M}^{-[-e/h]}\mathfrak{O}_K[[\Delta]] \subset D_F$. •

3.4. Основная теорема (формулировка и начало доказательства). Для $u = p + \sum a_i \Delta^i$, $a_i \in \mathfrak{O}$ и $r > 0$ мы будем обозначать через $u(r)$ ряд $p + \sum \sigma^r(a_i)\Delta^i \in W$. Мы имеем $u(r)\Delta^r = \Delta^r u$.

Теорема 3.4.1. *Пусть $\Lambda = vu^{-1}$, w — вычет v по модулю u, а $wu^{-1} = \sum s_i \Delta^i$. Обозначим через d абсолютный индекс ветвления поля частных кольца эндоморфизмов F.*

Напомним, что $b_i = b_i(F)$, $1 \leqslant i \leqslant s$, обозначают те j, $0 \leqslant j < h$, при которых достигается минимум $v(w_i) + \frac{ie}{h}$.

1. *Хорошая группа изогенна F тогда и только тогда, когда она изоморфна F_i для некоторого $1 \leqslant i \leqslant s$. Здесь F_i — группа, логарифм которой имеет вид $\Lambda_i(x)$, где $\Lambda_i = s_{b_i}^{-1} \sum_{j \geqslant 0} s_{j+b_i} \Delta^j$.*
2. *Группа F_i изоморфна F_j тогда и только тогда, когда $d \mid i - j$.*
3. *Количество попарно-неизоморфных хороших групп в классе изогенности F равно $s(F)/d$.*

Доказательство. Докажем сперва, что F изогенна всем F_i.

Обозначим s_{b_i} через c. Мы имеем $c\Lambda_i\Delta^{b_i} \equiv \Lambda \mod R$. Таким образом, достаточно проверить, что Λ_i действительно задает некоторую хорошую группу. Действительно, согласно теореме 3.1.1, эта группа будет изогенна F.

Обозначим b_i через r. В поле $K((\Delta))$ мы имеем равенство

$$\Lambda_i = c^{-1}\Big(wu^{-1} - \sum_{j=0}^{r-1} cs_j\Delta^j\Big)\Delta^{-r}$$
$$= c^{-1}\Big(w - \sum_{j=0}^{r-1} cs_j\Delta^j u\Big)\Delta^{-r}u(r)^{-1}.$$

По построению $\Lambda_i \equiv 1 \mod \Delta$. Мы имеем $v(c) = v(F) - \frac{er}{h}$. Поэтому $c^{-1}(w - \sum_{j=0}^{r-1} cs_j\Delta^j u)\Delta^{-r}$ удовлетворяет условию на v в определении хорошей группы. Взяв $u(r)$ в качестве u в этом определении, мы получаем, что F_i — хорошая группа

Доказательство теоремы будет завершено в следующем параграфе. •

§4. Многоугольники Ньютона и нормирования корней

4.1. Общие результаты. Для произвольного ряда $f = \sum_{i>0} b_i x^i$, $b_i \in K$, его многоугольник Ньютона определяется как выпуклая оболочка точек $(i, v(b_i))$.

Пусть $v(b_1) = 0$, производная f' ряда f лежит в $\mathfrak{O}_K[[x]]$. Будем говорить, что прямая $z = cy + b$ содержит сторону многоугольника Ньютона для f, если $v(b_i) \geqslant ci + a$ при всех $i > 0$, и по крайней мере для двух различных i достигается равенство. Пары $(i, v(b_i))$, для которых выполнено равенство, будем называть вершинами многоугольника Ньютона.

Зафиксируем униформизующую π поля K. Рассмотрим поле $\mathbb{K}$, являющееся пополнением алгебраического замыкания K. Выберем в поле $\mathbb{K}$ согласованную систему $\pi^{1/s}$, $s > 1$, и распространим на него нормирование v. Обозначим через $\mathfrak{M}_\mathbb{K}$ идеал нормирования $\mathbb{K}$. Введем функцию $r : \mathbb{K}^* \to k^{\mathrm{alg}}$, $r(x) = x\pi^{-v(x)} \mod \mathfrak{M}_\mathbb{K}$. Очевидно, $r(xy) = r(x)r(y)$.

Теорема 4.1.1. *Пусть f удовлетворяет описанным выше условиям.*

1. *Для $v(x) > 0$, $x \in \mathbb{K}$, ряд $f(x)$ сходится.*
2. *f не имеет кратных корней в $\mathfrak{M}_\mathbb{K}$.*
3. *Пусть $c < 0$, $c \in \mathbb{Q}$, прямая $z = cy + a$ содержит сторону многоугольника Ньютона для f, $v(b_{n_j}) = cn_j + a$, $1 \leqslant j \leqslant s$, $n_1 < n_2 < \dots n_s$, для $j \neq n_i$ выполнено $v(b_i) > ci + a$. Тогда f имеет $n_s - n_1$ корней $r_i \in \mathbb{K}$ с нормированием $-c$, $r(r_i)$ совпадают (с учетом кратностей) с множеством корней $h(x) = \sum_{1\leqslant j\leqslant s} \overline{b_{n_j}\pi^{-cn_j-a}} x^{n_j-n_1}$.*
4. *f не имеет корней другого вида (с положительным нормированием).*

5. *Упорядочим корни f в порядке убывания нормирования, обозначим их через t_i, $i > 0$ (соответственно $t_1 = 0$). Равенство*

$$\sum_{i=2}^{l} v(t_i) = -v(b_l) \tag{4}$$

выполнено, если и только если $(l, v(b_l))$ — вершина многоугольника Ньютона, иначе $\sum_{i=2}^{l} v(t_i) > -v(b_l)$.

Доказательство. 1. Мы имеем $v(b_i x^i) = iv(x) + v(b_i) \to +\infty$.

2. Мы имеем $v(f'(x)) = v(b_1) = 0$, а значит, кратных корней нет.

3. Рассмотрим $g = \sum \pi^{-a-ci} b_i x^i$. Ряд g целый и определен над конечным расширением K. Мы имеем $\overline{g(y)} = h(y)y^{n_1}$. Разложим g по подготовительной теореме Вейерштрасса. Мы имеем $g(y) = cj(y)k(y)$, где $c \in \mathfrak{O}_{\mathbb{K}}$, j — унитарный многочлен, $k(y) \in \mathfrak{O}_{\mathbb{K}}[[y]]^*$. Таким образом, корни g с нормированием $\geqslant 0$ — это корни $j(y)$. Пусть $j(y) = \prod(y - c_i)$ — разложение j на линейные множители. Мы имеем $\overline{j(y)} = y^{n_1}\overline{h}(y)$, а значит, $\overline{c_i}$ без 0 — это корни h. Так как $h(x) = \pi^a g(x\pi^c)$, мы получаем требуемое.

4. Пусть f имеет корень t с нормированием $u > 0$. Тогда $\min v(b_i t^i)$ должен достигаться более чем при одном значении i. Пусть этот минимум равен b. Тогда прямая $z = b - uy$ содержит сторону многоугольника Ньютона для f. Таким образом, этот корень лежит среди описанных выше.

5. Будем доказывать равенство (4) для вершин многоугольника индукцией по $l > 0$. Для $l = 1$ равенство очевидно. Теперь пусть (l_1, b_{l_1}), (l_2, b_{l_2}) — две соседние вершины. Тогда, согласно п. 3, $v(t_i) = \frac{v(b_{l_1}) - v(b_{l_2})}{l_2 - l_1}$ при $l_1 < i \leqslant l_2$. Таким образом, если (4) выполнено для (l_1, b_{l_1}), то оно выполнено и для (l_2, b_{l_2}).

Теперь пусть $(l, v(b_l))$ — не вершина многоугольника Ньютона. Выберем наибольшее $j < l$ такое, что $(j, v(b_j))$ — вершина многоугольника Ньютона, обозначим следующую вершину через $(w, v(b_w))$. Так как $(l, v(b_l))$ — не вершина, то

$$v(b_l) > v(b_j) + \frac{(l-j)(v(b_w) - v(b_j))}{(w-j)}.$$

С другой стороны, для $j < m \leqslant w$ выполнено $v(t_m) = \frac{v(b_j) - v(b_w)}{w-j}$. Таким образом,

$$v(t_m) > \frac{v(b_l) - v(b_j)}{j - l} \quad \text{при } j < m \leqslant l. \tag{5}$$

Сложив все неравенства (5) и добавив равенство (4) для вершины $(j, v(b_j))$, мы получаем требуемое. •

4.2. Логарифмы и изогении формальных групп. Выведем из предыдущего предложения формулу, выражающую $n(F)$ через нормирования корней логарифма F.

Предложение 4.2.1. $n(F) = -[\min(-v(t_i))]$, *где* t_i — *ненулевые корни* λ, *т.е. элементы кручения* $F(\mathfrak{M}_{\mathbb{K}})$.

Доказательство. Согласно предложению 2.1.3, выполнено $n(F) = \max(0, -[\inf_{i>0} \frac{v(a_i)}{p^i-1}])$. С другой стороны, согласно предложению 4.1.1, примененному к λ_F, если λ_F имеет корни с положительным нормированием, то $-\inf_{i>0} \frac{v(a_i)}{p^i-1}$ равно наибольшему значению нормирования корней. •

Предложение 4.2.2. *Пусть* F, G — *группы конечной высоты*, $f = \sum_{i>0} a_i x^i$ — *изогения из* F *в* G, T — *ядро* f, $s = \#T$. *Тогда*

1. $r(a_1) = r(a_s)\prod_{t\in T\setminus\{0\}} r(t)$.

2. *Пусть* $x \in \mathfrak{M}_{\mathbb{K}}$, $v(x) = l$, *для каждого* $t \in T$ *мы имеем* $v(x \underset{F}{+} t) \leqslant l$.

Тогда

$$v(f(x)) = \sum_{t\in T,\ v(t)<l} v(t) + l\#\{t \in T,\ v(t) \geqslant l\}, \tag{6}$$

а

$$r(f(x)) = r(a_s) \prod_{t\in T,\ v(t)<l} r(t) \cdot \prod_{t\in T,\ v(t)=l} (r(t) + r(x)) \cdot r(x)^{\#\{t\in T,\ v(t)>l\}}. \tag{7}$$

Доказательство. Обозначим через P_T ряд $\prod_{t\in T}(x \underset{F}{+} t)$. Согласно результату Любина (см. [5, §35.2]), f можно представить как композицию P_T и изоморфизма. Таким образом,

$$f = cx \circ g(x) \circ P_T(x), \tag{8}$$

где $c \in \mathfrak{O}_K^*$, $g(x) \equiv x \mod \deg 2$. Так как редукция $P_T(x)$ равна x^s, то ее композиция с $cx \circ g(x)$ не влияет на истинность утверждения, т.е. достаточно доказать утверждение для $f = P_T$. Для каждого $t \in T$ имеем $t \underset{F}{+} x \equiv t + x \mod xt\mathfrak{O}_{\mathbb{K}}[[x]]$, отсюда немедленно получаем утверждение ч. 1. Утверждение ч. 2 немедленно следует из того, что для $y, z \in \mathfrak{M}_{\mathbb{K}}$, $v(y) \geqslant v(z)$ мы имеем $r(x \underset{F}{+} y) = r(z)$, если $v(y) > v(z)$, и $r(x \underset{F}{+} y) = r(x) + r(y)$, если $v(x) = v(y) = v(x+y)$. •

Замечание 4.2.3. Пусть $x \in \mathfrak{M}_{\mathbb{K}}$ и максимум $x \underset{F}{+} t$ при $t \in T$ достигается при $t = t_0$. Тогда $f(x) = f(x \underset{F}{+} t_0)$ и $x \underset{F}{+} t_0$ удовлетворяет условию п. 2. Таким образом, мы можем вычислить $v(f(x))$ и $r(f(x))$ для каждого x. В частности, мы можем пользоваться полученным результатом для x, лежащего в кручении $F(\mathfrak{M}_{\mathbb{K}})$; при этом $x \underset{F}{+} t_0$ тоже лежит в кручении.

Кусочно-линейная функция в формуле (6) является функцией Эрбрана, построенной по $v(t)$, $t \in T$.

Предложение 4.2.4. *Пусть F, G, T, $s = p^l$ такие, как в предложении 4.2.2. Тогда для каждой группы G', строго изоморфной G, выполнено равенство*

$$r(G')\varepsilon\Delta^s = a_1 r(F)$$

для некоторого $\varepsilon \in W$, $\varepsilon \equiv r(a_1)\prod_{t \in T\setminus\{0\}} r(t)^{-1} \mod (p, \Delta)$. Для совершенного поля вычетов это равенство полностью характеризует все возможные $r(G')$.

Доказательство. Немедленно следует из теоремы 3.1.1. •

Таким образом, дробную часть логарифма для произвольной формальной группы можно легко выразить через дробную часть логарифма изогенной ей хорошей группы, так как нормирования и вычеты элементов кручения формального модуля для хорошей группы известны. Это можно сделать и для несовершенного поля вычетов, пользуясь разложением (8).

Далее, легко вычислить нормирования и „вычеты“ t_i (т.е. $r(t_i)$) для произвольной одномерной группы, воспользовавшись теоремой 4.1.1 и разложением (8).

4.3. Свойства $v(F)$. Упорядочим элементы кручения $F(\mathfrak{M}_{\mathbb{K}})$ в порядке убывания нормирования, обозначим их через t_i, $i > 0$ (мы считаем $t_1 = 0$). Мы можем считать (за счет перестановки t_i с равным нормированием), что для каждого $j > 0$ множество t_i, $1 \leqslant i \leqslant p^j$ является группой относительно операции F. Очевидно, для каждого $s \geqslant 0$ выполнено $v(t_{p^s+1}) = v(t_{p^s+2}) = \dots = v(t_{p^{s+1}})$. Как известно, кручение $F(\mathfrak{M}_{\mathbb{K}})$ совпадает с корнями $\lambda = \Lambda(x)$. При этом λ удовлетворяет условиям теоремы 4.1.1.

Предложение 4.3.1. 1. *Выполнено равенство*

$$v(F) = \min_{j>0}\left(\frac{je}{h} - \sum_{i=2}^{p^j} v(t_i)\right) = \lim_{j}\left(\frac{je}{h} - \sum_{i=2}^{p^j} v(t_i)\right).$$

2. *Для любой формальной группы F выполнено $v(F) \leqslant 0$.*
3. *$v(F) = 0$, если и только если F изоморфна хорошей группе.*

Доказательство. 1. Согласно лемме 3.2.1, начиная с некоторого места нормирования коэффициентов $\lambda = \sum a_{p^i} x^{p^i}$ не меньше $v(F) - \frac{ei}{h}$, равенство достигается при $i = b_l + hj$, $j \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant l < s$. Так как функция $f(x) = v(F) - \frac{e \log_p(x)}{h}$ выпукла вниз, то при i, больших некоторого I, все $(p^{b_l + hj}, v(F) - \frac{b_l e}{h} - je)$ являются вершинами многоугольника Ньютона для f. Все остальные вершины (правее $x = I$) имеют вид $(p^m, y(m) - \frac{me}{h})$ для некоторых $m \in \mathbb{Z}$, при этом $y(m) > v(F)$. Из п. 5 теоремы 4.1.1 получаем, что $v(F) = \underline{\lim}_j \frac{je}{h} - \sum_{i=2}^{p^j} v(t_i)$.

Мы также видим, что минимум $\frac{je}{h} - \sum_{i=2}^{p^j} v(t_i)$ достигается при некотором $j = j_0$. Докажем, что он периодически повторяется. Рассмотрим $g = [p]_F$ и разложим $g_i = g - t_i$ по подготовительной теореме Вейерштрасса. Из этого разложения получаем: так как высота g равна h (т.е. редукция g равна cs^{p^h} для некоторого $c \neq 0$), то ряд g_i имеет p^h корней. Так как $g_i \equiv -t_i \mod x$, сумма нормирований корней g_i равна $v(t_i)$. Тогда сумма нормирований всех таких t_s, что $s > 1$ и $[p]_F(t_s) = t_{s'}$ для $s' \leqslant p^{j_0}$, равна

$$\sum_{i=2}^{p^j} v(t_i) + \sum_{[p]_f(x)=0, x\neq 0} v(x),$$

их количество равно $p^{j_0+h} - 1$. Теперь разложим изогению g по подготовительной теореме Вейерштрасса. Так как $g \equiv px \mod \deg 2$, сумма нормирований корней g (кроме 0) равна e. Таким образом, сумма некоторых $p^{h+j_0} - 1$ различных $v(t_s)$ равна $\sum_{i=2}^{p^{j_0}} v(t_i) + e$. Тогда $\sum_{i=2}^{p^{h+j_0}} v(t_i)$ не меньше $\sum_{i=2}^{p^{j_0}} v(t_i) + e$, и мы получаем, что минимум равен нижнему пределу.

2. Для произвольного $j > 0$ разложим изогению $[p^j]_F$ по подготовительной теореме Вейерштрасса. Так как $g \equiv p^j x \mod \deg 2$, сумма нормирований корней g (кроме 0) равна ej. Таким образом, сумма некоторых $p^{jh} - 1$ различных $v(t_i)$ равна ej. Тогда $\sum_{i=2}^{p^{jh}} v(t_i)$ не меньше ej. Из выражения $v(F)$ через минимум мы получаем требуемое.

3. Если F — хорошая группа, то равенство $v(F) = 0$ очевидно. Из п. 1 получаем, что значение $v(F)$ одинаково для изоморфных групп. Таким образом, $v(F) = 0$ для всех групп, изоморфных хорошей группе.

Теперь пусть $v(F) = 0$. Докажем, что $n(F) \leqslant -[\frac{e}{h-ph}]$. Согласно предложению 4.2.1, нам достаточно проверить, что $v(t_2) = v(t_3) = \ldots v(t_p) \leqslant -[\frac{e}{h-ph}]$. Это немедленно следует из выражения $v(F)$ через минимум. Действительно, мы получаем, что $v(F) \geqslant \frac{e}{h} - (p-1)v(t_2)$.

Далее, как было показано в ч. 2 доказательства, выполнено равенство $\sum_{i=2}^{p^{jh}} v(t_i) = ej$ для каждого $j > 0$. Поэтому $b_1 = 0$. Пусть $\Lambda = vu^{-1}$, остаток v по модулю u равен w. Мы получаем, что $w = ap + \sum_{i=1}^{h-1} w_i\Delta^i$, где $a \in \mathfrak{O}_K^*$. Тогда, согласно предложению 3.3.1, F изоморфна хорошей группе, соответствующей оператору $a^{-1}wu^{-1}$. •

4.4. Логарифмы и изогении хороших групп. Избавимся от условия на $n(F)$ в предложении 3.3.1.

Предложение 4.4.1. *Группа F' с логарифмом $\lambda' = \Lambda'(x)$ изоморфна хорошей группе F, соответствующей Λ, если и только если $\Lambda'\varepsilon \equiv a\Lambda \bmod R$ для некоторых $\varepsilon \in W^*$, $a \in \mathfrak{O}_K^*$.*

Доказательство. Нам достаточно доказать, что из условия на дробные части следует $n(F') \leqslant [\frac{e}{h-ph}]$. Так как дробная часть определяет $v(F')$, мы легко получаем $v(F') = v(F) = 0$. Остается применить предложение 4.3.1. •

Теперь опишем ядра изогений из произвольных групп в хорошие.

Предложение 4.4.2. *Пусть $f : F \to G$ — изогения формальных групп. Тогда G изоморфна хорошей группе, если и только если для некоторого $s \geqslant 0$ ядро f равно $\{t_i :\ 1 \leqslant i \leqslant p^s\}$, при этом $\frac{se}{h} - \sum_{i=2}^{p^s} v(t_i) = v(F)$.*

Доказательство. Обозначим ядро f через T, пусть $\#T = p^s$. Из предложения 3.2.1 легко получаем, что если для формальных групп F, F' выполнено $ar(F) = r(F')\varepsilon\Delta^m$, где $\varepsilon \in W^*$, то $v(F') = v(F) + v(a) - \frac{me}{h}$. Таким образом, $v(G) = v(F) - \frac{se}{h} + \sum_{t\in T} v(t)$. Поэтому $v(G) = 0$ тогда и только тогда, когда $\sum_{t\in T} v(t) = \frac{se}{h} - v(F)$. Докажем, что при этом T имеет вид $\{t_i :\ 1 \leqslant i \leqslant p^s\}$. Действительно, сумма нормирований элементов $T \setminus \{0\}$ равна $\sum_{2\leqslant i\leqslant p^s} v(t_i)$. Осталось проверить, что не существует другого набора t_i с той же суммой нормирований. Для этого достаточно проверить, что $v(t_{p^s+1}) < v(t_{p^s})$.

Проверим это. Действительно, иначе мы бы имели $v(t_{p^s+1}) = v(t_{p^s+2}) = \dots = v(t_{p^{s+1}}) = v(t_{p^s})$. Мы имеем $\sum_{2\leqslant i\leqslant p^{s-1}} v(t_i) \leqslant \frac{se-e}{h} - v(F)$, а значит,

$$v(t_{p^s}) = \frac{\sum_{p^{s-1}+1\leqslant i\leqslant p^s} v(t_i)}{(p-1)p^{s-1}} \geqslant \frac{e}{h(p-1)p^{s-1}}.$$

Поэтому

$$\sum_{2\leqslant i\leqslant p^{s+1}} v(t_i) = \sum_{2\leqslant i\leqslant p^s} v(t_i) + (p-1)p^s v(t_{p^s}) \geqslant \frac{(s+p)e}{j} - v(F),$$

что противоречит п. 1 предложения 4.3.1. •

4.5. Завершение доказательства основной теоремы. Очевидно из определения (см. теорему 3.4.1), что логарифм группы F_i, построенной по формальной группе F, отличается от логарифма F_i, построенной по F_1, умножением на некоторый $c \in \mathfrak{O}_K^*$. Поэтому F_i для F изоморфны F_i для F_1. Заметим также, что d и s в формулировке основной теоремы не зависят от выбора представителя класса изогенности. Таким образом, нам осталось доказать теорему 3.4.1 для хорошей группы F.

Докажем утверждение п. 1 теоремы. Воспользуемся следующим хорошо известным фактом: если f_1 и f_2 — изогении из F в формальные группы G_1 и G_2, ядра f_1 и f_2 равны, то $G_1 \cong G_2$.

Таким образом, согласно предложению 4.4.2, если G — хорошая группа, изогенная F, то класс изоморфности G однозначно восстанавливается по высоте изогении.

Если f — изогения высоты m из F в G, то $[p]_G \circ f$ — тоже изогения из F в G, ее высота равна $m + h$. Таким образом, если G — хорошая группа, изогенная F, то класс изоморфности G однозначно восстанавливается по остатку высоты изогении по модулю h. Согласно предложению 4.4.2, высоты изогений из F в хорошие группы равны в точности $b_i + lh$, $1 \leqslant i \leqslant s = s(F)$, для достаточно больших величин l. С другой стороны, для каждого $1 \leqslant i \leqslant s(F)$, согласно теореме 3.1.1, существует изогения из F в F_i высоты $b_i + nh$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, п. 1 теоремы доказан.

Докажем утверждение п. 2. Пусть $f \in \mathrm{End}(F_i)$ — эндоморфизм F_i, который является униформизующим элементом в кольце эндоморфизмов. Заметим, что высоты эндоморфизмов задают нормирование на кольце эндоморфизмов F, при этом высота $[p]_F$ равна h. Тогда получаем, что высота f равна h/d. Аналогично рассуждению, приведенному выше, мы получаем, что если $i + s/d \leqslant s$, то f устанавливает изоморфизм между F_i и какой-то группой, изоморфной $F_{i'}$, где $b_{i'} = b_i + h/d$. Поэтому если $h/d \mid b_i - b_j$, то группа F_i изоморфна F_j. Легко видеть, что это условие выполнено тогда и только тогда, когда $s/d \mid i - j$.

Теперь пусть $s/d \nmid i - j$. Из теоремы 3.1.1 получаем, что между F_i и F_j существует гомоморфизм f, чья высота не делится на h/d. Тогда высота f не совпадает с высотами элементов $\mathrm{End}(F_i)$, а значит, группа F_i не изоморфна F_j.

П. 3 немедленно получается из п. 1 и 2.

4.6. D_F для не-p-типических формальных групп. Как было сказано выше, каждая формальная группа строго изоморфна формальной группе, соответствующей p-типической части ее логарифма. Поэтому определим D_F

для произвольной формальной группы как D_F для соответствующей ей p-типической группы F_p.

Предложение 4.6.1. 1. D_F *удовлетворяет предложению* 2.1.2.

2. $h(x) \in K[[x]]$ *удовлетворяет* $\exp_F(h) \in \mathfrak{O}_K[[x]]$ *в том и только в том случае, если для каждого* i, $p \nmid i$, *выполнено* $\sum_s a_{p^s i}\Delta^s \in D_F$. *Здесь* a_i — *коэффициент* λ *при* x^i.

3. λ' — *логарифм формальной группы, строго изоморфной* F, *тогда и только тогда, когда* $\lambda \equiv x \mod \deg 2$ *и* λ' *удовлетворяет условию на* h *в предыдущем пункте.*

Доказательство см. в [2].

С помощью этих результатов легко можно проверить, когда данная не p-типическая формальная группа изоморфна данной хорошей группе.

§5. Сравнение функтора дробной части логарифма формальной группы с функтором Фонтена

Так как в этой статье рассматриваются только одномерные формальные группы, сравнивать функторы мы тоже в основном будем только для таких групп. Следует, однако, заметить, что большинство рассуждений могут быть достаточно очевидным образом перенесены на случай произвольной размерности.

5.1. Описание функтора Фонтена. Инвариант дробной части логарифма принимает значение в модуле $K[[\Delta]]/R$. Этот модуль не имеет кручения и инъективно вкладывается в аналогичный модуль для $K' \supset K$. Инвариант Фонтена, который будет описан ниже (несколько иным способом, чем в книге [4]), принимает значения в некоторых модулях, которые (в первоначальном определении) зависят от редукции формальной группы и имеют кручение при $e \geqslant p$. При этом при расширении основного поля кручение первоначального модуля отображается в новый модуль неинъективно; если индекс ветвления расширения достаточно велик, то все кручение переходит в 0. Отметим также, что на настоящий момент автору не известно ни о каких применениях кручения в инварианте Фонтена. Исходя из этого, мы будем сравнивать инвариант дробной части логарифма с инвариантом Фонтена, профакторизованным по кручению.

Напомним, что мы работаем с одномерными p-типическими формальными группами конечной высоты h.

Инвариант Фонтена можно разделить на две следующие части:

1) Редукция формальной группы F.

2) Модуль $\{c\Lambda : c \in \mathfrak{O}_K\}$, рассматриваемый как подмодуль $K[[\Delta]]/M$, где $M = \{\sum a_i\Delta^i : a_i \in \sum_{j\leqslant i} \mathfrak{M}^{p^j - je}\}$.

В работе [4] рассматриваются свойства этого инварианта, которые превращают его в функтор. Конечно же, эти свойства аналогичны описанным выше (см. теорему 3.1.1) свойствам инварианта дробной части логарифма. Поскольку в этом параграфе мы хотим лишь продемонстрировать, что дробная часть логарифма описывает формальные группы точнее, чем инвариант Фонтена, нам эти свойства не понадобятся. Нам достаточно будет показать, что формальные группы, имеющие равные инварианты Фонтена (в смысле определения этого пункта), могут иметь неэквивалентные дробные части логарифма. Поэтому мы не будем рассматривать классы эквивалентности инвариантов Фонтена, полученные в [4].

5.2. Сравнение функторов. Сначала покажем, что дробная часть логарифма описывает формальные группы не хуже, чем инвариант Фонтена. Как было сказано выше, формальные группы, имеющие равные дробные части логарифма, изогенны. Поведение дробной части логарифма при изогениях было полностью описано.

Пусть теперь $\Lambda \equiv \Lambda' \mod R$, где Λ, Λ' соответствуют формальным группам F, F'. Мы можем считать, что $h > 1$, так как изогенные формальные группы высоты 1 изоморфны. Тогда коэффициенты Λ и Λ' при Δ^i делятся на π/p^i. Кроме того, для некоторого s мы имеем $\pi^s(\Lambda - \Lambda') \in \mathfrak{O}_K[[\Delta]]$ (на самом деле, достаточно взять $s = \max_{j>0}(ej - p^j)$). Мы получаем, что если абсолютный индекс ветвления K достаточно велик, то $\Lambda - \Lambda' \in M$, а значит, F и F' имеют равные инварианты Фонтена.

5.3. Примеры. Теперь докажем, что формальные группы, имеющие равные инварианты Фонтена, но неэквивалентные дробные части логарифма, действительно существуют.

Согласно предложению 4.2.4, для этого достаточно построить хорошую формальную группу F, группы $T_1, T_2 \subset F(\mathfrak{M}_{\mathbb{K}})$ такие, что $\#T_1 = \#T_2$ и

$$\sum_{t\in T_1\setminus\{0\}} v(t) = \sum_{t\in T_2\setminus\{0\}} v(t), \quad \text{но} \quad \prod_{t\in T_1\setminus\{0\}} r(t) \neq \prod_{t\in T_2\setminus\{0\}} r(t). \tag{9}$$

Действительно, изоморфизм $f \equiv ax \mod \deg 2$ домножает $r(F)$ на a слева и на $\varepsilon \in W$ справа, $\varepsilon \equiv a \mod (\Delta, \pi)$. Таким образом, изоморфизмы могут домножать $r(F)$ слева лишь на $a \equiv 1 \mod \pi$.

Ситуация вида (9) встречается очень часто. При этом, конечно же, построенные формальные группы будут определены над тем расширением поля K, чья абсолютная группа Галуа переводит T_1 и T_2 в себя.

Для того чтобы это поле (т.е. минимальное возможное поле определения формальных групп, которые мы строим) было легко описать, возьмем в качестве F группу Любина–Тэйта поля K, являющегося неразветвленным расширением $\mathbb{Q}_p$ степени 2. Обозначим p^2 через q.

Мы получаем, что для $0 < i < q$ выполнено $v(t_i) = 1/(q-1)$. Выберем среди $0 < i < q$ такие t_{i_1}, t_{i_1}, что $r(t_{i_1}/t_{i_2})$ — первообразный корень из 1 степени $q-1$. Возьмем группу T_1, порожденную t_{i_1}, и T_2, порожденную t_{i_2}. Мы получаем, что $\#T_1 = \#T_2 = p$ и $\sum_{t\in T_1\setminus\{0\}} v(t) = \sum_{t\in T_2\setminus\{0\}} v(t) = 1/(p+1)$. С другой стороны,

$$\prod_{t\in T_1\setminus\{0\}} r(t) = r(t_{i_1}/t_{i_2})^{p-1} \prod_{t\in T_2\setminus\{0\}} r(t) \neq \prod_{t\in T_2\setminus\{0\}} r(t),$$

а значит, T_1 и T_2 являются искомыми. Заметим, что соответствующие T_1 и T_2 формальные группы определены над вполне разветвленным расширением K степени $p+1$ (а значит, абсолютного индекса ветвления $p+1$).

Список литературы

[1] Бондарко М. В., Востоков С. В., *Явная классификация формальных групп над локальными полями*, Тр. Мат. ин-та РАН **241** (2003), 43–67.

[2] Бондарко М. В., *Явная классификация формальных групп над полными дискретно-нормированными полями с несовершенным полем вычетов*, Тр. С.-Петербург. мат. о-ва **11** (2005), 1–36.

[3] Fesenko I., Vostokov S. V., *Local fields and their extensions. A constructive approach*, 2nd ed., Transl. Math. Monogr., vol. 121, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[4] Fontaine J. M., *Groupes p-divisibles sur les corps locaux*, Astérisque, No. 47–48, Soc. Math. France, Paris, 1977, 262 pp.

[5] Hazewinkel M., *Formal groups and applications*, Pure Appl. Math., vol. 78, Acad. Press, Inc., New York–London, 1978, 573 pp.

[6] Laffaille G., *Construction de groupes p-divisibles. Le cas de dimension* 1, Astérisque, No. 65, Soc. Math. France, Paris, 1979, pp. 103–123.

С.-Петербургский
государственный университет
198504, Санкт-Петербург
Университетский пр., 28
Россия
E-mail: mbondarko@hotmail.com

Поступило 24 мая 2004 г.