

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Абалакин, А. В. Жохова, Б. Н. Четверушкин, Разностные схемы на основе кинетического расщепления вектора потока, *Матем. моделирование*, 2000, том 12, номер 4, 73–82

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.168

24 января 2025 г., 16:30:35



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

УДК 519.63

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ НА ОСНОВЕ КИНЕТИЧЕСКОГО РАСЩЕПЛЕНИЯ ВЕКТОРА ПОТОКА

© *И.В. Абалакин, А.В. Жохова, Б.Н. Четверушкин*

Институт математического моделирования РАН, Москва

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований
(коды проектов 97-01-01032 и 98-01-00155)

Рассматриваются кинетически-согласованные разностные схемы (КСРС) как один из методов расщепления вектора потока для аппроксимации уравнений Эйлера.

DIFFERENCE SCHEMES BASED ON KINETIC SPLITTING OF FLUX VECTOR

I.V. Abalakin, A.V. Zhokhova, B.N. Chetverushkin

In this paper kinetically consistent difference (KCFD) schemes are considered as one of the flux vector splitting methods for the approximation of Euler equations.

1. Введение

В настоящее время существует несколько подходов к построению разностных схем для уравнений газовой динамики. В самом общем случае разностные схемы газовой динамики делятся на два класса. Это центрально-разностные схемы (схема Лакса - Вендроффа [1], TVD-схема Хартена [2]) и противопотоковые схемы (схемы, учитывающие направления распространения возмущений на расчетной сетке). В свою очередь противопотоковые схемы можно разделить на две группы [3] по физической модели взаимодействия между соседними областями и дискретной среды.

В первой модели взаимодействие осуществляется посредством дискретных волн, получаемых с помощью точного или приближенного решения задачи о распаде произвольного разрыва, заданного на границе между ячейками (задача Римана). К такого типа схемам относятся схемы Годунова [4], Ошера [5], Роз [6].

В другой модели предполагается, что сплошную среду можно "разделить" на группы частиц, имеющих свою определенную скорость. В этом случае взаимодействие между ячейками расчетной сетки происходит, благодаря перемешиванию

этих групп частиц. Поясним это на простом примере. Пусть имеется изотермический газ ($T = \text{const}$, $\gamma = 1$, $c = \text{const}$, $p = \rho c^2$). Тогда уравнения газовой динамики запишутся в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho(u^2 + c^2)}{\partial x} = 0. \quad (1.2)$$

Введем в рассмотрение два сорта частиц, распределенных с плотностью $\rho/2$ и скоростями $u + c$ и $u - c$ соответственно. Средняя скорость этих частиц есть u . В этом случае система (1.1)-(1.2) естественным образом расщепляется на две системы для каждой группы частиц:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho/2}{\partial t} + \frac{\partial \rho(u - c)/2}{\partial x} = 0, & \quad \frac{\partial \rho/2}{\partial t} + \frac{\partial \rho(u + c)/2}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \rho u/2}{\partial t} + \frac{\partial \rho(u - c)^2/2}{\partial x} = 0, & \quad \frac{\partial \rho u/2}{\partial t} + \frac{\partial \rho(u + c)^2/2}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

В сумме эти две системы дают систему (1.1)-(1.2), которую также можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho(u - c)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho(u + c)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho(u - c)^2}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho(u + c)^2}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

Такой подход носит название метода расщепления вектора потока. Далее каждый расщепленный вектор потока аппроксимируется правой или левой разностью в зависимости от знака соответствующей скорости. Примерами таких схем являются схема Стегера-Уорминга [7], схема Ван Лира [3]. Вид уравнения (1.1) напоминает бесстолкновительное уравнение Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \xi f}{\partial x} = 0, \quad (1.3)$$

где $f = f(x, \xi, t)$ — функция распределения частиц газа, имеющих скорость ξ . Поэтому естественным образом возникает мысль связать кинетическое уравнение с методом расщепления вектора потока, что и было сделано в [11], где, исходя из уравнения (1.3), было получено кинетическое обоснование схемы Стегера-Уорминга. Но при конструировании разностных схем газовой динамики можно непосредственно отталкиваться от уравнения Больцмана или от кинетических моделей газа [8-10].

Полученные таким способом схемы, получили название кинетически-согласованных (КСРС). Их суть состоит в том, что схемы для уравнений газовой динамики получаются из осреднения разностной схемы для уравнения Больцмана. Целью данной статьи является анализ КСРС и их сравнение с уже известными схемами для уравнений газовой динамики, а также возможность получения газодинамических разностных схем с заданными свойствами, закладывая эти свойства в разностную аппроксимацию уравнения Больцмана.

2. Построение разностной схемы для системы гиперболических уравнений методом расщепления вектора потока

В этом пункте рассмотрим схему расщепления вектора потока Стегера-Уорминга для невязких газодинамических уравнений.

Для линейного скалярного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \text{где } a = \text{const},$$

запишем схему с направленными разностями (схема Куранта-Изааксона-Риса (CIR)):

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2} a (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\lambda}{2} |a| (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \quad (2.1)$$

где $\lambda = \Delta t / \Delta x$. Хорошо известно [4], что схема (2.1) представляет собой линейный скалярный аналог схемы распада разрыва Годунова. Обобщим данную схему на систему линейных гиперболических уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0, \quad (2.2)$$

где $\mathbf{U} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ — вектор переменных, матрица $\mathbf{A} = \text{const}$. Так как система (2.2) гиперболическая, то матрица \mathbf{A} имеет различные действительные собственные значения μ_i ($i = 1, 2, \dots, m$) и ее можно диагонализировать подобным преобразованием:

$$\mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{\Lambda}, \quad \Lambda_{ij} = \mu_i \delta_{ij}, \quad (2.3)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Столбцы матрицы $\mathbf{S}(\mathbf{S}^{-1})$ суть правые (левые) собственные векторы матрицы $\mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1})$. Далее, домножая систему (2.2) на матрицу \mathbf{S}^{-1} слева и вводя характеристические переменные $\mathbf{W} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{U}$, получаем систему m независимых скалярных уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0. \quad (2.4)$$

Запишем схему (2.1) для каждого уравнения системы (2.4). Тогда в векторном виде данная схема будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{W}_j^{n+1} = \mathbf{W}_j^n - \frac{\lambda}{2} \mathbf{\Lambda} (\mathbf{W}_{j+1}^n - \mathbf{W}_{j-1}^n) + \frac{\lambda}{2} |\mathbf{\Lambda}| (\mathbf{W}_{j+1}^n - 2\mathbf{W}_j^n + \mathbf{W}_{j-1}^n), \quad (2.5)$$

где $|\mathbf{\Lambda}|_{kl} = |\mu_k| \delta_{kl}$. Домножая (2.5) на матрицу \mathbf{S} слева, перейдем к схеме в исходных переменных:

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n - \frac{\lambda}{2} \mathbf{A} (\mathbf{U}_{j+1}^n - \mathbf{U}_{j-1}^n) + \frac{\lambda}{2} |\mathbf{A}| (\mathbf{U}_{j+1}^n - 2\mathbf{U}_j^n + \mathbf{U}_{j-1}^n), \quad (2.6)$$

где $|\mathbf{A}| = \mathbf{S} |\mathbf{\Lambda}| \mathbf{S}^{-1}$.

Систему уравнений (2.2) можно записать в потоковом виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0, \quad \text{где } \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{A} \mathbf{U}. \quad (2.7)$$

Расцепим поток $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ на две части \mathbf{F}^+ и \mathbf{F}^- :

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{F}^+(\mathbf{U}) + \mathbf{F}^-(\mathbf{U}), \quad (2.8)$$

где

$$\mathbf{F}^+(\mathbf{U}) = \mathbf{A}^+\mathbf{U}, \quad \mathbf{F}^-(\mathbf{U}) = \mathbf{A}^-\mathbf{U}, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + |\mathbf{A}|), \quad \mathbf{A}^- = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - |\mathbf{A}|). \quad (2.10)$$

Тогда схема (2.6) в новых обозначениях запишется в противопотоковом виде

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n - \lambda \left((\mathbf{F}^-)_{j+1}^n - (\mathbf{F}^-)_j^n \right) + \lambda \left((\mathbf{F}^+)_j^n - (\mathbf{F}^+)_{j-1}^n \right). \quad (2.11)$$

Здесь сделаем одно замечание. Из сказанного выше видно (см.[4]), что схема CIR для системы линейных уравнений есть аналог схемы Годунова в линейном приближении. Таким образом, для систем линейных гиперболических уравнений разностные схемы метода расщепления вектора потока и метода, основанного на решении задачи Римана, полностью идентичны. Различаются они только для систем нелинейных уравнений, где решение задачи Римана существенно нелинейно.

Теперь перейдем к уравнениям газовой динамики, которые также можно записать в потоковом виде (2.7), где

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \neq \text{const}, \quad (2.12)$$

$$m = \rho u, \quad E = \frac{\rho u^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1}, \quad p = \rho RT \quad (2.13)$$

Газодинамический поток $\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{F}(\rho, m, E)$ есть однородная функция степени один, то есть $\mathbf{F}(k\rho, km, kE) = k\mathbf{F}(\rho, m, E)$, где $k = \text{const}$. Следовательно, по теореме Эйлера об однородных функциях имеем $\mathbf{F}(\mathbf{U}) = (\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{U})\mathbf{U}$ или $\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{A}\mathbf{U}$. Отсюда заключаем, что для системы уравнений газовой динамики формально схема (2.11) остается той же самой, что и в случае системы линейных уравнений. Данная схема носит название схемы Стегера-Уорминга [7]. При этом матрицы \mathbf{A} и $|\mathbf{A}|$ имеют вид

$$\mathbf{A} = \text{diag}(u + c, u, u - c), \quad |\mathbf{A}| = \text{diag}(|u + c|, |u|, |u - c|). \quad (2.14)$$

3. Разностные схемы на основе кинетического расщепления

Рассмотрим теперь одномерное по пространству уравнение Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \xi_x f}{\partial x} = J(f, f'), \quad (3.1)$$

где $f = f(x, \xi, t)$ есть функция распределения, $\xi = (\xi_x, \xi_y, \xi_z)$ — вектор скорости и $J(f, f')$ — интеграл столкновений. По свойству интеграла столкновений

$$\int \varphi_k(\xi) J(f, f') d\xi = 0,$$

где $\varphi_k(\xi) = 1, \xi_x, (\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2)/2 + e_0$ для $k = 1, 2, 3$ соответственно, $e_0 = (5 - 3\gamma)RT/2(\gamma - 1)$. Учитывая это свойство, в дальнейшем для удобства записи $J(f, f')$ будем заменять нулем.

Согласно [11], расщепим поток в уравнении (3.1) на две части, соответствующие скорости $\xi_x > 0$ и $\xi_x < 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}(\xi_x + |\xi_x|)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}(\xi_x - |\xi_x|)\frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (3.2)$$

Затем проинтегрируем по скоростям ξ , предварительно домножая (3.2) на $\varphi(\xi)$. При интегрировании будем полагать, что функция распределения $f = f(x, \xi, t)$ имеет локально-максвелловский вид

$$f(x, \xi, t) = f_0 = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp\left(-[(\xi_x - u)^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2]\right). \quad (3.3)$$

В результате интегрирования получаем следующие расщепленные уравнения газовой динамики:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F^+(U)}{\partial x} + \frac{\partial F^-(U)}{\partial x} = 0, \quad (3.4)$$

где

$$F^\pm = \frac{1}{2} \int \varphi_k(\xi)(\xi_x \pm |\xi_x|) f_0 d\xi \quad (k = 1, 2, 3)$$

или в макропараметрах:

$$F_1^\pm = \frac{1}{2} \rho u \pm \frac{1}{2} [\theta \exp(-\beta^2) \rho + \operatorname{erf}(\beta) \rho u],$$

$$F_2^\pm = \frac{1}{2} (\rho u^2 + p) \pm \frac{1}{2} [\theta \exp(-\beta^2) \rho u + \operatorname{erf}(\beta) (\rho u^2 + p)],$$

$$F_3^\pm = \frac{1}{2} (E + p) u \pm \frac{1}{2} [\theta \exp(-\beta^2) (E + p/2) + \operatorname{erf}(\beta) (E + p) u],$$

где

$$\beta = \frac{u}{\sqrt{2RT}}, \quad \theta = \sqrt{\frac{2RT}{\pi}}, \quad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt.$$

Теперь сравним данное расщепление с расщеплением Стегера-Уорминга (2.8). Для этого запишем потоки F^\pm в векторном виде аналогично (2.8):

$$F_{\text{kc}}^\pm = A_{\text{kc}}^\pm U, \quad A_{\text{kc}}^\pm U = \frac{1}{2} (A \pm |A|_{\text{kc}}), \quad |A|_{\text{kc}} = l_1 A + l_2 (I + D). \quad (3.5)$$

Здесь I — единичная матрица, а D — матрица вида

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\gamma - 1)\frac{u}{4} & \frac{\gamma - 1}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

l_1, l_2 — скалярные величины, равные

$$l_1 = \operatorname{erf}(\beta), \quad l_2 = \theta \exp(-\beta^2) \quad (3.7)$$

В случае расщепления Стегера-Уорминга матрица $|\mathbf{A}|$ определяется, как $|\mathbf{A}|_{\text{sw}} = \mathbf{S}|\mathbf{A}|\mathbf{S}^{-1}$, где $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}|_{\text{sw}}$ дано в (2.14). При таком способе расщепления матрицу $|\mathbf{A}|_{\text{kc}}$ нельзя привести к диагональному виду подобным преобразованием \mathbf{S} , так как матрица \mathbf{D} имеет собственные векторы, отличные от собственных векторов матрицы \mathbf{A} . Поэтому для простоты изучим случай изотермического газа ($T = \text{const}$, $\gamma = 1$, $c = \sqrt{RT} = \text{const}$, $p = \rho c^2$). Отсюда вытекает, что уравнение энергии можно не рассматривать и, следовательно, $\mathbf{D} = \mathbf{O}$ (\mathbf{O} — нулевая матрица). В этом случае матрицу $|\mathbf{A}|_{\text{kc}}$ можно представить в виде

$$|\mathbf{A}|_{\text{kc}} = l_1 \mathbf{A} + l_2 \mathbf{I} = \mathbf{S}|\mathbf{A}|_{\text{kc}} \mathbf{S}^{-1}. \quad (3.8)$$

Здесь $|\mathbf{A}|_{\text{kc}} = \operatorname{diag}(\lambda_{\text{kc}}^+, \lambda_{\text{kc}}^-)$, где

$$\lambda_{\text{kc}}^\pm = l_1(u \pm c) + l_2. \quad (3.9)$$

Рассмотрим поведение собственных значений (3.9) матрицы $|\mathbf{A}|_{\text{kc}}$ в зависимости от локального числа Маха $M = u/c = u/\sqrt{RT}$. Для этого перепишем λ_{kc}^\pm в виде

$$\lambda_{\text{kc}}^\pm = c \left[\operatorname{erf}(M/\sqrt{2})(M \pm 1) + \sqrt{2/\pi} \exp(-M^2/2) \right]. \quad (3.10)$$

Проведя достаточно простое исследование функции λ_{kc}^\pm получаем следующие результаты (см. также рис.1):

1. Кривая λ_{kc}^-/c стремится к асимптоте $\lambda^-/c = |M - 1|$ при $|M| \rightarrow \infty$, причем $\lambda_{\text{kc}}^-/c > |\lambda^-|/c$ при $M > 0$ и $\lambda_{\text{kc}}^-/c < |\lambda^-|/c$ при $M < 0$. Кривая λ_{kc}^+/c стремится к асимптоте $\lambda^+/c = |M + 1|$ при $|M| \rightarrow \infty$ причем $\lambda_{\text{kc}}^+/c < |\lambda^+|/c$ при $M > 0$ и $\lambda_{\text{kc}}^+/c > |\lambda^+|/c$ при $M < 0$.

2. Кривая λ_{kc}^-/c имеет положительный минимум в точке M_0 , кривая λ_{kc}^+/c — положительный минимум в точке $-M_0$, где M_0 есть корень уравнения $\operatorname{erf}(M/\sqrt{2}) = \sqrt{2/\pi} \exp(-M^2/2)$ ($M_0 \approx 0.803$).

Таким образом, собственные числа матрицы $|\mathbf{A}|_{\text{kc}}$ всюду строго положительны (в отличие от собственных чисел матрицы $|\mathbf{A}|_{\text{sw}}$, которые могут быть равны 0 в звуковых точках ($M = \pm 1$), а при больших числах Маха ведут себя как собственные числа матрицы $|\mathbf{A}|_{\text{sw}}$).

Также легко показать, что собственные числа матрицы $|\mathbf{A}|_{\text{kc}}^+ (|\mathbf{A}|_{\text{kc}}^-)$ будут строго положительны (отрицательны) и

$$(\lambda_{1,2,3}^\pm)_{\text{kc}} \approx (\lambda_{1,2,3}^\pm)_{\text{sw}} \quad \text{при} \quad |M| \gg 1. \quad (3.11)$$

Из сказанного выше следует, что кинетически согласованное расщепление вектора потока в случае изотермического газа аналогично расщеплению Стегера-Уорминга.

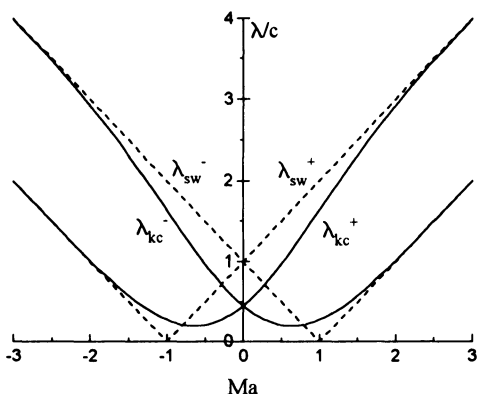


Рис. 1. Собственные значения матриц $|A|_{kc}$ и $|A|_{sw}$

Расщепление Стегера-Уорминга $F^\pm = A_{sw}U$	Кинетически согласованное расщепление $F^\pm = A_{kc}U$
Собственные числа матрицы A_{sw}	Собственные числа матрицы A_{kc}
$(\lambda_1^\pm)_{sw} = (u + c \pm u + c)/2$	$(\lambda_1^\pm)_{kc} = (u + c \pm l_1(u + c) \pm l_2)/2$
$(\lambda_2^\pm)_{sw} = (u - c \pm u - c)/2$	$(\lambda_2^\pm)_{kc} = (u - c \pm l_1(u - c) \pm l_2)/2$

Аппроксимируя кинетически расщепленные потоки как в (2.11), мы получаем противопотоковую схему (поток аппроксимируется правой или левой разностью в зависимости от знака скорости распространения возмущений).

В случае неизотермического газа не удается так просто показать противопотоковое свойство кинетически расщепленной схемы (3.4). Поэтому в [12] это обоснование проводится косвенным путем. Для этого расщепленные уравнения газовой динамики (2) преобразуются к симметричной форме (возможность и техника такого преобразования приведены в [13]). Здесь вместо вектора консервативных переменных U введем вектор новых зависимых переменных V , так чтобы $U = U(V)$. Тогда (3.4) можно записать в виде

$$\frac{\partial U(V)}{\partial t} + \frac{\partial F^+(V)}{\partial x} + \frac{\partial F^-(V)}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial F^+}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial F^-}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \quad (3.12)$$

Обозначим матрицы $\partial U/\partial V$, $\partial F^\pm/\partial V$ через P и B^\pm соответственно. В [13] было показано, что если в качестве вектора переменных V выбрать градиент энтропии $S = \ln(p/\rho^\gamma)$ по U :

$$V = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)^T, \quad (3.13)$$

то матрица P будет симметричной положительно определенной, а матрицы B^\pm — симметричны. Тогда систему (3.12) можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial V}{\partial t} + P^{-1}B^+ \frac{\partial V}{\partial x} + P^{-1}B^- \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \quad (3.14)$$

В случае кинетического расщепления вектора потока, согласно [12], матрица $P^{-1}B^+(P^{-1}B^-)$ имеет положительные (отрицательные) действительные собственные значения. Этот факт подтверждает противопотоковое свойство кинетического расщепления. Для чисел $M \gg 1$ это свойство следует непосредственно из (3.4). В этом случае $\operatorname{erf}(\beta) \approx 1$, $\exp(-\beta^2) \approx 0$, где $\beta = |M|(\gamma/2)^{1/2}$, и расщепленные потоки (3.4) запишутся в виде

$$F^\pm = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \rho u(1 \pm \operatorname{sgn}(u)) \\ (\rho u^2 + p)(1 \pm \operatorname{sgn}(u)) \\ u(E + p)(1 \pm \operatorname{sgn}(u)) \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Аппроксимируя эти потоки аналогично (2.11), легко видеть, что в зависимости от знака скорости u , остается либо левая, либо правая разность от газодинамического потока F .

Здесь сделаем следующее замечание. Описанная выше схема кинетического расщепления уравнений Эйлера базировалась на расщеплении потока функции распределения (3.2), которое бралось одинаковым при интегрировании с любым сумматорным инвариантом. Если же вывод уравнений неразрывности и импульса базируется на расщеплении (3.2), а при получении уравнения энергии проинтегрировать (3.2) с весом $\xi_x^2 + e_0$, а при интегрировании с весами ξ_y^2 , ξ_z^2 использовать другое расщепление вектора потока в уравнении (3.1)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\xi_x + \frac{|\xi_x|}{\xi_x} u \right) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\xi_x - \frac{|\xi_x|}{\xi_x} u \right) \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

то полученное расщепление для неизотермического газа будет подобно изотермическому случаю (3.8) (то есть $D = 0$), где

$$|\mathbf{A}|_{\text{кс}} = \operatorname{diag} (\lambda_{\text{кс}}^1, \lambda_{\text{кс}}^2, \lambda_{\text{кс}}^3),$$

$$\lambda_{\text{кс}}^1 = l_1(u + c) + l_2, \quad \lambda_{\text{кс}}^2 = l_1(u - c) + l_2, \quad \lambda_{\text{кс}}^3 = l_1 u + l_2.$$

Зависимость этих собственных значений от числа Маха аналогична изотермическому случаю (3.10).

Заметим, что собственные числа λ^\pm матриц A^\pm в расщеплении Стегера-Уорминга (следовательно, и потоки F^\pm) недифференцируемы в звуковых точках ($M = \pm 1$) и в точках покоя ($u = 0$). Понятно, что такое нарушение гладкости вызывает нежелательные эффекты при расчетах транзвуковых течений и течений с точками торможения. От этого недостатка свободно кинетически согласованное расщепление, в котором расщепленные потоки обладают хорошей гладкостью.

Таким образом, кинетически согласованное расщепление дает бесконечно непрерывно-дифференцируемое приближение расщепления Стегера-Уорминга.

4. Пример численного расчета

В качестве иллюстрации разных типов расщепления вектора потока приведем пример расчета изотермического течения в сопле Лавала, имеющего площадь поперечного сечения $s(x)$:

$$s(x) = \begin{cases} 1 + 1,5(1 - 0,2x)^2, & 0 \leq x \leq 5, \\ 1 + 0,5(1 - 0,2x)^2, & 5 < x \leq 10. \end{cases}$$

Такого типа течение описывается квазиодномерной системой уравнений Эйлера

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = \frac{\partial \ln s}{\partial x} \rho u, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho (u^2 + c^2)}{\partial x} = \frac{\partial \ln s}{\partial x} \rho u^2.$$

Рассматривалось два расчетных режима течения в сопле Лавалья: безударный переход от дозвукового течения к сверхзвуковому и чисто дозвуковое течение. Расчеты были проведены по схеме Стегера-Уорминга, кинетической схеме и схеме расщепления Лири [3].

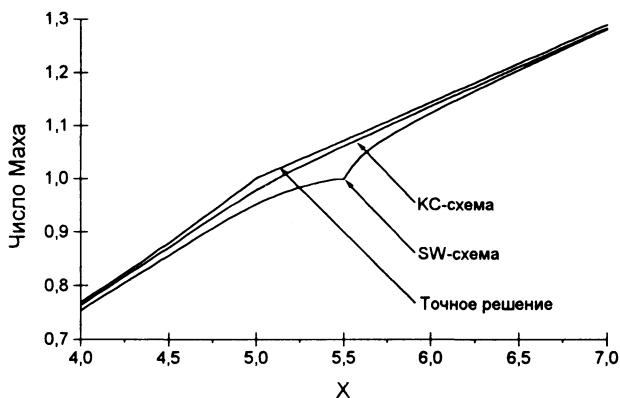


Рис. 2. Распределение числа Маха

На рис.2 приведено распределение локального числа Маха в окрестности звуковой точки. Можно видеть, что непрерывно-дифференцируемое кинетическое расщепление (KC) дает более точный результат, чем недифференцируемое в окрестности звуковой точки расщепление Стегера-Уорминга (SW). Это также можно видеть и из табл.1, где выписаны нормы погрешности плотности в сеточных нормах C и L_2 , где ρ^E — точное решение, а $\bar{\rho}$ — численное решение. Минимальную погрешность в звуковой точке (значение погрешности в норме C) дает схема Лири (VL). Так как в отличие от схемы расщепления Лири в схеме кинетического расщепления переход от дозвукового течения к сверхзвуковому осуществляется асимптотически (рис.1), то погрешность в звуковой точке ($M = 1$) будет несколько больше.

Таблица 1.

Норма	KC	SW	VL
$\ \bar{\rho} - \rho^E\ _{L_2}$	$1,725 \times 10^{-2}$	$5,146 \times 10^{-2}$	$1,659 \times 10^{-2}$
$\ \bar{\rho} - \rho^E\ _C$	$2,073 \times 10^{-2}$	$6,449 \times 10^{-2}$	$7,834 \times 10^{-3}$

Таблица 2.

Норма	КС	SW	VL
$\ \tilde{\rho} - \rho^E\ _{L_2}$	$7,228 \times 10^{-3}$	$9,150 \times 10^{-3}$	$8,343 \times 10^{-3}$
$\ \tilde{\rho} - \rho^E\ _C$	$7,889 \times 10^{-3}$	$8,678 \times 10^{-3}$	$7,385 \times 10^{-3}$

В табл.2 приведены нормы погрешности для чисто дозвукового течения. Можно видеть, что минимальная погрешность достигается при расчете по кинетической схеме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. — М.: Мир, 1972, 418 с.
2. Harten A. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. — J. Comput. Phys., 1983, v.49, p.357-393.
3. van Leer B. Flux-Vector Splitting for the Euler Equations. — Lecture Notes in Physics, 1982, v.170, p.507-512.
4. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванова М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.В. Численное решение многомерных задач газовой динамики. — М.: Наука, 1976, 400 с.
5. Osher S., Solomon F. Upwind Difference Schemes for Hyperbolic Systems of Conservation Laws. — Mathematics of Computational Physics, 1982, v.38, №158, p.339-374.
6. Roe Ph.L. Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes. — J. Comput. Phys., 1981, v.43, p.357-372.
7. Steger J.L., Warming R.F. Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamic Equations with Application to Finite-Difference Methods. — J. Comput. Phys., 1981, v.40, p.263-293.
8. Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н. Использование кинетических моделей для расчета газодинамических течений. В кн. "Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах". — М.: Наука, 1986, с.261-278.
9. Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н. Кинетически-согласованные разностные схемы для моделирования течений вязкого теплопроводного газа. — ЖВМиМФ, 1988, №11, т.28, с.695-710.
10. Абалакин И.В., Четверушкин Б.Н. Применение кинетически-согласованных разностных схем для моделирования течений умеренно разреженного газа. — Математическое моделирование, 1992, т.4, №11, с.20-35.
11. Deshpande S.M. Kinetic theory based new upwind methods for inviscid compressible flow.— AIAA Paper 86-0275, 1986.
12. Deshpande S.M. On the maxwellian distribution symmetric form and entropy conservation for Euler equations. — NASA Technical Paper 2583, 1986.
13. Harten A. On the symmetric form of systems of Conservation Laws with Entropy. — J. Comput. Phys., 1983, v.49, p.151-164.

Поступила в редакцию 09.03.99.