В. В. Ермаков, Об одной задаче Улама, *Матем. заметки*, 1972, том 12, выпуск 2, 155–156

https://www.mathnet.ru/mzm9862

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 12, № 2 (1972), 155—156

УДК 511.2

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УЛАМА

В. В. Ермаков

Пусть R — множество положительных целых чисел с обычными операциями сложения и умножения

$$a + b = s(a, b);\; a \cdot b = m(a, b);\; a, b \in R.$$

Каждому взаимно однозначному (пеановскому) отображению p пространства $R \times R$ на все R сопоставляются две функции:

$$\sigma(c) = \sigma[p(a, b)] = s(a, b);$$

$$\mu(c) = \mu[p(a, b)] = m(a, b).$$

В заметке доказывается, что пеановского отображения, при котором $\sigma(\mu(c)) = \mu(\sigma(c))$ для всех c из R, не может быть. Библ. 1 назв.

В работе [1], стр. 46, сформулирована следующая задача.

Пусть R — множество положительных целых чисел с обычными операциями сложения и умножения:

$$a + b = s(a, b);\; a \cdot b = m(a, b);\; a, b \in R.$$

Каждому взаимно однозначному (пеановскому) отображению p пространства $R \times R$ на все R сопоставляются две функции σ и μ:

$$\sigma(c) = \sigma[p(a, b)] = s(a, b);$$

$$\mu(c) = \mu[p(a, b)] = m(a, b).$$

Существует ли пеановское отображение p, при котором $\sigma(\mu(c)) = \mu(\sigma(c))$ для всех c из R?

В заметке доказывается, что такого отображения быть не может.

Допустим, что оно существует. Тогда для точки $c = p\,(2,2)$

$$\sigma\,(\mu\,(c)) = \sigma\,(4) = \mu\,(\sigma\,(c)) = \mu\,(4).$$

Если

$$c = p\,(3,2), \text{ то } \mu\,(5) = \sigma\,(6);$$

$$c = p\,(4,1), \text{ то } \mu\,(5) = \sigma\,(4);$$

$$c = p\,(5,1), \text{ то } \mu\,(6) = \sigma\,(5);$$

$$c = p\,(6,1), \text{ то } \mu\,(7) = \sigma\,(6).$$

Отсюда

$$\sigma\,(4) = \mu\,(4) = \mu\,(5) = \mu\,(7) = \sigma\,(6).$$

Вычислим $\sigma\,(6)$. Так как p — биективно, то существует точка $(a,\ b) \in R \times R$, для которой $p\,(a,\ b) = 4$. Так как $\sigma\,(4) = \mu\,(4)$, то $a + b = a \cdot b$. Это уравнение имеет единственное решение в целых положительных числах: $a = b = 2$. Поэтому

$$\sigma\,(4) = \mu\,(4) = \mu\,(5) = \sigma\,(6) = 4.$$

Теперь вновь вычислим $\sigma\,(6)$, но по-другому. $\mu\,(5) = 4$, а для $p\,(c,\ d) = 5$ выполнено: $c \cdot d = 4$, причем $(c,\ d) \neq (2,2)$. Отсюда получаем

$$\sigma\,(5) = c + d = 4 + 1 = 5.$$

Аналогично: $\mu\,(6) = 5$; тогда $u \cdot v = 5$ для $p\,(u,\ v) = 6$. Следовательно, $\sigma\,(6) = 6$. Но выше было доказано, что $\sigma\,(6) = 4$. Получаем противоречие *).

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 18.XI.1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Улам С. М., Нерешенные математические задачи, М., 1964.

---

*) Примечание при корректуре. Уже после того, как заметка была принята к печати, А. В. Михалев сообщил мне, что другое решение этой задачи получили Е. Бровкин и Я. Габович («Colloquim Matematicum», XV, № 1 (1966), 199).