



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. D. Anisimov, A. G. Egorov, A. N. Nuriev, O. N. Zaitseva, Propulsive motion of cylindrical vibration-driven robot in a viscous fluid, *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, Volume 166, Book 3, 277–296

DOI: 10.26907/2541-7746.2024.3.277-296

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.169

February 18, 2025, 01:58:34



ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 532.517.6

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.277-296

ПРОПУЛЬСИВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВИБРОРОБОТА В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В.Д. Анисимов, А.Г. Егоров, А.Н. Нуриев, О.Н. Зайцева

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Работа посвящена исследованию движения пропульсивной многомассовой системы – виброробота (ВР) – в вязкой несжимаемой жидкости. Рассмотрена конструкция ВР, состоящая из круглого цилиндрического корпуса, помещенного в вязкую жидкость, и внутренней массы (ВМ), совершающей малоамплитудные маятниковые колебания внутри корпуса. С помощью метода асимптотических разложений решены совместные механическая и гидродинамическая задачи, описывающие самопродвижение такой системы в жидкости. Гидродинамическая задача сформулирована на основе полного нестационарного уравнения Навье–Стокса. Построено аналитическое решение, описывающее крейсерский режим движения ВР в жидкости, найдено нестационарное гидродинамическое воздействие на ВР, а также проведена оценка эффективности движения такой пропульсивной системы.

Ключевые слова: виброробот, пропульсивное движение, крейсерская скорость, уравнение Навье – Стокса

Введение

Задача о самопродвижении тел в жидкости имеет богатую историю и восходит к попыткам объяснения движения птиц, рыб и микроорганизмов. Теория пропульсивного колебательного движения тел в потоке стала развиваться в начале XX-го века на базе теории идеальной жидкости как ответвление классической аэродинамики полета. Как и в теории обтекания стационарного крыла, моделям, описывающим колебательные движения тела в потоке, необходимы дополнительные предположения о точках отрыва потока или о структуре вихревого следа. Для решения этой задачи Л. Прандтлем [1], В. Бирнбаумом [2], Т. Теодорсеном [3], И. Гарриком [4], Г. Вагнером [5] и Г. Глауэртом [6] развивался подход, основанный на введении поверхностей разрыва скоростей внутри идеальной жидкости. В работах Г. Кюсснера [7], Г. Кюсснера и И. Шварца [8] был предложен метод решения проблемы нестационарного движения крыла, основанный на суперпозиции сингулярностей в идеальной жидкости. Аналогичные подходы развивались и советскими учеными М.В. Келдышем и М.А. Лаврентьевым [9], Л.И. Седовым [10] и А.И. Некрасовым [11]. В целом формулирование дополнительных предположений в условиях нестационарного движения тела представляет основную трудность при использовании аппарата идеальной жидкости и в большинстве случаев значительно ограничивает область применимости моделей, названных выше.

Полностью разрешить все эти проблемы возможно при описании гидродинамики с помощью полного уравнения Навье – Стокса. Именно такой подход является доминирующим в современных исследованиях колебательного движения тела в жидкости (см., например, работы [12–26]). В общем случае решение полной нелинейной задачи возможно только с помощью приближенных численных методов. Прямые численные методы решения уравнения Навье – Стокса имеют высокую вычислительную сложность, что существенно лимитирует возможности исследования нестационарного пропульсивного движения даже в двумерном приближении из-за большого числа параметров задачи. В частном случае малых амплитуд колебаний полезной альтернативой прямым численным методам служат приближенные асимптотические подходы.

Метод последовательных асимптотических разложений для исследования гидродинамических течений, формирующихся около тела, поступательно колеблющегося в жидкости, успешно применялся в работах Г. Шлихтинга [27], Й. Хольстмарка [28], Н. Райли [29,30] и А.Н. Нуриева [31,32]. В работе Н. Райли и Э. Дж. Ватсона [33] впервые была продемонстрирована возможность применения этого метода для решения задачи о вращательно-поступательном движении круглого цилиндра. В исследованиях А.Н. Нуриева, А.Г. Егорова и др. [34–37] в рамках асимптотического подхода впервые были получены аналитические приближенные решения уравнения Навье – Стокса, описывающие пропульсивные характеристики мапущего цилиндрического крыла при малоамплитудных колебаниях. Аналитический характер этих результатов позволяет достаточно широко применять их для учета аэрогидродинамики при изучении самодвижущихся устройств.

Помимо проблем аэрогидродинамики для создания эффективных самодвижущихся колебательных устройств необходимо решить проблему разработки эффективного метода расчета возбуждения колебаний. В природе колебания крыльев и плавников вызываются мышцами, однако для искусственных устройств пока не разработано столь же эффективной альтернативы им. В последнее время активно обсуждается возможность самодвижения тела за счет колебаний внутренних масс (ВМ), перемещение которых можно осуществлять с помощью обычных электродвигателей. Одним из первых вопросов об оптимальном движении системы посредством перемещения внутреннего тела был поставлен Ф.Л. Черноусько [38,39], рассмотревшим прямолинейное движение по горизонтальной плоскости твердого тела с полостью, содержащей подвижную ВМ, при наличии кулоновского трения между плоскостью и телом. Данная проблематика широко обсуждается в литературе как для других идеализированных законов сопротивления, так и для неоднородных перемещений ВМ [40–45]. В частности, используются модели, в которых сила сопротивления однозначно определяется мгновенными кинематическими характеристиками движения корпуса ВР. Но при движении виброробота в вязкой жидкости действующие на тело гидродинамические силы не могут быть описаны исключительно в терминах мгновенных кинематических характеристик. Исследование движения ВР в жидкости с использованием разных приближенных подходов для оценки нелокального по времени гидродинамического воздействия проводилось в работах [46–50]. В исследовании [50] было рассмотрено движение ВР в условиях маятникового колебания внутренней массы, когда внешний корпус совершает вращательно-поступательные колебания в жидкости. Гидродинамическое воздействие на корпус робота при этом описывается с помощью асимптотической модели [34]. В этой работе рассмотрен широкий спектр амплитуд колебаний маятника, исследованы вопросы выбора оптимального закона колебаний. В настоящей работе развиты исследования движения ВР этой конфигурации в области малых

амплитуд, где асимптотическая модель [34] дает наиболее точные результаты. Изучены крейсерские режимы движения, когда средние за период движения силы и момент равны нулю, а также проведены оценки эффективности движения ВР.

1. Постановка задачи

Рассматриваемая система, состоящая из корпуса массы $m_{кр}$ с цилиндрической оболочкой радиуса a и точечной ВМ $m_{вм}$, изображена на рис. 1. Общая масса аппарата $m_{вр} = m_{кр} + m_{вм}$, радиус инерции корпуса равен $r_{кр}$. Обозначим через $V_x(t), V_y(t), \Omega(t)$ линейные скорости центра корпуса и угловую скорость его вращения, $X(t), Y(t)$ – координаты ВМ в системе координат, перемещающейся поступательно вместе с центром корпуса, $F_x(t), F_y(t), M(t)$ – действующие на ВР гидродинамические силы и момент.

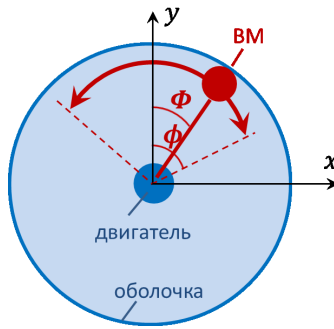


Рис. 1. Схема ВР. Синим изображен корпус, красным – ВМ. Оси (x, y) перемещаются поступательно вместе с центром корпуса. ВМ периодически колеблется относительно оси y с размахом колебаний 2ϕ

Примем, что ВМ периодически колеблется вокруг пространственной оси y с амплитудой ϕ и частотой ω по дуге окружности максимально возможного радиуса

$$X = a \sin \Phi, \quad Y = a \cos \Phi, \quad \Phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k \cos \omega kt.$$

Нормируем, сохранив за ними прежние обозначения, X и Y на a , а переменные t, V, Ω, F и M на

$$t_{sc} = \omega^{-1}, \quad v_{sc} = \frac{m_{вм}}{m_{вр}} a \omega, \quad \omega_{sc} = \frac{v_{sc}}{a}, \quad f_{sc} = \pi \rho a^2 v_{sc} \omega, \quad m_{sc} = a f_{sc}.$$

Через ρ обозначим плотность жидкости. Приняв дополнительно нейтральную плавучесть ВР (т. е. $m_{вр} = \pi \rho a^2$), запишем механическую подзадачу в безразмерной форме

$$\alpha \dot{\Omega} + \phi \cos t = M + \gamma (Y \dot{V}_x - X \dot{V}_y), \quad \dot{V}_x + \ddot{X} = F_x, \quad \dot{V}_y + \ddot{Y} = F_y. \quad (1)$$

Безразмерные параметры определены здесь как

$$\gamma = \frac{m_{вм}}{m_{вр}}, \quad \alpha = \frac{m_{кр} r_{кр}^2}{m_{вр} a^2} = (1 - \gamma) \frac{r_{кр}^2}{a^2}.$$

Будем считать угол поворота ϕ ВМ малым. В линейном по ϕ приближении $X = \Phi$,

$Y = 1$, вследствие чего $\dot{V}_y = F_y = 0$, и перепишем (1) как

$$\alpha\dot{\Omega} - \ddot{\Phi} = M, \quad \dot{V}_x + \ddot{\Phi} = F_x. \quad (2)$$

Далее для простоты записи нижний индекс x при V и F будем опускать.

Для замыкания (2) необходимо указать нелокальную по времени связь силовых характеристик движения F и M с кинематическими V и Ω . Этому служит гидродинамическая подзадача. Уравнения Навье – Стокса, описывающие течение жидкости вокруг колеблющегося цилиндра, запишем в подвижной полярной системе координат (r, θ) , перемещающейся поступательно вместе с центром цилиндра. Используя в качестве основных характеристик течения завихренность w и функцию тока ψ , запишем определяющие уравнения в виде

$$r > 1: \quad \omega = \Delta\psi, \quad \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\gamma}{r} \frac{\partial(\psi, w)}{\partial(r, \theta)} = \beta^{-1} \Delta\omega. \quad (3)$$

Безразмерная частота колебаний β – параметр Стокса – выражается через кинематическую вязкость ν как

$$\beta = a^2\omega/\nu.$$

Граничные условия для (3) определяются кинематическими характеристиками $V(t)$ и $\Omega(t)$ движения цилиндра

$$r = 1: \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial r} = -\Omega. \quad r \rightarrow \infty: \quad \psi \sim r\gamma V_0 \cos\theta - rV \sin\theta. \quad (4)$$

Константа V_0 представляет собой крейсерскую скорость движения ВР и находится из условия равенства нулю средних по времени сил, действующих на цилиндр. После решения задачи (3)–(4) силовые характеристики движения цилиндра найдем через завихренность и ее нормальную производную на границе цилиндра по формулам [34]

$$F = \dot{V} - \frac{1}{\pi\beta} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - w \right)_{r=1} \sin\theta d\theta, \quad M = -\frac{4}{\beta} \Omega - \frac{1}{\pi\beta} \int_0^{2\pi} w(1, \theta) d\theta. \quad (5)$$

Совместное решение механической и гидродинамической задач найдем в виде рядов по степеням γ с удержанием в них двух главных (нулевого и первого порядков) членов разложения. Для гидродинамической подзадачи получим в главном члене линейное (стоксовское) приближение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} w^{(0)} - \beta^{-1} \Delta w^{(0)} &= 0, & w^{(0)} &= \Delta\psi^{(0)}, \\ r = 1: \quad \psi^{(0)} &= 0, & \frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial r} &= -\Omega^{(0)}, & r \rightarrow \infty: \quad \psi^{(0)} &\sim -rV^{(0)} \sin\theta. \end{aligned} \quad (6)$$

Оно описывает чисто осцилляционное движение жидкости. В следующем члене имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} w^{(1)} - \beta^{-1} \Delta w^{(1)} &= G, & w^{(1)} &= \Delta\psi^{(1)}, & G &= \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi^{(0)}, w^{(0)})}{\partial(r, \theta)}, \\ r = 1: \quad \psi^{(1)} &= \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial r} = 0, & r \rightarrow \infty: \quad \psi^{(1)} &\sim rV_0 \cos\theta. \end{aligned} \quad (7)$$

Решение этой задачи содержит две составляющих скорости: чисто осцилляционную и стационарную, определяемую как среднее за период колебаний. Такое среднее по времени будем обозначать угловыми скобками. Именно стационарные компоненты скорости ВР V_0 будут представлять для нас основной интерес. Они заранее неизвестны и должны находиться в ходе решения из условий равенства нулю средних сил. Осреднив по времени гидродинамическую подзадачу (7), получим

$$-\beta^{-1}\Delta\langle w^{(1)}\rangle = \langle G\rangle, \quad \langle w^{(1)}\rangle = \Delta\langle\psi^{(1)}\rangle, \quad G = \frac{1}{r}\frac{\partial(\psi^{(0)}, w^{(0)})}{\partial(r, \theta)}, \quad (8)$$

$$r = 1 : \quad \langle\psi^{(1)}\rangle = \frac{\partial\langle\psi^{(1)}\rangle}{\partial r} = 0, \quad r \rightarrow \infty : \quad \langle\psi^{(1)}\rangle \sim rV_0 \cos \theta.$$

Как видно, характеристики течения, в том числе крейсерская скорость V_0 , полностью определяются функциями $V^{(0)}(t)$ и $\Omega^{(0)}(t)$. Их необходимо выразить через заданный закон движения ВМ $\Phi(t)$ посредством соотношений (2), принимающих в главном члене вид

$$\alpha\dot{\Omega}^{(0)} - \ddot{\Phi} = M^{(0)}, \quad \dot{V}^{(0)} + \ddot{\Phi} = F^{(0)}. \quad (9)$$

2. Стоксовское приближение

Положив

$$\Omega^{(0)} = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k e^{ikt}, \quad V^{(0)} = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} v_k e^{ikt},$$

$$M^{(0)} = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} m_k e^{it}, \quad F^{(0)} = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{ikt}$$

и используя линейность (6), найдем решение гидродинамической подзадачи в следующем виде:

$$\psi^{(0)} = -\operatorname{Re}(\psi_{\Omega}(r, t)) - \sin \theta \operatorname{Re}(\psi_V(r, t)),$$

$$\psi_{\Omega}(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \psi_{\Omega, k}(r) e^{it}, \quad \psi_V = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \psi_{V, k}(r) e^{ikt}. \quad (10)$$

Такое же представление, как (10), примем и для $w^{(0)}$ с побуквенной заменой в (10) ψ на w . Подставив (10) в (6), придем для функций $\psi_{\Omega, k}$, $w_{\Omega, k}$ и $\psi_{V, k}$, $w_{V, k}$ к следующей паре простых одномерных задач

$$ik\beta w_{\Omega, k} - \mathcal{L}_0 w_{\Omega, 1} = 0, \quad w_{\Omega, 1} = \mathcal{L}_0 \psi_{\Omega, 1},$$

$$r = 1 : \quad \psi_{\Omega, 1} = 0, \quad \frac{d\psi_{\Omega, 1}}{dr} = 1, \quad r \rightarrow \infty : \quad \psi_{\Omega, 1} = o(r);$$

$$ik\beta w_{V, k} - \mathcal{L}_1 w_{V, k} = 0, \quad w_V = \mathcal{L}_1 \psi_{V, k},$$

$$r = 1 : \quad \psi_{V, k} = 0, \quad \frac{d\psi_{V, k}}{dr} = 0, \quad r \rightarrow \infty : \quad \psi_{V, k} \sim r,$$

в которых операторы \mathcal{L}_m определены как

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2}.$$

Очевидно, что их решения при любом k получаются из решений для $k = 1$ заменой в последних $\beta \rightarrow k\beta$. Обозначив $z_k = \sqrt{ik\beta}$, представим эти решения через модифицированные функции Бесселя K_j в виде

$$\begin{aligned} \psi_{\Omega,k} &= s_{\Omega,k} + \frac{w_{\Omega,k}}{z_1^2}, & w_{\Omega,k} &= -z_k \frac{K_0(z_1 r)}{K_1(z_1)}, & s_{\Omega,k} &= \frac{K_0(z_k)}{z_k K_1(z_k)}, \\ \psi_{V,k} &= r - \frac{1}{r} - \frac{s_{V,k}}{r} + \frac{1}{z_k^2} w_{V,k}, & w_{V,k} &= z_k \frac{2K_1(z_k r)}{K_0(z_k)}, & s_{V,k} &= \frac{2K_1(z_k)}{z_k K_0(z_k)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Разрез при взятии квадратного корня считается проведенным вдоль отрицательной вещественной полуоси так, что $\sqrt{ik\beta}$ равен $e^{i\pi/4}\sqrt{k\beta}$.

Вычислив силовые характеристики согласно (5), найдем

$$m_k = -ik\omega_k \left(-\frac{4i}{k\beta} + 2s_{\Omega,k} \right), \quad f_k = -ikv_k (1 + 2s_{V,k}). \quad (12)$$

Это основной результат решения в главном члене гидродинамической подзадачи.

Механическая подзадача (9) с использованием (12) приводит к следующим соотношениям между амплитудами временных гармоник

$$v_k = -\frac{ik\phi_k}{2(1 + s_{V,k})}, \quad \omega_k = -\frac{ik\phi_k}{\alpha + 2s_{\Omega,k} - 4i/k\beta}. \quad (13)$$

Формулы (11)–(13) полностью определяют решение в главном члене. В заключение данного пункта дадим также используемое в дальнейшем выражение для безразмерной, нормированной на $d_{sc} = f_{sc}v_{sc}$, диссипации d энергии. В главном члене она представляется суммой диссипаций в различных движениях $d = d_V + d_\Omega$

$$\begin{aligned} d_V &= -\langle F^{(0)}V^{(0)} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^2 \operatorname{Re}(iks_{V,k}) = \sum_{k=1}^{\infty} d_{V,k}\phi_k^2, \\ d_{V,k} &= \frac{-k^3 \operatorname{Im}(s_{V,k})}{4|1 + s_{V,k}|^2}, \\ d_\Omega &= -\langle M^{(0)}\Omega^{(0)} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |\omega_k|^2 \left(\frac{2}{\beta} + \operatorname{Re}(iks_{\Omega,k}) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} d_{\Omega,k}\phi_k^2, \\ d_{\Omega,k} &= \frac{k^3 (2/k\beta - \operatorname{Im}(s_{\Omega,k}))}{|\alpha + 2s_{\Omega,k} - 4i/k\beta|^2}. \end{aligned}$$

Диссипации d_V и d_Ω представим суммами диссипаций по всем гармоникам с частотами $k\omega$, поэтому каждое слагаемое должно зависеть лишь от своей частоты $k\omega$. Наличие множителей k^3 в $d_{V,k}$ и $d_{\Omega,k}$ объясняется тем, что нормирующий множитель d_{sc} пропорционален ω^3 .

3. Нахождение крейсерской скорости ВР

Стационарные гидродинамические поля, называемые вторичными течениями, определяются решением задачи (8). Правая часть в (8) и порождаемые ею решения содержат две азимутальные гармоники: $\cos\theta$ и $\sin 2\theta$. Вторая из них не дает вкладов ни в момент, ни в силу, действующие на тело; она не понадобится в дальнейшем при вычислении V_0 . Оставив в $\langle G \rangle$ лишь первую азимутальную гармонику, запишем

$$\langle G \rangle = \cos\theta \sum_{k=1}^{\infty} k\phi_k^2 G_k(r; \alpha, \beta), \quad G_k = \frac{k}{2r} \operatorname{Re} \left(\frac{\bar{w}_{V,k} \cdot \psi'_{\Omega,k} - \bar{\psi}_{V,k} \cdot w'_{\Omega,k}}{2(1 + \bar{s}_{V,k})(\alpha + 2s_{\Omega,k} - 4i/k\beta)} \right).$$

Черта сверху означает комплексное сопряжение, а штрих – дифференцирование по r . Выделим в G_k зависящую от пространственной координаты составляющую

$$\tilde{G}_k(r; \beta) = k (\overline{w}_{V,k} \cdot \psi'_{\Omega,k} - \overline{\psi}_{V,k} \cdot w'_{\Omega,k}) / 2r$$

и решим для нее задачу

$$\mathcal{L}_1 W = -\tilde{G}_k, \quad W = \mathcal{L}_1 \Psi, \quad \Psi(1) = \Psi'(1) = 0, \quad \Psi|_{r \rightarrow \infty} \sim \tilde{V}_k r. \quad (14)$$

Величину \tilde{V}_k найдем из условия равенства нулю средней силы, которое запишем в терминах W как

$$W'(1) - W(1) = 0. \quad (15)$$

Решение задачи (14), (15) получено в [34]. Ограничимся здесь явным представлением для составляющей крейсерской скорости

$$\tilde{V}_k = -\frac{k\beta}{8} \int_1^\infty \tilde{G}_k(r; \beta) (2r^2 \ln r - r^2 + 1) dr.$$

После нахождения комплексной величины \tilde{V}_k крейсерскую скорость вычислим по формулам

$$V_0 = \sum_{k=1}^\infty k \frac{\phi_k^2}{2|A_k|^2 |\alpha + B_k|^2} \left(\alpha \operatorname{Re}(\tilde{V}_k A_k) + \operatorname{Re}(\tilde{V}_k B_k) \right),$$

$$A_k = 1 + s_{V,k}, \quad B_k = 2s_{\Omega,k} + \frac{4i}{\beta k}.$$

Наличие множителя k по-прежнему объясняется тем, что нормирующий множитель v_{sc} прямо пропорционален ω .

4. Оптимальность гармонических колебаний

Вопрос об оптимальном законе $\Phi(t)$ в рассматриваемом случае малых колебаний ВМ решается просто. Под оптимальным традиционно понимается такой набор ϕ_k , при котором отношение $\Lambda = V_0/d$ достигает максимума. Это, разумеется, эквивалентно максимизации крейсерской скорости V_0 при заданном уровне диссипации d либо минимизации диссипации при заданной величине крейсерской скорости. Обе эти величины определены однозначно

$$d = \sum_{k=1}^\infty d_k \phi_k^2, \quad V_0 = \sum_{k=1}^\infty u_k \phi_k^2.$$

При введении множителя Лагранжа λ придем для нахождения оптимума к соотношениям

$$u_k \phi_k = \lambda d_k \phi_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Удовлетворить всем им за счет единственного множителя Лагранжа возможно лишь тогда, когда при фиксированном номере n

$$\lambda = u_n/d_n, \quad \phi_k = 0 \quad (k \neq n).$$

Оптимальен тот номер n , при котором отношение $\Lambda = u_n/d_n$ максимально. Его нахождение лишено смысла; важно лишь, что оптимальными являются гармонические колебания. Рассмотрим их подробнее.

5. Гармонические колебания ВМ

Расчетные формулы для случая гармонических колебаний получаются из представленных выше сохранением в суммах лишь первого члена. Нижний индекс 1 при этом для простоты будем отбрасывать, так, например, запишем $\Phi = \phi \cos t$.

Гармонические колебания корпуса ВР полностью характеризуются сдвигом фаз и отношением амплитуд поступательных и вращательных колебаний к амплитуде ϕ колебаний ВМ

$$A_V = \frac{1}{|a_V|}, \quad A_\Omega = \frac{1}{|a_\Omega|}, \quad \varphi_V = \arccos \frac{-\operatorname{Re} a_V}{|a_V|}, \quad \varphi_\Omega = \arccos \frac{-\operatorname{Re} a_\Omega}{|a_\Omega|},$$

$$a_V = 2(1 + s_V), \quad a_\Omega = \alpha + 2s_\Omega - 4i/\beta.$$

В практически важном случае больших β поведение комплекснозначных функций $a_V(\beta)$ и $a_\Omega(\beta)$ дается асимптотиками

$$a_\Omega(\alpha, \beta) \sim \alpha + \frac{2}{\sqrt{i\beta}} + \frac{3}{i\beta} + O(\beta^{-3/2}), \quad a_V(\beta) \sim 2 + \frac{4}{\sqrt{i\beta}} + \frac{2}{i\beta} + O(\beta^{-3/2}). \quad (16)$$

По своему физическому смыслу они учитывают три типа сил: инерции, Бассэ и вязкого трения. Из них, в частности, следует, что при $\beta = \infty$ (что эквивалентно невязкой (идеальной) жидкости) корпус перемещается и вращается в противофазе с ВМ ($\varphi_\Omega = \varphi_V = \pi$) с амплитудами соответственно вдвое меньшей и в α^{-1} раз большей амплитуды вращения ВМ. Относительная погрешность использования асимптотик (16) при вычислении A_V не превышает 1% уже при $\beta > 1$. При расчете A_Ω погрешность зависит от параметра α , возрастая при приближении α к нулю. Но даже при $\alpha = 0$ погрешность в 1% достигается в области $\beta > 9$ относительно малых частот. Зависимости, представленные на рис. 2, показывают, что в практически важном случае $\beta > 100$ вращательные и поступательные колебания корпуса близки к противофазным по отношению к колебаниям ВМ; сами они практически синфазны.

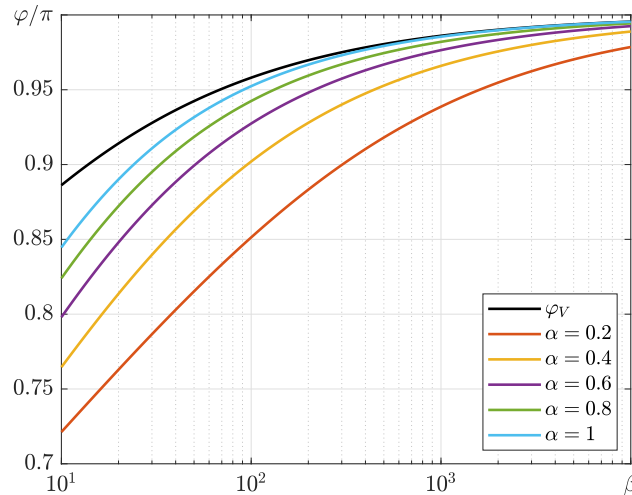


Рис. 2. Зависимость сдвига фаз поступательных φ_V (чёрная линия) и вращательных φ_Ω (цветные линии) колебаний корпуса от β

Сравним между собой диссипацию энергии во вращательном и поступательном движениях

$$A_D = \frac{d_V}{d_\Omega} = \frac{|a_\Omega|^2}{|a_V|^2} \cdot \frac{\text{Im } a_V}{\text{Im } a_\Omega}.$$

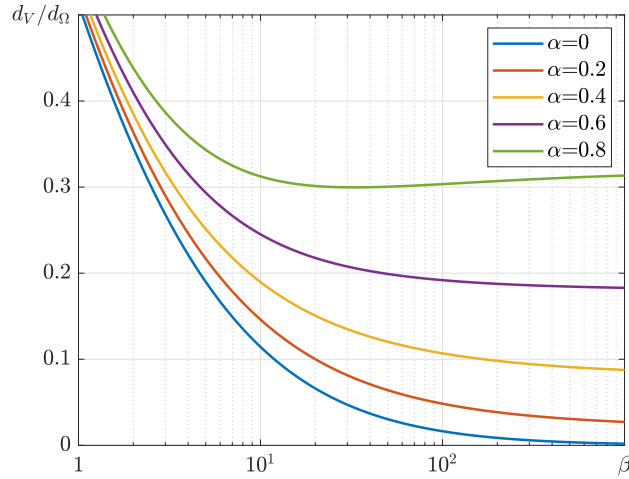


Рис. 3. Зависимость отношения диссипации энергии во вращательном и поступательном движениях от β при различных значениях параметра α

Как видно из рис. 3, на вращение корпуса затрачивается существенно больше энергии, чем на поступательные колебания. Это тем более так, чем меньше α и больше β . В пределе $\beta = \infty$ имеем $A_D = \alpha^2/4$. Энергозатратность вращательных колебаний связана с тем, что они происходят с существенно большей амплитудой, чем поступательные. Поэтому, в частности, предполагаемая малость амплитуды колебаний ВМ еще не означает малости вращательных колебаний ВР. В особой степени это относится к случаю малых α , который реализуется при малой массе оболочки ВР.

Вычисление крейсерской скорости проводилось по формулам раздела 3. Обработка результатов выполнялась в переменных u_∞, β_∞ , связанных с V_0, β простой перенормировкой

$$u_\infty = -\alpha V_0 / \phi^2, \quad \beta_\infty = \alpha \beta = (1 - \gamma) \frac{r_{кр}^2 \omega}{\nu}.$$

Ее подсказывает построенная асимптотика V_0 при больших β . В терминах u_∞ и β_∞ она носит универсальный, не зависящий от α вид

$$\beta_\infty \rightarrow \infty : \quad u_\infty = \frac{3}{8} - \frac{7}{\sqrt{2}} \beta_\infty^{-1/2} + O(\beta_\infty^{-1}). \tag{17}$$

Расчеты показали, что во всем практически значимом диапазоне изменения параметра α зависимости $u_\infty(\beta_\infty)$ близки не только асимптотически, но и всюду (см. рис. 4). Обратим внимание на знак u_∞ . Он отрицателен при малых β_∞ , значит, ВР движется по направлению оси y с относительно небольшой скоростью. В интересующем нас случае больших β_∞ ВР движется в противоположном направлении с большей скоростью, вплоть до $u_\infty = 3/8$ при $\beta_\infty = \infty$. При больших β_∞ можно пользоваться универсальной асимптотикой, изображенной пунктиром на

рис. 4. На практике удобно использовать аппроксимацию Паде (штриховая линия на рис. 4)

$$u_{\infty} \approx 0.5 \frac{\beta_{\infty} - 5.5\sqrt{\beta_{\infty}}}{1.33\beta_{\infty} + 12.7\sqrt{\beta_{\infty}} + 80.7}. \quad (18)$$

Она построена так, чтобы u_{∞} совпадала при больших β_{∞} с универсальной асимптотикой (17), проходила через нуль в выбранной точке и имела нужную величину экстремума в области малых β_{∞} (отрицательных u_{∞}). Окончательно представив выражение для размерной крейсерской скорости U_{∞} , запишем

$$U_{\infty} = a\omega \cdot (\alpha^{-1}\phi^2\gamma^2 u_{\infty}).$$

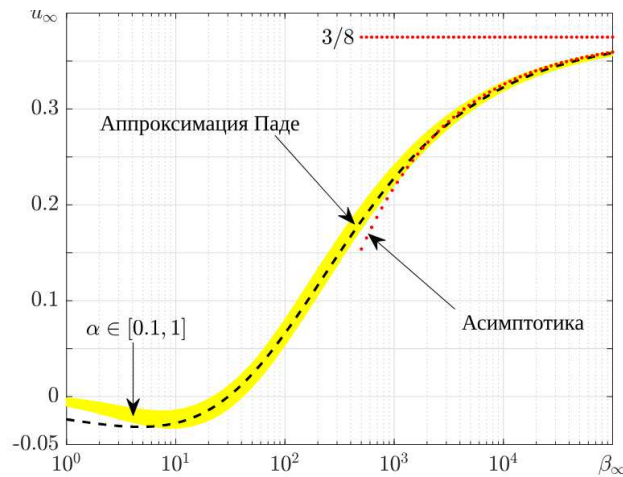


Рис. 4. Зависимость безразмерной крейсерской скорости u_{∞} от безразмерной частоты β_{∞} колебаний ВМ. Ее асимптотики (17) и аппроксимация (18)

6. Гидродинамика и эффективность движения виброробота

Рассмотрим гидродинамику движения робота более подробно. Положим в условиях $\beta > 100$, $\alpha \geq 0.1$, что вращательные и поступательные колебания корпуса, вызванные гармоническими колебаниями ВМ, происходят синфазно. Как можно видеть на рис. 2, сдвиг фазы между вращательными и поступательными колебаниями корпуса в обозначенных условиях действительно мал. Достаточно обширные результаты для этого случая представлены в исследовании [34]. Чтобы использовать результаты этой работы, необходимо выразить используемые в ней гидродинамические параметры подобию (помечаем их нижним индексом 0), определяющие непосредственно структуру течения около корпуса, через безразмерные параметры, используемые в настоящем исследовании. Параметр β одинаков в обеих работах. Безразмерные амплитуды поступательных (γ_0) и вращательных (Θ_0) колебаний корпуса выражаются через параметры колебаний внутренней массы (β, ϕ) и параметры распределения массы робота (γ, α) следующим образом:

$$\gamma_0 = \frac{\gamma\phi}{|a_V(\beta)|}, \quad \Theta_0 = \frac{\gamma\phi}{|a_{\Omega}(\beta; \alpha)|}. \quad (19)$$

Переход между безразмерными крейсерскими скоростями определяется как

$$u_{0,\infty} = \frac{1}{\alpha} |a_V||a_{\Omega}| u_{\infty}.$$

Здесь $u_{0,\infty}\Theta_0$ характеризует отношение размерной стационарной скорости движения робота к скорости поступательных колебаний корпуса. При вычислении a_V , a_Ω с 1% относительной погрешностью при $\beta > 10$ можно использовать формулы (16).

Определим параметры виброробота, позволяющие достичь наибольшую эффективность движения. Эффективность движения ε определим как отношение мощности, необходимой для равномерного движения тела в жидкости с постоянной скоростью V , к мощности, требуемой рассматриваемому движителю для перемещения тела с той же средней скоростью. Мощность в рассматриваемом случае в точности равна диссипации энергии жидкостью. Значит, эффективность движения можно вычислить как $\varepsilon = D_c/D$, где D_c – диссипация энергии при движении с постоянной скоростью, D – диссипация при движении за счет поступательно-вращательных колебаний.

При движении цилиндрического корпуса с постоянной скоростью V диссипация энергии равна

$$D_c = C_D(\text{Re})\rho a V^3.$$

Здесь C_D – коэффициент сопротивления, зависящий от числа Рейнольдса,

$$\text{Re} = \frac{2aV}{\nu},$$

построенного по диаметру ($2a$) цилиндра.

Далее, для исследуемого диапазона Re будем считать C_D величиной порядка единицы.

Для рассматриваемого движителя (размерную) диссипацию энергии можно определить через параметры движения корпуса как

$$D = 2\pi\rho U^2 a^2 \omega (d_{0,V} + \xi^2 d_{0,\theta}),$$

где U – амплитуда скорости поступательных колебаний корпуса.

Эффективность можно вычислить по формуле

$$\varepsilon = \frac{D_c}{D} = \frac{C_D}{2\pi} \frac{\gamma_0^3 \Theta_0^3 u_{0,\infty}^3}{\Theta_0^2 d_{0,\theta} + \gamma_0^2 d_{0,V}}. \quad (20)$$

Максимизируя ε , учтем, что диапазон применимости гидродинамической модели, используемой в настоящей работе, согласно [34] ограничен как по амплитуде вращательных колебаний корпуса, так и по амплитуде поступательных колебаний. Примем, что $\Theta_0 \leq 1.3$, $\gamma_0 \leq 0.25$ при $\beta \leq 6000$. Также заметим, что в условиях текущей механической модели предполагалась малость угла поворота маятника ϕ . Согласно результатам [50] можно принять $\phi \leq 0.85$. Из (20) очевидно, что максимальная эффективность обеспечивается при наибольших амплитудах колебания корпуса γ_0 , Θ_0 , которые, исходя из (19), достигаются при наибольших значениях амплитуды колебаний маятника ϕ . Также, исходя из (19), γ_0 пропорционально γ , т.е. чем тяжелее внутренняя масса, тем больше амплитуда колебаний корпуса. При выборе максимальных значений $\phi = 0.85$ и $\Theta_0 = 1.3$ наибольшее значение γ можно выбрать при условии $\alpha = 1 - \gamma$, т.е. когда вся масса корпуса сосредоточена в оболочке. Эффективность виброробота в обозначенных условиях и соответствующие параметры его движения представлены на рис. 5. Как можно видеть, уже при $\beta > 3700$ эффективность движения рассматриваемой системы превышает 10%, что является относительно высоким показателем для пропульсивных систем при низких числах Рейнольдса (см., например, [51, 52]).

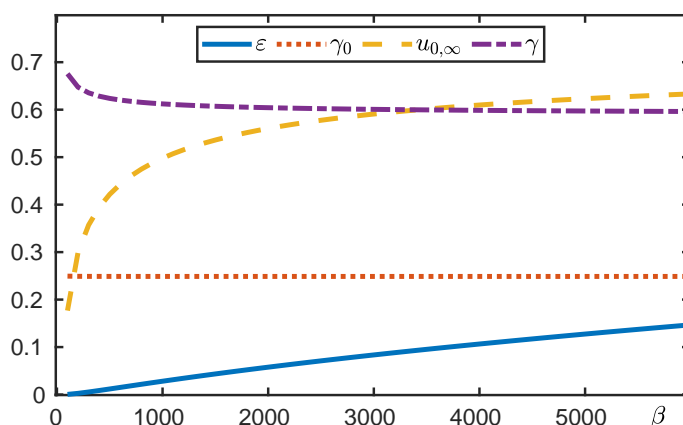


Рис. 5. Эффективность движения (ε), скорость ($u_{0,\infty}$), соотношение масс ВР (γ) и амплитуда колебаний ВМ (γ_0) при $\Theta_0 = 1.3$, $\phi = 0.85$

Заключение

Получено аналитическое решение, описывающее движение ВР, индуцированное малоамплитудными маятниковыми колебаниями ВМ, в вязкой несжимаемой жидкости с использованием метода асимптотических разложений. Найдено выражение для крейсерской скорости движения ВР, проведена оценка эффективности движения такой пропульсивной системы. Показано, что наиболее эффективное движение наблюдается при наибольших допустимых (в рамках рассматриваемых предположений) колебаниях внутренней массы в условиях, когда вся масса корпуса сосредоточена в оболочке, а масса подвижной внутренней части составляет приблизительно 60 % от всей массы ВР. В этом случае эффективность системы по относительным энергозатратам достигает 10 % уже при значениях безразмерной частоты $\beta \approx 3700$, при этом число Ренольдса, вычисленное по крейсерской скорости движения ВР, составляет $Re \approx 1443$. Заметим, что движение ВР при указанных параметрах можно сравнить с движением маленькой рыбки или малька, так как при характерном размере (диаметре) 3.8 см и частоте колебаний 3 Гц рассматриваемая система будет иметь скорость в 0.05 м/с, что приблизительно соответствует частоте и скорости движения рыбки аналогичного размера [53].

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030»).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

1. Prandtl L. Über die Entstehung von Wirbeln in der idealen Flüssigkeit, mit Anwendung auf die Tragflügeltheorie und andere Aufgaben // Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik (Innsbruck 1922) / T.V. Kármán, T. Levi-Civita (Hrsg.). Berlin, Heidelberg: Springer, 1924. S. 18–33. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-00280-3>.
2. Birnbaum W. Der Schlagflügelpropeller und die kleinen Schwingungenelastisch befestigter Tragflügel // Z. Flugtech. Motorluftschiffahrt. 1924. Bd. 15. S. 128–134.

3. *Theodorsen T.* General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter. *NACA Report 496. Natl. Advis. Comm. Aeronaut.*, 1935. P. 291–311.
4. *Garrick I.E.* Propulsion of a Flapping and Oscillating Airfoil. *NACA Report 567. Natl. Advis. Comm. Aeronaut.*, 1936, pp. 1–14.
5. *Wagner H.* Über die Entstehung des dynamischen Auftriebes von Tragflügeln // *ZAMM*. 1925. Bd. 5, H. 1. S. 17–35. <https://doi.org/10.1002/zamm.19250050103>.
6. *Glauert H.* The force and moment on an oscillating aerofoil // *Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete: Aachen 1929 / A. Gilles, L. Hopf, T.v. Kármán (Hrsg.). Berlin, Heidelberg: Springer, 1930. S. 88–95.* https://doi.org/10.1007/978-3-662-33791-2_16.
7. *Küssner H.G.* Zusammenfassender Bericht über den instationären Auftrieb von Flügeln // *Luftfahrtforschung*. 1936. Bd. 13, H. 12. S. 410–424.
8. *Küssner H.G., Schwartz I.R.* The Oscillating Wing with Aerodynamically Balanced Elevator. *Technical Memorandum 991. Natl. Advis. Comm. Aeronaut.*, 1936. 32 p.
9. *Келдыш М.В., Лаверентьев М.А.* К теории колеблющегося крыла. В кн.: «Техн. заметки ЦАГИ». М.: ЦАГИ, 1935. С. 48–52.
10. *Седов Л.И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. 444 с.
11. *Некрасов А.И.* Теория крыла в нестационарном потоке. М.-Л.: АН СССР, 1947. 260 с.
12. *Alben S.* Collective locomotion of two-dimensional lattices of flapping plates. Part 1. Numerical method, single-plate case and lattice input power // *J. Fluid Mech.* 2021. V. 915. Art. A20. <https://doi.org/10.1017/jfm.2021.6>.
13. *Alben S.* Collective locomotion of two-dimensional lattices of flapping plates. Part 2. Lattice flows and propulsive efficiency // *J. Fluid Mech.* V. 915. Art. A21. <https://doi.org/10.1017/jfm.2021.43>.
14. *Alben S., Shelley M.* Coherent locomotion as an attracting state for a free flapping body // *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.* 2005. V. 102, No 32. P. 11163–11166. <https://doi.org/10.1073/pnas.0505064102>.
15. *Isogai K., Shinmoto Y., Watanabe Y.* Effects of dynamic stall on propulsive efficiency and thrust of flapping airfoil // *AIAA J.* 1999. V. 37, No 10. P. 1145–1151. <https://doi.org/10.2514/2.589>.
16. *Lewin G.C., Haj-Hariri H.* Modelling thrust generation of a two-dimensional heaving airfoil in a viscous flow // *J. Fluid Mech.* 2003. V. 492. P. 339–362. <https://doi.org/10.1017/S0022112003005743>.
17. *Liu H.* A computational fluid dynamic study of hawkmoth hovering // *J. Exp. Biol.* 1998. V. 201, No 4. P. 461–477. <https://doi.org/10.1242/jeb.201.4.461>.
18. *Lua K.* On the thrust performance of a flapping two-dimensional elliptic airfoil in a forward flight // *J. Fluids Struct.* 2016. V. 66. P. 91–109. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2016.07.012>.
19. *Maertens A.P., Triantafyllou M.S., Yue D.K.P.* Efficiency of fish propulsion // *Bioinspiration Biomimetics*. 2015. V. 10, No 4. Art. 046013. <https://doi.org/10.1088/1748-3190/10/4/046013>.
20. *Pedro G., Suleman A., Djilali N.* A numerical study of the propulsive efficiency of a flapping hydrofoil // *Int. J. Numer. Methods Fluids*. 2003. V. 42, No 5. P. 493–526. <https://doi.org/10.1002/fld.525>.
21. *Spagnolie S.E., Moret L., Shelley M.J., Zhang J.* Surprising behaviors in flapping locomotion with passive pitching // *Phys. Fluids*. 2010. V. 22, No 4. Art. 041903. <https://doi.org/10.1063/1.3383215>.

22. *Taha H.E.* Geometric nonlinear control of the lift dynamics of a pitching-plunging wing // Proc. AIAA Scitech 2020 Forum. 2020. AIAA 2020-0824. <https://doi.org/10.2514/6.2020-0824>.
23. *Zhang J., Liu N.-S., Lu X.-Y.* Locomotion of a passively flapping flat plate // J. Fluid Mech. 2010. V. 659. P. 43–68. <https://doi.org/10.1017/S0022112010002387>.
24. *Дынкиков Я.А.* К расчету машущего гибкого профиля в потоке вязкой несжимаемой жидкости // Изв. высш. учебн. завед. Машиностр. 2016. № 4. С. 22–30. <https://10.18698/0536-1044-2016-4-22-30>.
25. *Коваль К.А., Сухоруков А.Л., Чернышев И.А.* Результаты верификации численного метода расчета гидродинамических и гидроакустических характеристик плавникового движителя // Фундам. и прикл. гидрофиз. 2016. Т. 9, № 4. С. 60–72.
26. *Wu X., Zhang X., Tian X., Li X., Lu W.* A review on fluid dynamics of flapping foils // Ocean Eng. 2020. V. 195. Art. 106712. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2019.106712>.
27. *Schlichting H.* Berechnung ebener periodischer Grenzschichtströmungen // Phys. Zeit. 1932. Bd. 33. S. 327–335.
28. *Holtmark J., Johnsen I., Sikkeland T., Skavlem S.* Boundary layer flow near a cylindrical obstacle in an oscillating, incompressible fluid // J. Acoust. Soc. Am. 1954. V. 26, No 1. P. 26–39. <https://doi.org/10.1121/1.1907285>.
29. *Riley N.* Oscillatory viscous flows. Review and extension // IMA J. Appl. Math. 1967. V. 3, No 4. P. 419–434. <https://doi.org/10.1093/imamat/3.4.419>.
30. *Riley N.* The steady streaming induced by a vibrating cylinder // J. Fluid Mech. 1975. V. 68., No 4. P. 801–812. <https://doi.org/10.1017/S0022112075001243>.
31. *Nuriev A.N., Egorov A.G.* Asymptotic investigation of hydrodynamic forces acting on an oscillating cylinder at finite streaming Reynolds numbers // Lobachevskii J. Math. 2019. V. 40, No 6. P. 794–801. <https://doi.org/10.1134/S1995080219060180>.
32. *Nuriev A.N., Egorov A.G., Kamalutdinov A.M.* Hydrodynamic forces acting on the elliptic cylinder performing high-frequency low-amplitude multi-harmonic oscillations in a viscous fluid // J. Fluid Mech. 2021. V. 913. Art. A40. <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.1180>.
33. *Riley N., Watson E.* Eccentric oscillations of a circular cylinder in a viscous fluid // Matematika. 1993. V. 40, No 2. P. 187–202. <https://doi.org/10.1112/S0025579300006975>.
34. *Nuriev A.N., Egorov A.G.* Asymptotic theory of a flapping wing of a circular cross-section // J. Fluid Mech. 2022. V. 941. Art. A23. <https://doi.org/10.1017/jfm.2022.287>.
35. *Nuriev A.N., Egorov A.G., Zaitseva O.N., Kamalutdinov A.M.* Asymptotic study of the aerohydrodynamics of a flapping cylindrical wing in the high-frequency approximation // Lobachevskii J. Math. 2022. V. 43, No 8. P. 2250–2256. <https://doi.org/10.1134/S1995080222110233>.
36. *Егоров А.Г., Нуриев А.Н.* Крейсерская скорость цилиндрического крыла при малых поступательно-вращательных колебаниях // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2022. Т. 164, кн. 2–3. С. 170–180. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2022.2-3.170-180>.
37. *Egorov A.G., Nuriev A.N., Anisimov V.D., Zaitseva O.N.* Propulsive motion of an oscillating cylinder in a viscous fluid // Phys. Fluids. 2024. V. 36, No 2. Art. 021908. <https://doi.org/10.1063/5.0189346>.
38. *Chernous'ko F.L.* On the motion of a body containing a movable internal mass // Dokl. Phys. 2005. V. 50, No 11. P. 593–597. <https://doi.org/10.1134/1.2137795>.
39. *Chernous'ko F.L.* Analysis and optimization of the motion of a body controlled by means of a movable internal mass // J. Appl. Math. Mech. 2006. V. 70, No 6. P. 819–842. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2007.01.003>.

40. *Bolotnik N.N., Figurina T.Yu., Chernous'ko F.L.* Optimal control of the rectilinear motion of a twobody system in a resistive medium // *J. Appl. Math. Mech.* 2012. V. 76, No 1. P. 1–14. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.03.001>.
41. *Bolotnik N., Pivovarov M., Zeidis I., Zimmermann K.* The undulatory motion of a chain of particles in a resistive medium in the case of a smooth excitation mode // *ZAMM.* 2013. V. 93, No 12. P. 895–913. <https://doi.org/10.1002/zamm.201200124>.
42. *Yegorov A.G., Zakharova O.S.* The energy-optimal motion of a vibration-driven robot in a resistive medium // *J. Appl. Math. Mech.* 2010. V. 74, No 4. P. 443–451. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2010.09.010>.
43. *Egorov A.G., Zakharova O.S.* The optimal quasistationary motion of a vibration-driven robot in a viscous medium // *Russ. Math.* 2012. V. 56, No 2. P. 50–55. <https://doi.org/10.3103/S1066369X12020065>.
44. *Du Z., Fang H., Zhan X., Xu J.* Experiments on vibration-driven stick-slip locomotion: A sliding bifurcation perspective // *Mech. Syst. Signal Process.* 2018, V. 105. P. 261–275. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2017.12.001>.
45. *Diao B., Zhang X., Fang H., Xu J.* Optimal control of the multi-module vibration-driven locomotion robot // *J. Sound Vib.* 2022. V. 527. Art. 116867. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2022.116867>.
46. *Egorov A.G., Zakharova O.S.* The energy-optimal motion of a vibration-driven robot in a medium with an inherited law of resistance // *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 2015. V. 54, No 3. P. 495–503. <https://doi.org/10.1134/S1064230715030065>.
47. *Vetchanin E.V., Mamaev I.S., Tenenev V.A.* The self-propulsion of a body with moving internal masses in a viscous fluid // *Regular Chaotic Dyn.* 2013. V. 18, Nos 1–2. P. 100–117. <https://doi.org/10.1134/S1560354713010073>.
48. *Borisov A.V., Mamaev I.S., Vetchanin E.V.* Self-propulsion of a smooth body in a viscous fluid under periodic oscillations of a rotor and circulation // *Regular Chaotic Dyn.* 2018. V. 23, Nos 7–8. P. 850–874. <https://doi.org/10.1134/S1560354718070043>.
49. *Artemova E.M., Karavaev Y.L., Mamaev I.S., Vetchanin E.V.* Dynamics of a spherical robot with variable moments of inertia and a displaced center of mass // *Regular Chaotic Dyn.* 2020. V. 25, No 6. P. 689–706. <https://doi.org/10.1134/S156035472006012X>.
50. *Egorov A.G., Nuriev A.N., Anisimov V.D.* Optimization of the movement of a cylindrical vibration-driven robot in a viscous fluid, induced by pendulum oscillations of the internal mass // *Lobachevskii J. Math.* 2023. V. 444, No 10. P. 4438–4447. <https://doi.org/10.1134/S1995080223100104>.
51. *Purcell E.M.* Life at low Reynolds number // *Am. J. Phys.* 1977. V. 45, No 1. P. 3–11. <https://doi.org/10.1119/1.10903>.
52. *Becker L.E., Koehler S.A., Stone H.A.* On self-propulsion of micro-machines at low Reynolds number: Purcell's three-link swimmer // *J. Fluid Mech.* 2003. V. 490. P. 15–35. <https://doi.org/10.1017/S0022112003005184>.
53. *Sánchez-Rodríguez J., Raufaste C., Argentina M.* Scaling the tail beat frequency and swimming speed in underwater undulatory swimming // *Nat. Commun.* 2023. V. 14, No 1. Art. 5569. <https://doi.org/10.1038/s41467-023-41368-6>.

Поступила в редакцию 30.07.2024

Принята к публикации 24.08.2024

Анисимов Вадим Дмитриевич, ассистент кафедры аэрогидромеханики

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: anvad96@bk.ru

Егоров Андрей Геннадьевич, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник НИЛ «Интеллектуальные биомиметические и природосообразные системы»

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

Нуриев Артем Наилевич, доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник НИЛ «Интеллектуальные биомиметические и природосообразные системы»

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: nuriev_an@mail.ru

Зайцева Ольга Николаевна, кандидат педагогических наук, старший научный сотрудник НИЛ «Интеллектуальные биомиметические и природосообразные системы»

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: olga_fdpi@mail.ru

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 3, pp. 277–296

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.277-296

Propulsive Motion of Cylindrical Vibration-Driven Robot in a Viscous Fluid

V.D. Anisimov*, A.G. Egorov, A.N. Nuriev**, O.N. Zaitseva***

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia

E-mail: *anvad96@bk.ru, **nuriev_an@mail.ru, ***olga_fdpi@mail.ru

Received July 30, 2024; Accepted August 24, 2024

Abstract

The propulsive motion of a multimass system, vibration-driven robot (VR), in a viscous incompressible fluid was studied. The VR consisted of a round cylindrical body submerged in the fluid and an internal mass (IM) performing small-amplitude pendulum-like oscillations inside the body. Using the method of asymptotic expansions, the combined mechanical and hydrodynamic problems that describe the self-propulsion of the system in the fluid were solved. The hydrodynamic problem was formulated on the basis of the complete non-stationary Navier–Stokes equation. An analytical solution was derived to describe the cruising regime of the VR motion in the fluid. The non-stationary hydrodynamic influence on the VR was determined. The efficiency of the propulsive system’s motion was assessed.

Keywords: vibration-driven robot, propulsion, cruising speed, Navier–Stokes equation

Acknowledgments. This study was supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program (PRIORITY-2030).

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. VR diagram. The body is shown in blue, and the IM is indicated in red. The axes (x, y) move translationally with the center of the body. The IM periodically oscillates about the y axis with the amplitude 2ϕ .

Fig. 2. Phase-shift dependence of the translational (φ_V , black line) and rotational (φ_Ω , colored lines) oscillations of the body on β .

Fig. 3. Dependence of the ratio of energy dissipation in rotational and translational oscillations on β for different values of the parameter α .

Fig. 4. Dependence of the dimensionless cruising speed u_∞ on the dimensionless frequency β_∞ of IM oscillations. Its asymptotics (17) and approximation (18).

Fig. 5. Efficiency of the VR motion (ε), speed ($u_{0,\infty}$), VR mass ratio (γ), and IM oscillation amplitude (γ_0) at $\Theta_0 = 1.3$, $\phi = 0.85$.

References

1. Prandtl L. Über die Entstehung von Wirbeln in der idealen Flüssigkeit, mit Anwendung auf die Tragflügeltheorie und andere Aufgaben. In: *Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik (Innsbruck 1922)*. Kármán T.V., Levi-Civita T. (Hrsg.). Berlin, Heidelberg, Springer, 1924. S. 18–33. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-00280-3>. (In German)
2. Birnbaum W. Der Schlagflügelpropeller und die kleinen Schwingungen elastisch befestigter Tragflügel. *Z. Flugtech. Motorluftschiffahrt*, 1924, Bd. 15, S. 128–134. (In German)
3. Theodorsen T. General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter. NACA Report 496. Natl. Advis. Comm. Aeronaut., 1935, pp. 291–311.
4. Garrick I.E. Propulsion of a Flapping and Oscillating Airfoil. NACA Report 567. Natl. Advis. Comm. Aeronaut., 1936, pp. 1–14.
5. Wagner H. Über die Entstehung des dynamischen Auftriebes von Tragflügeln. *ZAMM*, 1925, Bd. 5, H. 1, S. 17–35. <https://doi.org/10.1002/zamm.19250050103>. (In German)
6. Glauert H. The force and moment on an oscillating aerofoil. In: Gilles A., Hopf L., Kármán Th.v. (Hrsg.) *Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete: Aachen 1929*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1930, S. 88–95. https://doi.org/10.1007/978-3-662-33791-2_16.
7. Küssner H.G. Zusammenfassender Bericht über den instationären Auftrieb von Flügeln. *Luftfahrtforschung*, 1936, Bd. 13, H. 12, S. 410–424. (In German)
8. Küssner H.G., Schwartz I.R. The Oscillating Wing with Aerodynamically Balanced Elevator. Technical Memorandum 991. Natl. Advis. Comm. Aeronaut., 1936. 32 p.
9. Keldysh M.V., Lavrent'ev M.A. On the theory of the oscillating wing. In: *Tekhn. zametki TsAGI* [Technical Notes of the Central Aerohydrodynamic Institute]. Moscow, TsAGI, 1935, pp. 48–52. (In Russian)
10. Sedov L.I. *Ploskie zadachi gidrodinamiki i aerodinamiki* [Plane Problems of Hydrodynamics and Aerodynamics]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1950. 444 p. (In Russian)
11. Nekrasov A.I. *Teoriya kryla v nestatsionarnom potoke* [Theory of a Wing in a Nonsteady Flow]. Moscow, Leningrad, Akad. Nauk SSSR, 1947. 260 p. (In Russian)
12. Alben S. Collective locomotion of two-dimensional lattices of flapping plates. Part 1. Numerical method, single-plate case and lattice input power. *J. Fluid Mech.*, 2021, vol. 915, art. A20. <https://doi.org/10.1017/jfm.2021.6>
13. Alben S. Collective locomotion of two-dimensional lattices of flapping plates. Part 2. Lattice flows and propulsive efficiency. *J. Fluid Mech.*, 2021, vol. 915, art. A21. <https://doi.org/10.1017/jfm.2021.43>.

14. Alben S., Shelley M. Coherent locomotion as an attracting state for a free flapping body. *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.*, 2005, vol. 102, no. 32, pp. 11163–11166. <https://doi.org/10.1073/pnas.0505064102>.
15. Isogai K., Shinmoto Y., Watanabe Y. Effects of dynamic stall on propulsive efficiency and thrust of flapping airfoil. *AIAA J.*, 1999, vol. 37, no. 10, pp. 1145–1151. <https://doi.org/10.2514/2.589>.
16. Lewin G.C., Haj-Hariri H. Modelling thrust generation of a two-dimensional heaving airfoil in a viscous flow. *J. Fluid Mech.*, 2003, vol. 492, pp. 339–362. <https://doi.org/10.1017/S0022112003005743>.
17. Liu H. A computational fluid dynamic study of hawkmoth hovering. *J. Exp. Biol.*, 1998, vol. 201, no. 4, pp. 461–477. <https://doi.org/10.1242/jeb.201.4.461>.
18. Lua K., Dash S.M., Lim T.T., Yeo K.S. On the thrust performance of a flapping two-dimensional elliptic airfoil in a forward flight. *J. Fluids Struct.*, 2011, vol. 66, pp. 91–109. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2016.07.012>.
19. Maertens A.P., Triantafyllou M.S., Yue D.K.P. Efficiency of fish propulsion. *Bioinspiration Biomimetics*, 2015, vol. 10, no. 4, art. 046013. <https://doi.org/10.1088/1748-3190/10/4/046013>.
20. Pedro G., Suleman A., Djilali N. A numerical study of the propulsive efficiency of a flapping hydrofoil. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 2003, vol. 42, no. 5, pp. 493–526. <https://doi.org/10.1002/fld.525>.
21. Spagnolie S.E., Moret L., Shelley M.J., Zhang J. Surprising behaviors in flapping locomotion with passive pitching. *Phys. Fluids*, 2010, vol. 22, no. 4, art. 041903. <https://doi.org/10.1063/1.3383215>.
22. Taha H.E. Geometric nonlinear control of the lift dynamics of a pitching-plunging wing. *Proc. AIAA Scitech 2020 Forum*. 2020, AIAA 2020-0824. <https://doi.org/10.2514/6.2020-0824>.
23. Zhang J., Liu N.-S., Lu X.-Y. Locomotion of a passively flapping flat plate. *J. Fluid Mech.*, 2010, vol. 659, pp. 43–68. <https://doi.org/10.1017/S0022112010002387>.
24. Dynnikov Ya.A. On the calculation of a flapping flexible airfoil in the flow of viscous incompressible fluid. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mashinostr.*, 2016, no. 4, pp. 22–30. <https://doi.org/10.18698/0536-1044-2016-4-22-30>. (In Russian)
25. Koval' K.A., Sukhorukov A.L., Chernyshev I.A. Verification results of the numerical method for calculating the hydrodynamic and hydroacoustic characteristics of a fin propulsor. *Fundam. Prikl. Gidrofiz.*, 2016, vol. 9, no. 4, pp. 60–72. (In Russian)
26. Wu X., Zhang X., Tian X., Li X., Lu W. A review on fluid dynamics of flapping foils. *Ocean Eng.*, 2020, vol. 195, art. 106712. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2019.106712>.
27. Schlichting H. Berechnung ebener periodischer Grenzschichtströmungen. *Phys. Zeit.*, 1932, Bd. 33, S. 327–335. (In German)
28. Holtsmark J., Johnsen I., Sikkeland T., Skavlem S. Boundary layer flow near a cylindrical obstacle in an oscillating, incompressible fluid. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1954, vol. 26, no. 1, pp. 26–39. <https://doi.org/10.1121/1.1907285>.
29. Riley N. Oscillatory viscous flows. Review and extension. *IMA J. Appl. Math.*, 1967, vol. 3, no. 4, pp. 419–434. <https://doi.org/10.1093/imamat/3.4.419>.
30. Riley N. The steady streaming induced by a vibrating cylinder. *J. Fluid Mech.*, 1975, vol. 68, no. 4, pp. 801–812. <https://doi.org/10.1017/S0022112075001243>.
31. Nuriev A.N., Egorov A.G. Asymptotic investigation of hydrodynamic forces acting on an oscillating cylinder at finite streaming Reynolds numbers. *Lobachevskii J. Math.*, 2019, vol. 40, no. 6, pp. 794–801. <https://doi.org/10.1134/S1995080219060180>.

32. Nuriev A.N., Egorov A.G., Kamalutdinov A.M. Hydrodynamic forces acting on the elliptic cylinder performing high-frequency low-amplitude multi-harmonic oscillations in a viscous fluid. *J. Fluid Mech.*, 2021, vol. 913, art. A40. <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.1180>.
33. Riley N., Watson E. Eccentric oscillations of a circular cylinder in a viscous fluid. *Mathematika*, 1993, vol. 40, no. 2, pp. 187–202. <https://doi.org/10.1112/S0025579300006975>.
34. Nuriev A.N., Egorov A.G. Asymptotic theory of a flapping wing of a circular cross-section. *J. Fluid Mech.*, 2022, vol. 941, art. A23. <https://doi.org/10.1017/jfm.2022.287>.
35. Nuriev A.N., Egorov A.G., Zaitseva O.N., Kamalutdinov A.M. Asymptotic study of the aerohydrodynamics of a flapping cylindrical wing in the high-frequency approximation. *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 8, pp. 2250–2256. <https://doi.org/10.1134/S1995080222110233>.
36. Egorov A.G., Nuriev A.N. Cruising speed of a cylindrical wing performing small translational-rotational oscillations. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2022, vol. 164, nos. 2–3, pp. 170–180. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2022.2-3.170-180>. (In Russian)
37. Egorov A.G., Nuriev A.N., Anisimov V.D., Zaitseva O.N. Propulsive motion of an oscillating cylinder in a viscous fluid. *Phys. Fluids*, 2024, vol. 36, no. 2, art. 021908. <https://doi.org/10.1063/5.0189346>.
38. Chernous'ko F.L. On the motion of a body containing a movable internal mass. *Dokl. Phys.*, 2005, vol. 50, no. 11, pp. 593–597. <https://doi.org/10.1134/1.2137795>.
39. Chernous'ko F.L. Analysis and optimization of the motion of a body controlled by means of a movable internal mass. *J. Appl. Math. Mech.*, 2006, vol. 70, no. 6, pp. 819–842. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2007.01.003>.
40. Bolotnik N.N., Figurina T.Yu., Chernous'ko F.L. Optimal control of the rectilinear motion of a twobody system in a resistive medium. *J. Appl. Math. Mech.*, 2012, vol. 76, no. 1, pp. 1–14. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.03.001>.
41. Bolotnik N., Pivovarov M., Zeidis I., Zimmermann K. The undulatory motion of a chain of particles in a resistive medium in the case of a smooth excitation mode. *ZAMM*, 2013, vol. 93, no. 12, pp. 895–913. <https://doi.org/10.1002/zamm.201200124>.
42. Yegorov A.G., Zakharova O.S. The energy-optimal motion of a vibration-driven robot in a resistive medium. *J. Appl. Math. Mech.*, 2010, vol. 74, no. 4, pp. 443–451. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2010.09.010>.
43. Egorov A.G., Zakharova O.S. The optimal quasistationary motion of a vibration-driven robot in a viscous medium. *Russ. Math.*, 2012, vol. 56, no. 2, pp. 50–55. <https://doi.org/10.3103/S1066369X12020065>.
44. Du Z., Fang H., Zhan X., Xu J. Experiments on vibration-driven stick-slip locomotion: A sliding bifurcation perspective. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2018, vol. 105, pp. 261–275. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2017.12.001>.
45. Diao B., Zhang X., Fang H., Xu J. Optimal control of the multi-module vibration-driven locomotion robot. *J. Sound Vib.* 2022, vol. 527, art. 116867. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2022.116867>.
46. Egorov A.G., Zakharova O.S. The energy-optimal motion of a vibration-driven robot in a medium with an inherited law of resistance. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2015, vol. 54, no. 3, pp. 495–503. <https://doi.org/10.1134/S1064230715030065>.
47. Vetchanin E.V., Mamaev I.S., Tenenev V.A. The self-propulsion of a body with moving internal masses in a viscous fluid. *Regular Chaotic Dyn.*, 2013, vol. 18, nos. 1–2. <https://doi.org/10.1134/S1560354713010073>.
48. Borisov A.V., Mamaev I.S., Vetchanin E.V. Self-propulsion of a smooth body in a viscous fluid under periodic oscillations of a rotor and circulation. *Regular Chaotic Dyn.*, 2018, vol. 23, nos. 7–8, pp. 850–874. <https://doi.org/10.1134/S1560354718070043>.

49. Artemova E.M., Karavaev Y.L., Mamaev I.S., Vetchanin E.V. Dynamics of a spherical robot with variable moments of inertia and a displaced center of mass. *Regular Chaotic Dyn.*, 2020, vol. 25, no. 6, pp. 689–706. <https://doi.org/10.1134/S156035472006012X>.
50. Egorov A.G., Nuriev A.N., Anisimov V.D. Optimization of the movement of a cylindrical vibration-driven robot in a viscous fluid, induced by pendulum oscillations of the internal mass. *Lobachevskii J. Math.*, 2023, vol. 444, no. 10, pp. 4438–4447. <https://doi.org/10.1134/S1995080223100104>.
51. Purcell E.M. Life at low Reynolds number. *Am. J. Phys.*, 1977, vol. 45, no. 1, pp. 3–11. <https://doi.org/10.1119/1.10903>.
52. Becker L.E., Koehler S.A., Stone H.A. On self-propulsion of micro-machines at low Reynolds number: Purcell's three-link swimmer. *J. Fluid Mech.*, 2003, vol. 490, pp. 15–35. <https://doi.org/10.1017/S0022112003005184>.
53. Sánchez-Rodríguez J., Raufaste C., Argentina M. Scaling the tail beat frequency and swimming speed in underwater undulatory swimming. *Nat. Commun.*, 2023, vol. 14, no. 1, art. 5569. <https://doi.org/10.1038/s41467-023-41368-6>.

Для цитирования: Анисимов В.Д., Егоров А.Г., Нуриев А.Н., Зайцева О.Н. Пропульсивное движение цилиндрического виброробота в вязкой жидкости // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 3. С. 277–296. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.277-296>.

For citation: Anisimov V.D., Egorov A.G., Nuriev A.N., Zaitseva O.N. Propulsive motion of cylindrical vibration-driven robot in a viscous fluid. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 3, pp. 277–296. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.277-296>. (In Russian)