И. Т. Кигурадзе, Об условиях неосцилляционности сингулярных линейных дифференциальных уравнений второго порядка, *Матем. заметки*, 1969, том 6, выпуск 5, 633–639

https://www.mathnet.ru/mzm6972

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 6, № 5 (1969), 633—639

УДК 517.9

ОБ УСЛОВИЯХ НЕОСЦИЛЛЯЦИОННОСТИ СИНГУЛЯРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

И. Т. Кигурадзе

Найдены условия, при выполнении которых каждое нетривиальное решение уравнения $u'' + \beta(t)\, u' + \alpha(t)\, u = 0$, где $\beta(t) \in L(a, b)$ и $(t - a)\,(t - b)\, \alpha(t) \in L(a, b)$, имеет не более одного нуля в промежутке $a \leqslant t \leqslant b$. Библ. 8 назв.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u'' + \beta(t)u' + \alpha(t)u = 0, \tag{1}$$

где $-\infty < a < b < +\infty$,

$$\beta(t) \in L(a, b), \quad (t - a)\,(t - b)\alpha(t) \in L(a, b). \tag{2}$$

Введем следующее

Определение. Уравнение (1) называется *неосцилляционным* в промежутке $a \leqslant t \leqslant b$, если каждое нетривиальное решение *) этого уравнения имеет не более одного нуля в промежутке $a \leqslant t \leqslant b$. В противном случае уравнение (1) называется *осцилляционным* в промежутке $a \leqslant t \leqslant b$.

Для случая, когда $\alpha(t) \in L(a, b)$, разные достаточные условия неосцилляционности уравнения (1) содержатся в

*) Под значениями решения $u(t)$ уравнения (1) в точках $t=a$ и $t=b$ понимаются, соответственно, $u(a)=\lim\limits_{t\to a+0} u(t)$ и $u(b)=\lim\limits_{t\to b-0} u(t)$, которые существуют согласно доказанной ниже лемме 1.

работах [1—4] (см. также [5], стр. 125, примечание переводчика).

В настоящей заметке доказываются следующие предложения:

ТЕОРЕМА. *Пусть*

$$\alpha_0(t) \geqslant 0,\ \beta_0(t) \geqslant 0 \quad \textit{при} \quad a < t < b,$$
$$(t-a)(t-b)\alpha_0(t) \in L(a, b),\ \beta_0(t) \in L(a, b). \tag{3}$$

Тогда для того, чтобы уравнение (1) *было неосцилляционным в промежутке* $a \leqslant t \leqslant b$ *при любых* $\alpha(t)$ *и* $\beta(t)$, *удовлетворяющих условиям* (2) *и неравенствам*

$$\alpha(t) \leqslant \alpha_0(t),\ |\beta(t)| \leqslant \beta_0(t) \textit{ при } a < t < b, \tag{4}$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого $t_0 \in [a, b]$ *уравнение*

$$u'' + \beta_0(t)\operatorname{sign}(t_0 - t)\, u' + \alpha_0(t) u = 0 \tag{5}$$

было неосцилляционным в промежутке $a \leqslant t \leqslant b$.

Следствие 1. *Если соблюдаются условия* (2) *и*

$$\alpha(t) \leqslant \alpha(t-a)^{-2\sigma_1}(b-t)^{-2\sigma_2},\ |\beta(t)| \leqslant \beta(t-a)^{-\sigma_1}(b-t)^{-\sigma_2}$$

при $a < t < b$, *где* $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\sigma_k < 1$ $(k = 1, 2)$ *и*

$$\frac{\alpha}{\pi^2}\left\{\int_a^b (t-a)^{-\sigma_1}(b-t)^{-\sigma_2}\, dt\right\}^2 + \frac{\beta}{\pi}\int_a^b (t-a)^{-\sigma_1}(b-t)^{-\sigma_2}\, dt < 1, \tag{6}$$

то уравнение (1) *является неосцилляционным в промежутке* $a \leqslant t \leqslant b$.

Следствие 2. *Пусть* α *и* β — *неотрицательные постоянные. Тогда для того, чтобы уравнение* (1) *было неосцилляционным в промежутке* $a \leqslant t \leqslant b$ *для любых* $\alpha(t)$ *и* $\beta(t)$, *удовлетворяющих условиям* (2) *и неравенствам*

$$\alpha(t) \leqslant \alpha, \qquad |\beta(t)| \leqslant \beta \text{ при } a < t < b,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$b - a < \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha}} \ln \dfrac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}}{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}} & \textit{при } 4\alpha < \beta^2, \\ 4/\beta & \textit{при } 4\alpha = \beta^2, \\ \dfrac{4}{\sqrt{4\alpha - \beta^2}} \operatorname{arcctg} \dfrac{\beta}{\sqrt{4\alpha - \beta^2}} & \textit{при } 4\alpha > \beta^2. \end{cases} \tag{7}$$

Прежде всего докажем следующую лемму:

ЛЕММА 1. *Если соблюдаются условия* (2), *то каждое решение уравнения* (1) *имеет конечные пределы*

$$u(a)=\lim_{t\to a+0} u(t) \quad \text{и} \quad u(b)=\lim_{t\to b-0} u(t),$$

при этом, если $u(a)=0$ $(u(b)=0)$, *то существует конечный предел*

$$u'(a)=\lim_{t\to a+0} u'(t) \quad \left(u'(b)=\lim_{t\to b-0} u'(t)\right).$$

Доказательство. Из теоремы 3, доказанной в заметке [8], следует, что при условиях (2) уравнение (1) имеет решения $u_1(t)$ и $u_2(t)$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered}\lim_{t\to a+0} u_1(t)=0, \quad \lim_{t\to a+0} u_1'(t)=1;\\ \lim_{t\to b-0} u_2(t)=0, \quad \lim_{t\to b-0} u_2'(t)=-1.\end{gathered} \tag{8}$$

Пусть

$$u_1(t)>0 \text{ при } a<t\leqslant t_1 \text{ и } u_2(t)>0 \text{ при } t_2\leqslant t<b.$$

Полагая

$$\begin{gathered}\widetilde{u}_1(t)=u_1(t)\int_t^{t_1} u_1^{-2}(\tau)\exp\left[-\int_a^{\tau}\beta(s)\,ds\right]d\tau,\\ \widetilde{u}_2(t)=u_2(t)\int_{t_2}^{t} u_2^{-2}(\tau)\exp\left[\int_{\tau}^{b}\beta(s)\,ds\right]d\tau,\end{gathered}$$

согласно (8) легко заключим, что

$$\lim_{t\to a+0}\widetilde{u}_1(t)=1, \quad \lim_{t\to b-0}\widetilde{u}_2(t)=1. \tag{9}$$

Очевидно, что для любого решения $u(t)$ уравнения (1) будем иметь

$$\begin{gathered}u(t)=c_1u_1(t)+\widetilde{c}_1\widetilde{u}_1(t) \text{ при } a\leqslant t\leqslant t_1,\\ u(t)=c_2u_2(t)+\widetilde{c}_2\widetilde{u}_2(t) \text{ при } t_2\leqslant t\leqslant b,\end{gathered} \tag{10}$$

где c_1, $\widetilde{c}_1$, c_2 и $\widetilde{c}_2$ — постоянные. Отсюда в силу (8) и (9) непосредственно следует, что

$$u(a)=\lim_{t\to a+0} u(t)=\widetilde{c}_1, \qquad u(b)=\lim_{t\to b-0} u(t)=\widetilde{c}_2. \tag{11}$$

Если теперь предположить, что $u(a)=0$ $(u(b)=0)$, то согласно (10) и (11) будем иметь

$$u(t)=c_1u_1(t) \quad (u(t)=c_2u_2(t)).$$

Отсюда в силу (8) получаем

$$\lim_{t\to a+0} u'(t) = c_1 \quad (\lim_{t\to b-0} u'(t) = -c_2).$$

Лемма доказана.

С учетом леммы 1 легко можно проверить, что при условиях (2) сохраняют справедливость хорошо известные для уравнений с суммируемыми коэффициентами следующие предложения:

ЛЕММА 2. *Если соблюдаются условия* (2) *и уравнение* (1) *является неосцилляционным в промежутке* $a \leqslant t \leqslant b$, *то существует функция Грина краевой задачи*

$$u'' + \beta(t)u' + \alpha(t)u = 0,\ u'(a) = u(b) = 0$$

и она неположительна.

ЛЕММА 3. *Пусть соблюдаются условия* (2)

$$(t-a)(t-b)\,\alpha_0(t) \in L(a, b) \ \text{и}\ \alpha(t) \leqslant \alpha_0(t)$$

при $a < t < b$. *Тогда если уравнение* (1) *является осцилляционным в промежутке* $a \leqslant t \leqslant b$, *то и уравнение*

$$u'' + \beta(t)u' + \alpha_0(t)u = 0 \tag{12}$$

будет осцилляционным в промежутке $a \leqslant t \leqslant b$.

ЛЕММА 4. *Если функция* $u(t)$ *непрерывно дифференцируема в промежутке* $a \leqslant t \leqslant b$ *и* $u(a) = u(b) = 0$, *а функция* $g(t)$ *неотрицательна и суммируема вместе с* $1/g(t)$, *то*

$$\int_a^b g(t)\,u^2(t)\,dt \leqslant \frac{1}{\pi^2}\left(\int_a^b g(t)\,dt\right)^2 \int_a^b \frac{u'^2(t)}{g(t)}\,dt. \tag{13}$$

Доказательство. Положим

$$u(t) = w(x),\ x = \pi \int_a^t g(\tau)\,d\tau \Big/ \int_a^b g(\tau)\,d\tau. \tag{14}$$

Поскольку $w(0) = w(\pi) = 0$ и $w'(x) \in L^2(0, \pi)$, имеем

$$\int_0^\pi w^2(x)\,dx \leqslant \int_0^\pi w'^2(x)\,dx$$

(см. [6], стр. 222). Отсюда согласно (14) непосредственно следует справедливость неравенства (13).

Доказательство теоремы. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Допустим противное, что уравнение (1) является осцилляционным в промежутке $a \leqslant t \leqslant b$. Тогда, согласно лемме 3, и уравнение (12) будет осцилляционным в промежутке $a \leqslant t \leqslant b$.

Пусть $u(t)$ — решение уравнения (12), удовлетворяющее условиям

$$u(t_1) = u(t_2) = 0 \tag{15}$$

и

$$u(t) > 0 \quad \text{при} \quad t_1 < t < t_2, \tag{16}$$

где $a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b$. Ввиду неотрицательности $\alpha_0(t)$ и $u(t)$ из (12) следует

$$\frac{d}{dt}\left\{\exp\left[\int_a^t \beta(\tau)\,d\tau\right]u'(t)\right\} \leqslant 0 \quad \text{при } t_1 \leqslant t \leqslant t_2. \tag{17}$$

Из (15) и (17) очевидно, что для некоторого $t_0 \in (t_1, t_2)$ имеем

$$u'(t)\operatorname{sign}(t_0 - t) = |u'(t)| \quad \text{при} \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2. \tag{18}$$

Согласно (4) и (18) из (12) находим

$$u''(t) + \beta_0(t)\operatorname{sign}(t_0 - t)\,u'(t) + \alpha_0(t)\,u(t) = \gamma(t), \tag{19}$$

где

$$\gamma(t) = [\beta_0(t) - \beta(t)\operatorname{sign}(t_0 - t)]\,|u'(t)| \geqslant 0$$
$$\text{при } t_1 \leqslant t \leqslant t_2. \tag{20}$$

Пусть $G(t, \tau)$ — функция Грина задачи (5)—(15). Согласно лемме 2 имеем

$$G(t, \tau) \leqslant 0 \text{ при } t_1 \leqslant t, \tau \leqslant t_2. \tag{21}$$

В силу (15), (19), (20) и (21) получаем

$$u(t) = \int_{t_1}^{t_2} G(t, \tau)\,\gamma(\tau)\,d\tau \leqslant 0 \quad \text{при } t_1 \leqslant t \leqslant t_2,$$

что противоречит неравенству (16). Полученное противоречие доказывает теорему.

Доказательство следствия 1. Согласно вышедоказанной теореме достаточно показать, что уравнение

$$u'' + \beta g(t)\operatorname{sign}(t_0 - t)\,u' + \alpha g^2(t)u = 0, \tag{22}$$

где

$$g(t) = (t - a)^{-\sigma_1}(b - t)^{-\sigma_2} \tag{23}$$

является неосцилляционным в промежутке $a \leqslant t \leqslant b$ при любом $t_0 \in [a, b]$. Допустим противное, то есть что для некоторого $t_0 \in [a, b]$ уравнение (22) имеет решение $u(t)$, удовлетворяющее условиям (15) и (16).

Умножая обе части уравнения (22) на $u(t)/g(t)$ и интегрируя от t_1 до t_2, согласно лемме 1 и равенствам (15) и (23), найдем

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{u'^2(t)}{g(t)}\, dt \leqslant \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{g(t)}\right)'' u^2(t)\, dt + \alpha \int_{t_1}^{t_2} g(t) u^2(t)\, dt + \beta \int_{t_1}^{t_2} |u(t) u'(t)|\, dt. \quad (24)$$

Согласно лемме 4 имеем

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t) u^2(t)\, dt \leqslant \frac{1}{\pi^2} \left[\int_{t_1}^{t_2} g(t) dt\right]^2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{u'^2(t)}{g(t)}\, dt \quad (25)$$

и

$$\int_{t_1}^{t_2} |u(t) u'(t)|\, dt \leqslant \left[\int_{t_1}^{t_2} g(t) u^2(t)\, dt\right]^{1/2} \left[\int_{t_1}^{t_2} \frac{u'^2(t)}{g(t)}\, dt\right]^{1/2} \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} g(t)\, dt \int_{t_1}^{t_2} \frac{u'^2(t)}{g(t)}\, dt. \quad (26)$$

С другой стороны, из (23) ясно, что

$$\left(\frac{1}{g(t)}\right)'' \leqslant 0 \qquad \text{при } a \leqslant t < b. \quad (27)$$

Учтя, что $u'(t) \not\equiv 0$ при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, в силу (6), (25), (26) и (27) из (24) найдем

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{u'^2(t)}{g(t)}\, dt \leqslant \left\{\frac{\alpha}{\pi^2} \left[\int_{t_1}^{t_2} g(t)\, dt\right]^2 + \frac{\beta}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} g(t)\, dt\right\} \int_{t_1}^{t_2} \frac{u'^2(t)}{g(t)}\, dt < \int_{t_1}^{t_2} \frac{u'^2(t)}{g(t)}\, dt.$$

Полученное противоречие доказывает справедливость следствия.

Выписав в явном виде решение $u(t;\ t_0)$ уравнения

$$u'' + \beta \operatorname{sign}(t - t_0) u' + \alpha u = 0 \quad (28)$$

при начальных условиях

$$u(a;\ t_0) = 0, \qquad u'(a;\ t_0) = 1,$$

с помощью элементарных рассуждений покажем, что если соблюдается неравенство (7), то

$$u(t;\ t_0) > 0 \text{ при } a < t \leqslant b,\ a \leqslant t_0 \leqslant b.$$

Следовательно, уравнение (28) является неосцилляционным для любого $t_0 \in [a, b]$. Применяя теперь доказанную выше теорему, справедливость следствия 2 становится очевидной.

Следует отметить, что для уравнений с суммируемыми коэффициентами следствие 2 не является новым. Его разные доказательства содержатся в работах [3, 4] (см. также [7], стр. 275—279).

Тбилисский государственный университет

Поступило 23.IX.1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] de la Vallée Poussin Ch. J., Sur l'équation differentielle du second ordre. Determination d'une intérgrale par deux valeurs assignies. Extension aus équations d'ordren, J. math. pures et appl., 9, № 8 (1929), 125—144.

[2] Hartman P., Wintner A., On a oscillation criterion de la Vallée Poussin, Quart. Appl. Math., **13**, № 3 (1955), 330—332.

[3] Epheser H., Über die Existenz der Lösungen von Randwertaufgaben mit Gewönlichen nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Math. Z., **61**, № 4 (1955), 435—454.

[4] Мильштейн Г. Н., О краевой задаче для системы двух дифференциальных уравнений, Дифф. уравнения, **1**, № 12 (1965), 1628—1638.

[5] Трикоми Ф., Дифференциальные уравнения, М., 1962.

[6] Харди Г. Т., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г., Неравенства, М., 1948.

[7] Болтянский В. Г., Математические методы оптимального управления, М., 1966.

[8] Кигурадзе И. Т., О задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностями, Сообщ. АН Грузинской ССР, **37**, № 1 (1965), 19—24.