МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 12, № 3 (1972), 269—274

УДК 517.9

ПРИМЕР НЕГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА, ОБЛАДАЮЩЕГО СВОЙСТВОМ ГЛОБАЛЬНОЙ ГИПОЭЛЛИПТИЧНОСТИ

В. С. Федий

Доказывается, что оператор

$$P \equiv -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \sum_{k=2}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi^2(x) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

где $\varphi(x) \in C^\infty(\Omega)$ (Ω — область в $\boldsymbol{R}^n$), $\{x: \varphi(x) = 0\}$ — компакт в Ω, являющийся замыканием своих внутренних точек, обладает свойством глобальной гипоэллиптичности в Ω, т. е.

$$v \in D'(\Omega), \quad Pv \in C^\infty(\Omega) \Rightarrow v \in C^\infty(\Omega)$$

Этот оператор не является гипоэллиптическим. Библ. 2 назв.

В статье используются обозначения, смысл которых разъяснен на первых страницах книги [1].

Пусть Ω — некоторая область $\boldsymbol{R}^n$. Линейный дифференциальный оператор $P(x, D)$ с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами в Ω называется гипоэллиптическим, если $\operatorname{sing\,supp} Pu = \operatorname{sing\,supp} u$ для любой функции u из $D'(\Omega)$. Это означает, что

$$u \in D'(\Omega'), \qquad Pu \in C^\infty(\Omega') \Rightarrow u \in C^\infty(\Omega').$$

Здесь Ω' — произвольная подобласть в Ω.

Мы будем говорить, что оператор $P(x, D)$ глобально гипоэллиптичен в Ω, если

$$u \in D'(\Omega), \qquad Pu \in C^\infty(\Omega) \Rightarrow u \in C^\infty(\Omega).$$

Для операторов с постоянными коэффициентами понятия гипоэллиптичности и глобальной гипоэллиптичности совпадают. В настоящей работе приводится пример глобально гипоэллиптического вырождающегося эллиптического оператора второго порядка, который не является гипоэллиптическим. По-видимому, это первый пример такого рода.

Пусть K_0 — компакт в Ω, являющийся замыканием своих внутренних точек. Пусть $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n)$ — вещественная функция из $C^\infty(\Omega)$ такая, что $\{x: \varphi(x) = 0\} = K_0$. Рассмотрим в Ω дифференциальный оператор

$$P(x, D)\,u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \sum\nolimits_{k=2}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi^2 \frac{\partial u}{\partial x_k}. \tag{1}$$

Утверждается, что он обладает сформулированным выше свойством. Докажем это.

Оператор (1) негипоэллиптичен. Это очевидным образом следует из того, что на внутренности K_0 оператор (1) просто совпадает с оператором $-\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}$.

Оператор (1) глобально гипоэллиптичен в Ω. Для доказательства этого факта нам потребуется теорема, сформулированная ниже. Ее доказательство можно найти в статье [2].

ТЕОРЕМА. *Пусть $P(x, D)$ — дифференциальный оператор с коэффициентами из $C^\infty(\Omega)$, удовлетворяющий условиям:*

1° *для любого компакта K из Ω, любого вещественного N и некоторых s_0 и a выполняется оценка*

$$\|u\|^2_{(s_0+a)} \leqslant C_{K,N}\{\|Pu\|^2_{(s_0)} + \|u\|^2_{(-N)}\}, \qquad u \in C_0^\infty(K); \tag{2}$$

2° *для любого компакта K из Ω, любого мультииндекса $\beta \neq 0$ и некоторых вещественных s_β, каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и N с некоторой постоянной $C_{K,\varepsilon,N,\beta} > 0$, выполняется оценка*

$$\|P_{(\beta)}u\|^2_{(s_\beta)} \leqslant \varepsilon\|Pu\|^2_{(s_\beta+|\beta|)} + C_{K,\varepsilon,N,\beta}\|u\|^2_{(-N)}, \quad u \in C_0^\infty(K). \tag{3}$$

Тогда $v \in D'(\Omega)$, $\operatorname{sing\,supp} v$ — компакт в Ω,

$$Pv \in H^{\mathrm{loc}}_{(\sigma)}(\Omega) \Rightarrow v \in H^{\mathrm{loc}}_{(\sigma+a)}(\Omega).$$

В частности, если $Pv \in C^\infty(\Omega)$, то $v \in C^\infty(\Omega)$.

Рассмотрим оператор (1). Так как он эллиптичен (а следовательно, и гипоэллиптичен) в $\Omega \setminus K_0$, из $Pu \in C^\infty(\Omega)$ следует, что $u \in C^\infty(\Omega \setminus K_0)$. А это означает, что $\operatorname{sing\,supp} u \in K_0$, т. е. является компактом в Ω. Поэтому для доказательства глобальной гипоэллиптичности оператора (1) достаточно проверить справедливость для него оценок (2) и (3). Начнем с доказательства оценки (2).

Пусть K — любой компакт в Ω, $v \in C_0^\infty(K)$. Имеем

$$(Pv, v) = \left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_{(0)}^2 + \sum_{k=2}^n \left\| \varphi \frac{\partial v}{\partial x_k} \right\|_{(0)}^2 \geqslant \left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_{(0)}^2. \tag{4}$$

Хорошо известно, что $\left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_0^2 \geqslant C_K \| v \|_{(0)}^2$, где постоянная C_K зависит от размеров K. Отсюда получаем

$$C_K \| v \|_{(0)}^2 \leqslant (Pv, v) \leqslant \frac{1}{2\mu} \| Pv \|_{(0)}^2 + \frac{\mu}{2} \| v \|_{(0)}^2.$$

Здесь μ — произвольное положительное число. Выбирая $\mu < 2C_K$ и перенося $(\mu/2) \| v \|_{(0)}^2$ в левую часть неравенства, получаем оценку

$$\| v \|_{(0)}^2 \leqslant \tilde{C}_K \| Pv \|_{(0)}^2, \tag{5}$$

а это и есть нужная нам оценка (2) с $s_0 = 0$ и $a = 0$.

Теперь перейдем к доказательству оценок (3). Пусть $v \in C_0^\infty(K)$. При $|\beta| \geqslant 3$ имеем

$$\| P_\beta v \|_{(-|\beta|)}^2 \leqslant C \| v \|_{(-1)}^2 \leqslant \mu \| v \|_{(0)}^2 + C_{\mu, K} \| v \|_{(-N)}^2,$$

где μ и N — произвольные положительные числа. Здесь мы воспользовались тем, что порядок оператора P равен двум. Отсюда, в силу произвольности μ и неравенства (5), следует оценка (3).

Пусть $|\beta| = 1$. Рассмотрим оператор $P_{(j)}(x, D)$. Имеем

$$\| P_{(j)}(x, D) v \|_{(-1)}^2 = \left\| -\sum_{k=2}^n 2\varphi\varphi_{(j)} \frac{\partial v}{\partial x_k} \right\|_{(-1)}^2 \leqslant$$
$$\leqslant (n-1) \sum_{k=2}^n \left\| 2\varphi_{(j)}\varphi \frac{\partial v}{\partial x_k} \right\|_{(0)}^2. \tag{6}$$

Так как функция $\varphi_{(j)}(x)$ равна нулю на K_0 и, следовательно, по непрерывности мала вблизи K_0, можно по любому $\mu > 0$ найти такую функцию $\Psi_\mu(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, что

$\Psi_\mu(x) = 1$ в окрестности K_0, $0 \leqslant \Psi_\mu \leqslant 1$ и

$$(n-1)\sum_{k=2}^{n} \left\| 2\varphi_{(j)}\varphi \frac{\partial \Psi_\mu v}{\partial x_k} \right\|^2_{(0)} \leqslant \mu \sum_{k=2}^{n} \left\| \varphi \frac{\partial \Psi_\mu v}{2x_k} \right\|^2_{(0)}.$$

Отсюда и из (4) и (6) получаем

$$\| P_{(j)}(x, D) v \|^2_{(-1)} \leqslant 2 \| P_{(j)} \Psi_\mu v \|^2_{(-1)} + 2 \| P_{(j)} (1 - \Psi_\mu) v \|^2_{(-1)} \leqslant$$
$$\leqslant 2\mu (P\Psi_\mu v, \Psi_\mu v) + 2 \| P_{(j)} (1 - \Psi_\mu) v \|^2_{(-1)}. \quad (7)$$

Правую часть в (7) оценим через

$$\mu \| P\Psi_\mu v \|^2_{(0)} + \mu \| \Psi_\mu v \|^2_{(0)} + C \| P(1 - \Psi_\mu) v \|^2_{(-1)} + C \| v \|^2_{(-N)}. \quad (8)$$

Для оценки второго слагаемого в (7) мы использовали обычную эллиптическую оценку. Чтобы оценить второе слагаемое в (8), воспользуемся неравенством (5) и тем, что $0 \leqslant \Psi_\mu \leqslant 1$.

Используем также, что $P\Psi_\mu v = \Psi_\mu P v + [P, \Psi_\mu] v$, а $P(1 - \Psi_\mu) v = (1 - \Psi_\mu) P v + [P, 1 - \Psi_\mu] v$, где, как обычно, через $[P, \varphi]$ обозначается оператор $P\varphi - \varphi P$.

Тогда (8) оценится через

$$2\mu \| Pv \|^2_{(0)} + \mu \tilde{C}_K \| Pv \|^2_{(0)} + 2\mu \| [P, \Psi_\mu] v \|^2_{(0)} + C \| Pv \|^2_{(-1)} +$$
$$+ C \| [P, 1 - \Psi_\mu] v \|^2_{(-1)} + C_{\mu, N} \| v \|^2_{(-N)}. \quad (9)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Фиксируем $\mu > 0$ таким, чтобы было $2\mu + \mu \tilde{C}_K < \varepsilon/4$. Так как

$$C \| Pv \|^2_{(-1)} \leqslant (\varepsilon/4) \| Pv \|^2_{(0)} + C_{\varepsilon, N} \| v \|^2_{(-N)},$$

то (9) можно оценить через

$$\frac{\varepsilon}{2} \| Pv \|^2_{(0)} + 2\mu \| [P, \Psi_\mu] v \|^2_{(0)} + C \| [P, 1 - \Psi_\mu] v \|^2_{(0)} +$$
$$+ C_{\mu, \varepsilon, N} \| v \|^2_{(-N)}. \quad (10)$$

Второе и третье слагаемые в (10), как это следует из доказанной ниже леммы, можно в свою очередь оценить через $(\varepsilon/2) \| Pv \|^2_{(0)} + C_{\varepsilon, N} \| v \|^2_{(-N)}$. Это завершает доказательство оценки (3) для $|\beta| = 1$.

ЛЕММА. *Пусть функция* $\varphi(x) \in C^\infty(\Omega)$ *такова, что* $\varphi_{(\alpha)}(x) = 0$ *в некоторой окрестности* K_0 *для всех* $\alpha \neq 0$. *Тогда для* $v \in C_0^\infty(K)$ *справедливо неравенство*

$$\| [P, \varphi] v \|^2_{(0)} \leqslant C_{N, K} \{ \| Pv \|^2_{(-1)} + \| v \|^2_{(-N)} \}.$$

Доказательство. Так как с некоторыми постоянными C_α $[P, \varphi] = C_\alpha P^{(\alpha)} \varphi_\alpha$, то

$$\|[P, \varphi] v\|_{(0)}^2 \leqslant C \sum\nolimits_{0<|\alpha|\leqslant 2} \|P^{(\alpha)} \varphi_{(\alpha)} v\|_{(0)}^2.$$

Из условий леммы следует, что $\varphi_\alpha v \in C_0^\infty(\Omega \setminus K_0)$, а в $\Omega \setminus K_0$ оператор (1) эллиптичен. Поэтому, используя обычные эллиптические оценки, получим, что

$$\|[P, \varphi] v\|_{(0)}^2 \leqslant C \sum\nolimits_{0<|\alpha|\leqslant 2} \|P \varphi_{(\alpha)} v\|_{(-|\alpha|)}^2 \leqslant$$
$$\leqslant C \sum\nolimits_{0<|\alpha|\leqslant 2} \|P \varphi_{(\alpha)} v\|_{(-1)}^2.$$

Далее

$$\|P \varphi_{(\alpha)} v\|_{(-1)}^2 \leqslant C \|P v\|_{(-1)}^2 + C \|[P, \varphi_{(\alpha)}] v\|_{(-1)}^2.$$

Оценивая второе слагаемое в правой части этого неравенства точно так же, как выше мы оценивали $[P, \varphi] v \|_{(0)}^2$, получим, что

$$\sum\nolimits_{0<|\alpha|\leqslant 2} \|P \varphi_{(\alpha)} v\|_{(-1)}^2 \leqslant$$
$$\leqslant C \|P v\|_{(-1)}^2 + C \sum\nolimits_{\substack{0<|\alpha|\leqslant 2\\ 0<|\beta|\leqslant 2}} \|[P, \varphi_{(\alpha+\beta)}] v\|_{(-2)}^2.$$

Если проделать все это n раз, то придем к оценке

$$\sum\nolimits_{0<|\alpha|\leqslant 2} \|P \varphi_{(\alpha)} v\|_{(-1)}^2 \leqslant C \|P v\|_{(-1)}^2 + C \sum\nolimits_{|\gamma|\leqslant 2n} \|[P, \varphi_{(\gamma)}] v\|_{(-n)}^2.$$

Операторы $[P, \varphi_{(\gamma)}]$ имеют первый порядок. Поэтому

$$\|[P, \varphi_{(\gamma)}] v\|_{(-n)}^2 \leqslant C_{K,n} \|v\|_{(1-n)}^2.$$

Фиксируем произвольное $N > 0$ и возьмем $n \geqslant N + 1$. Тогда получим окончательно

$$\|[P, \varphi] v\|_{(0)}^2 \leqslant C \sum\nolimits_{0<|\alpha|\leqslant 2} \|P \varphi_{(\alpha)} v\|_{(-1)}^2 \leqslant C \{\|P v\|_{(-1)}^2 + \|v\|_{(-N)}^2\}.$$

Это завершает доказательство леммы.

Остается доказать неравенства (3) для $|\beta| = 2$. В этом случае

$$\|P_{(\beta)}(x, D) v\|_{(-2)}^2 = \left\| - \sum\nolimits_{k=2}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (\varphi^2)_{(\beta)} \frac{\partial v}{\partial x_k} \right\|_{(-2)}^2 =$$
$$= \left\| - \sum\nolimits_{k=2}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} (\varphi^2)_{(\beta)} v + \sum\nolimits_{k=2}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (2\varphi\varphi_{(k)})_{(\beta)} v \right\|_{(-2)}^2 \leqslant$$
$$\leqslant C \{\|(\varphi^2)_{(\beta)} v\|_{(0)}^2 + \|v\|_{(-1)}^2\}. \quad (11)$$

Второе слагаемое в правой части (11) сразу можно оценить нужным образом, используя (5). Для оценки первого слагаемого выберем, как и выше, функцию $\Psi_\mu(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, $\Psi_\mu(x) = 1$ с окрестности K_0 такую, чтобы было

$$C\|(\varphi^2)_{(\beta)} v\|^2_{(0)} \leqslant \mu \|v\|^2_{(0)} + C_\mu \|(1-\Psi_\mu) v\|^2_{(0)}.$$

Это всегда можно сделать, так как $(\varphi^2)_{(\beta)} = 0$ на K_0. Фиксируем $\mu = \frac{\varepsilon}{3C_K}$. Тогда из (5) получим

$$\mu \|v\|^2_{(0)} \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \|Pv\|^2_{(0)}. \tag{12}$$

Для того чтобы оценить $\|(1-\Psi_\mu) v\|^2_{(0)}$, используем эллиптические оценки. Получим тогда

$$\begin{aligned}(1-\Psi_\mu) v\|^2_{(0)} &\leqslant C\{\|P(1-\Psi_\mu) v\|^2_{(-2)} + \|v\|^2_{(-N)}\} \leqslant \\ &\leqslant C\|Pv\|^2_{(-2)} + C\|[P, 1-\Psi_\mu] v\|^2_{(-2)} + C\|v\|^2_{(-N)} \leqslant \\ &\leqslant C\|Pv\|^2_{(-2)} + C\|v\|^2_{(-1)} + C\|v\|^2_{(-N)}\end{aligned}$$

Отсюда, применяя (5), легко получить, что

$$C_\mu \|(1-\Psi_\mu) v\|^2_{(0)} \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \|Pv\|^2_{(0)} + C_\varepsilon \|v\|^2_{(-N)}. \tag{13}$$

Объединяя (11), (12) и (13), получаем

$$\|P_{(\beta)} v\|^2_{(-2)} \leqslant \varepsilon \|Pv\|^2_{(0)} + C_\varepsilon \|v\|^2_{(-N)}.$$

А это и есть нужная нам оценка. Таким образом глобальная гипоэллиптичность в Ω оператора (1) доказана.

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю В. В. Грушину за постановку задачи, помощь и внимание.

Новочеркасский политехнический
институт

Поступило
28.IX.1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Хермандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М., 1965.
[2] Федий В. С., Об одном условии гипоэллиптичности, Матем. сб., 85 (127), № 1 (1971), 18—48.