А. В. Шильков, Тензорные разложения углового распределения частиц, *Матем. моделирование*, 2020, том 32, номер 3, 61–80

DOI: 10.20948/mm-2020-03-04

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 2020 год, том 32, номер 3, стр. 61-80

ТЕНЗОРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ УГЛОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ

 А.В. Шильков

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва
ale-shilkov@yandex.ru

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №14-11-00699.

DOI: 10.20948/mm-2020-03-04

Установлена связь между классом симметричных сферических тензоров и четно-нечетными многочленами. Получены разложения оператора рассеяния фотонов или нейтронов по симметричным сферическим тензорам. Среди них есть разложения, обладающие более высокой скоростью равномерной сходимости в сравнении с разложениями по сферическим функциям и многочленам Лежандра. Показано, что в задачах переноса излучений в веществе с преимущественным рассеянием вперед или назад целесообразно пользоваться разложениями по системе многочленов и тензоров Чебышева.

Ключевые слова: уравнение переноса фотонов или нейтронов, сферические тензоры, разложения оператора рассеяния, уменьшение порядка разложений.

TENSOR EXPANSIONS OF THE ANGULAR PARTICLE DISTRIBUTION

A.V. Shilkov

Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS

A relation between the class of symmetric spherical tensors and even-odd polynomials is established. The expansions of the scattering operator of photons or neutrons in a series of symmetric spherical tensors are obtained. Among them there are expansions that have a higher speed of uniform convergence in comparison with expansions in the spherical functions and Legendre polynomials. It is shown that in problems of radiation transport in matter with predominant forward or backward scattering, it is advisable to use expansions in the system of Chebyshev polynomials and tensors.

Keywords: photon or neutron transport equation, spherical tensors, expansions of the scattering operator, reduction of the order of expansions.

Введение

Уравнение переноса излучений. В численном моделировании ядерных реакторов, защиты от излучений, задач дистанционной диагностики объектов в биологии и технике требуется находить решение линейного интегро-дифференциального уравнения переноса фотонов или нейтронов:

$$\left[\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}+\Omega^i\frac{\partial}{\partial r^i}+\Sigma(E,\mathbf{r},t)\right]\varphi(E,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)=q^s(\varphi)+q^{ext}(E,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t), \quad (1)$$

$$q^s(\varphi)=\int_0^\infty\frac{\nu^s(E',\mathbf{r},t)}{2\pi}\Sigma^s(E',\mathbf{r},t)\int_{4\pi}w(E'\to E,\mathbf{\Omega\Omega}')\varphi(E',\mathbf{\Omega}',\mathbf{r},t)d\mathbf{\Omega}'dE', \quad (2)$$

$$\mathbf{\Omega}=(\sqrt{1-\mu^2}\cos\alpha,\sqrt{1-\mu^2}\sin\alpha,\mu),\quad \mu=\cos\theta,\qquad d\mathbf{\Omega}'=d\mu'd\alpha',$$

$$\int_0^\infty\int_{-1}^1 w(E'\to E,\eta,\mathbf{r},t)\,d\eta\, dE=1. \quad (3)$$

Здесь $\varphi(E,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)$ есть функции распределения частиц, зависящая от координат $\mathbf{r}$, времени t, энергии E и направления полета частиц $\mathbf{\Omega}$, ($|\mathbf{\Omega}|=1$), θ и α – полярный и азимутальный углы, μ – направляющий косинус вектора $\mathbf{\Omega}$; $\Sigma(E,\mathbf{r},t)$ – полное сечение взаимодействия частиц с веществом; q^{ext} – сторонний источник частиц, не зависящий от функции распределения; $q^s(\varphi)$ – источник вторичных частиц, возникающих в процессах рассеяния и реакциях умножения частиц, $\Sigma^s(E',\mathbf{r},t)$ – полное сечение реакций, $\nu^s(E',\mathbf{r},t)$ – число частиц на выходе реакций, $w(E'\to E,\mathbf{\Omega\Omega}',\mathbf{r},t)$ – индикатриса реакций, $\eta=\mathbf{\Omega\Omega}'$ – косинус угла между направлениями полета первичной и вторичной частицы. В задачах переноса фотонов часто можно ограничиться учетом процессов консервативного рассеяния фотонов на частицах вещества. В этом приближении:

$$\nu^s(E,\mathbf{r},t)\approx 1,\qquad w(E'\to E,\mathbf{\Omega\Omega}',\mathbf{r},t)\approx w(\mathbf{\Omega\Omega}',\mathbf{r},t)\delta(E'-E),$$

$$q^s(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\Sigma^s(E,\mathbf{r},t)\int_{4\pi}w(\mathbf{\Omega\Omega}',\mathbf{r},t)\varphi(E,\mathbf{\Omega}',\mathbf{r},t)d\mathbf{\Omega}'.$$

Далее мы будем иногда опускать часть аргументов функций, если это не противоречит пониманию формул.

Численное решение уравнения (1) прямыми методами, например, S_n-методом или методом характеристик, выполняется итерациями по значениям источника вторичных частиц $q^s(\varphi)$. Источник удобно разложить в ряд по некоторой системе базисных функций, зависящих от направления полета частиц $\mathbf{\Omega}$. Коэффициенты разложения называются моментами функции распределения. Тогда задача уточнения источника сводится к задаче уточнения моментов. Такой способ действий во многих случаях позволяет сокращать количество арифметических операций и объем хранимых данных при выполнении итераций. Отметим, что моменты функции распределения все равно требуется вычислять. Обычно они входят в список конечных результатов численного моделирования объекта.

Разложим индикатрису $w(\eta)$ в ряд по многочленам Лежандра $P_n(\eta)$:

$$w(E' \to E, \eta, \mathbf{r}, t) \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{2n+1}{2} \omega_n(E' \to E, \mathbf{r}, t) P_n(\eta), \tag{4}$$

$$\omega_n(E' \to E, \mathbf{r}, t) = \int_{-1}^{1} w(E' \to E, \eta, \mathbf{r}, t) P_n(\eta)\, d\eta,$$

где $\eta = \mathbf{\Omega\Omega}' = \mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\alpha - \alpha')$ – косинус угла реакций, ω_n – коэффициенты, N – порядок разложения. Далее применением теоремы сложения сферических функций $Y_n^l(\mathbf{\Omega})$ [1, с.386], [2, с.184]:

$$P_n(\mathbf{\Omega\Omega}') = \sum_{l=0}^{n} \frac{(n-l)!}{(n+l)!} \frac{2P_n^l(\mu)P_n^l(\mu')}{1+\delta_{0l}} \cos(l[\alpha - \alpha']) = \sum_{l=-n}^{n} \frac{2Y_n^l(\mathbf{\Omega})Y_n^l(\mathbf{\Omega}')}{1+\delta_{0l}}, \tag{5}$$

$$Y_n^l(\mathbf{\Omega}) = \sqrt{\frac{(n-|l|)!}{(n+|l|)!}}\, P_n^{|l|}(\mu) \begin{Bmatrix} \cos l\alpha, & 0 \le l \le n \\ \sin|l|\alpha, & -n \le l \le -1 \end{Bmatrix},$$

$$\int_{4\pi} Y_m^p(\mathbf{\Omega}) Y_n^l(\mathbf{\Omega})\, d\mathbf{\Omega} = 2\pi \frac{1+\delta_{0l}}{2n+1} \delta_{mn}\delta_{pl}$$

одномерный ряд преобразуется в двойной ряд

$$w(\mathbf{\Omega\Omega}') = \sum_{n=0}^{N} \frac{2n+1}{2} \omega_n \sum_{l=-n}^{n} \frac{2Y_n^l(\mathbf{\Omega})Y_n^l(\mathbf{\Omega}')}{1+\delta_{0l}}. \tag{6}$$

Подстановка (6) в (2) дает разложение источника по сферическим функциям:

$$q^s(\varphi) \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{2n+1}{4\pi} \sum_{l=-n}^{n} \frac{2Y_n^l(\mathbf{\Omega})}{1+\delta_{0l}} \int_0^\infty \nu^s(E')\Sigma^s(E')\omega_n(E' \to E) Z_n^l(E', \mathbf{r}, t)\, dE', \tag{7}$$

$$Z_n^l(E', \mathbf{r}, t) = \int_{4\pi} Y_n^l(\mathbf{\Omega}')\varphi(E', \mathbf{\Omega}', \mathbf{r}, t)\, d\mathbf{\Omega}'.$$

Решение уравнений (1), (7) ищется итерациями по значениям моментов Z_n^l.

Ряд (7) есть произведение двух разложений: разложения индикатрисы по многочленам Лежандра и разложения функции распределения частиц по сферическим функциям. Ряд обеспечивает далеко не лучшее приближение к источнику q^s при увеличении порядка разложения *N*. Это особенно заметно при решении задач с преимущественным рассеянием частиц вперед или назад, в которых приходится сильно увеличивать *N*, а следовательно, и трудоемкость численного алгоритма для достижения требуемой точности.

Цель работы состоит в построении разложений источника вторичных частиц $q^s(\varphi)$ по системам симметричных сферических тензоров. Мы не будем ограничивать себя разложениями индикатрисы только по многочленам Лежандра, а источника – только по сферическим функциям. Построенные тензорные разложения не зависят от выбора системы координат. Они удобны для аналитических преобразований и могут применяться для численного решения уравнения переноса. Среди разложений есть разложения, имеющие высокую скорость равномерной сходимости, в частности – разложения по тензорам, порождаемым многочленами Чебышева. Эти разложения целесообразно применять в задачах с преимущественным рассеянием частиц вперед или назад. (Известно, что разложение непрерывной функции в ряд по многочленам Чебышева имеет скорость равномерной сходимости конечных отрезков ряда, которая не более чем в $\ln N$ раз уступает максимально возможной скорости сходимости в классе многочленов [3, с.95,448], [4, с.111], [5].) Также будет найдено разложение источника по сферическим функциям привычного вида (7), представляющее собой произведение разложения функции распределения частиц по сферическим функциям и разложения индикатрисы по многочленам Чебышева.

Степенными моментами распределения называются интегралы

$$\Phi_n^{ijk\ldots}(E,\mathbf{r},t) = \int\limits_{4\pi} \underbrace{\Omega^i\Omega^j\Omega^k\ldots}_{n}\varphi(E,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)d\mathbf{\Omega}, \qquad (8)$$

где $\Omega^i\Omega^j\Omega^k\ldots$ – произведение координат единичного вектора, *n* – степень момента. Для того чтобы не быть привязанным к одной наперед заданной системе координат совокупность моментов одной степени удобно объединить в тензор степенных моментов $\Phi_n^{ijk\ldots}$, где *n* есть степень и одновременно ранг тензора – число координатных индексов. Тензор степенных моментов есть полностью симметричный тензор, который не меняется при перестановке любых двух индексов: $\Phi_n^{ijk\ldots} = \Phi_n^{ikj\ldots} = \Phi_n^{kij\ldots} = \ldots$.

Тензоры вида (8), составленные из моментов одной степени «*n*», не являются единственно возможными тензорными характеристиками распределения частиц. Для расширения понятия степенных моментов (8) в разделе 1 вводятся симметричные сферические тензоры. Устанавливается связь между тензорами и четно-нечетными многочленами одной переменной. В разделе 2 построено общее разложение источника $q^s(\varphi)$ по сферическим тензорам. В разделе 3 изучаются свойства тензорных разложений, порождаемых стандартными системами ортогональных многочленов Гегенбауэра, Лежандра и Чебышева. Раздел 4 посвящен вопросам преобразований и экономизации (уменьшения порядка) разложений. В разделе 5 дана тензорная формулировка системы уравнений для моментов функции распределения.

1. Симметричные сферические тензоры

Объект, компоненты которого – линейные комбинации произведений координат $r^i, r^j, \ldots$ и символов Кронекера δ^{kl}, является тензором относительно группы линейных преобразований координат в трехмерном евклидовом пространстве. Объект не является тензором при общих нелинейных преобразованиях координат. Если выполнить подстановку: $\mathbf{r} = r\boldsymbol{\Omega}$, $r = |\mathbf{r}|$, $|\boldsymbol{\Omega}| = 1$ и рассмотреть группу преобразований вращения системы координат $r = \mathrm{const}$, то компоненты объекта по-прежнему будут меняться по тензорному закону. Сферическим тензором $M_n^{ijk\cdots}(v,\boldsymbol{\Omega})$ будем называть тензор, составленный из произведений координат единичного вектора $\boldsymbol{\Omega}$ и тензоров Кронекера δ^{ij}

$$M_n^{\overbrace{ij\ldots qkl\ldots sh}^{v}}(v,\boldsymbol{\Omega}) = \left[a_n^{(n)} \underbrace{\Omega^i\Omega^j \cdots \Omega^q}_{n} + a_{n-2}^{(n)} \underbrace{\Omega^j \cdots \Omega^p}_{n-2} \delta^{iq} + \ldots + a_0^{(n)} \right] \delta^{kl} \cdots \delta^{sh}.$$

Нижний индекс n обозначает максимальную степень произведения координат, индекс v в списке аргументов обозначает длину набора координатных индексов $i, j, \ldots, q, k, \ldots, s, h$ или ранг тензора. Мы будем отождествлять ковариантные тензоры с нижними и контравариантные тензоры – с верхними координатными индексами. При умножении и свертке тензоров мы будем придерживаться соглашения, подразумевающего суммирование по повторяющимся координатным индексам.

Ограничимся рассмотрением полностью симметричных сферических тензоров с действительными коэффициентами, которые не меняются при перестановке любых двух индексов. Например, $A_2^{ij}(2,\boldsymbol{\Omega}) = 2\Omega^i\Omega^j + 3\delta^{ij}$ есть симметричный сферический тензор $(2,2)$ – второй степени, второго ранга; $B_1^{ijk}(3,\boldsymbol{\Omega}) = \Omega^i\delta^{jk} + \Omega^j\delta^{ik} + \Omega^k\delta^{ij}$ – симметричный сферический тензор первой степени, третьего ранга $(1,3)$. Симметричные сферические тензоры в зависимости от степени (или ранга) суть четно-нечетные функции единичного вектора: $M_n^{ijk\cdots}(v,\boldsymbol{\Omega}) = [\pm 1]^n M_n^{ijk\cdots}(v,\pm\boldsymbol{\Omega})$. При четном ранге $v = 2k$ степень тензора может принимать только четные значения $n = 0, 2, ..., 2k$, при нечетном ранге $v = 2k + 1$ – нечетные значения $n = 1, 3, ..., 2k + 1$.

Произвольный тензор ранга v имеет 3^v компонентов (число слов длины v, составленных из букв трехбуквенного алфавита *x, y, z*). Симметричный тензор имеет не более чем $[v+2][v+1]/2$ отличных друг от друга компонентов (число неупорядоченных наборов координатных индексов). Симметричный сферический тензор степени n, $n \le v$ имеет не более чем $[n+2][n+1]/2$ различных компонентов. Но и среди них есть зависимые компоненты, т.к. модуль аргумента $\mathbf{\Omega}$ равен единице. Если разрешить связь $|\mathbf{\Omega}| = 1$, то совокупность компонентов симметричных сферических тензоров станет эквивалентной совокупности сферических функций Вигнера (обобщенных сферических функций) [6].

Нормированные тензоры. В классе симметричных сферических тензоров можно ввести базис из нормированных тензоров. Однородным сферическим тензором называется тензор, удовлетворяющий соотношению подобия при изменении масштаба координат:

$$M_n^{ijk...}(v, r\mathbf{\Omega}) = r^n M_n^{ijk...}(v, \mathbf{\Omega}). \tag{9}$$

В приведенных примерах $B_1^{ijk}(3, \mathbf{\Omega})$ есть однородный тензор, $A_2^{ij}(2, \mathbf{\Omega})$ – неоднородный тензор. Нормированным тензором $\Omega_n^{ijk...}(v)$ будем называть однородный симметричный сферический тензор, компоненты которого по модулю не превышают единицы. При этом существует вектор $\mathbf{\Omega}$, при котором хотя бы один из компонентов равен единице:

$$\left|\Omega_n^{ijk...}(v)\right| \le 1, \qquad \max_{\mathbf{\Omega}\in 4\pi}\left|\Omega_n^{ijk...}(v)\right| = 1, \qquad |\mathbf{\Omega}| = 1,\ \mathbf{\Omega} \in 4\pi. \tag{10}$$

Можно показать, что существует только один нормированный тензор степени n, ранга v. Простейшими нормированными тензорами являются единица $\Omega_0(0) = 1$ и единичный вектор $\Omega_1^i(1) = \Omega^i$. Остальные тензоры можно получить из простейших умножением на единичный вектор или символ Кронекера и выполнением операции симметризации:

$$\Omega_{n+1}^{ijkl...q}(v+1) = \Omega^i \frac{\Omega_n^{jkl...q}(v)}{v+1} + \Omega^j \frac{\Omega_n^{ikl...q}(v)}{v+1} + ... + \Omega^q \frac{\Omega_n^{ijkl...}(v)}{v+1}, \tag{11}$$

$$\Omega_0^{ijkl...q}(2u+2) = \delta^{ij} \frac{\Omega_0^{kl...q}(2u)}{2u+1} + \delta^{ik} \frac{\Omega_0^{jl...q}(2u)}{2u+1} + ... + \delta^{iq} \frac{\Omega_0^{jkl...}(2u)}{2u+1}.$$

Приведем несколько нормированных тензоров низкого ранга:

$$\Omega_0(0)=1,\quad \Omega_1^i(1)=\Omega^i,\qquad \Omega_2^{ij}(2)=\Omega^i\Omega^j,\quad \Omega_0^{ij}(2)=\delta^{ij}, \tag{12}$$

$$\Omega_3^{ijk}(3)=\Omega^i\Omega^j\Omega^k,\qquad \Omega_1^{ijk}(3)=[\Omega^i\delta^{jk}+\Omega^j\delta^{ik}+\Omega^k\delta^{ij}]/3,$$

$$\Omega_4^{ijkl}(4)=\Omega^i\Omega^j\Omega^k\Omega^l,\qquad \Omega_0^{ijkl}(4)=[\delta^{ij}\delta^{kl}+\delta^{ik}\delta^{jl}+\delta^{il}\delta^{jk}]/3,$$

$$\Omega_2^{ijkl}(4)=[\Omega^i\Omega^j\delta^{kl}+\Omega^i\Omega^k\delta^{jl}+\Omega^i\Omega^l\delta^{jk}+\Omega^j\Omega^k\delta^{il}+\Omega^j\Omega^l\delta^{ik}+\Omega^k\Omega^l\delta^{ij}]/6,$$

$$\Omega_1^{ijklp}(5)=[\Omega^i\Omega_0^{jklp}+\Omega^j\Omega_0^{iklp}+\Omega^k\Omega_0^{ijlp}+\Omega^l\Omega_0^{ijkp}+\Omega^p\Omega_0^{ijkl}]/5,$$

$$\Omega_3^{ijklp}(5)=[\Omega_3^{ijk}\delta^{lp}+\Omega_3^{ijl}\delta^{kp}+\Omega_3^{ijp}\delta^{kl}+\Omega_3^{ikl}\delta^{jp}+\Omega_3^{ikp}\delta^{jl}+\Omega_3^{ilp}\delta^{jk}]/10+$$

$$+[\Omega_3^{jkl}\delta^{ip}+\Omega_3^{jkp}\delta^{il}+\Omega_3^{jlp}\delta^{ik}+\Omega_3^{klp}\delta^{ij}]/10.$$

Нормированные тензоры удовлетворяют правилам свертки:

$$\Omega^k\Omega_n^{ijkl\ldots}(v)=\frac{v-n}{v}\Omega_{n+1}^{ijl\ldots}(v-1)+\frac{n}{v}\Omega_{n-1}^{ijl\ldots}(v-1), \tag{13}$$

$$\delta^{ij}\Omega_n^{ijkl\ldots}(v)=\frac{[v-n][v+n+1]}{v[v-1]}\Omega_n^{kl\ldots}(v-2)+\frac{n[n-1]}{v[v-1]}\Omega_{n-2}^{kl\ldots}(v-2)$$

и правилам бинарной свертки двух тензоров разных аргументов $\mathbf{\Omega},\mathbf{\Theta}\in 4\pi$:

$$(\mathbf{\Omega\Theta})^n=\underbrace{\Omega^i\Omega^j\ldots}_{n}\underbrace{\Theta^i\Theta^j\ldots}_{n}=\Omega_n^{ijk\ldots}(n+2u)\Theta_{n+2u}^{ijk\ldots}(n+2u)= \tag{14}$$

$$=\Omega_{n+2u}^{ijk\ldots}(n+2u)\Theta_n^{ijk\ldots}(n+2u)\qquad n,u=0,1,2,\ldots\,.$$

Приведем несколько правил бинарной свертки в развернутом виде:

$$1=\Omega^i\Omega^j\delta^{ij}=\delta^{ij}\Theta^i\Theta^j=\frac{\delta^{ij}\delta^{kl}+\delta^{ik}\delta^{jl}+\delta^{il}\delta^{jk}}{3}\Theta^i\Theta^j\Theta^k\Theta^l=\ldots, \tag{15}$$

$$(\mathbf{\Omega\Theta})=\Omega^i\Theta^i=\frac{\Omega^i\delta^{jk}+\Omega^j\delta^{ik}+\Omega^k\delta^{ij}}{3}\Theta^i\Theta^j\Theta^k=\ldots\,.$$

Соответствие с классом четно-нечетных многочленов. Четный или нечетный многочлен переменной η есть конечная сумма четных или нечетных степеней переменной:

$$C_n(\eta)=\sum_{s=0}^{\backslash n/2\backslash}a_{n-2s}^{(n)}\eta^{n-2s},\qquad a_n^{(n)}\neq 0,\quad C_n(\eta)=[-1]^nC_n(-\eta). \tag{16}$$

Здесь $n=0,1,2,\ldots$ – степень многочлена, $a_{n-2s}^{(n)}$ – числовые коэффициенты, $\backslash b\backslash$ – целая часть числа b. Поставим в соответствие четному или нечетному многочлену степени n ряд симметричных сферических тензоров с такими же коэффициентами при слагаемых одинаковой степени:

$$C_n^{ijk\ldots}(\nu,\mathbf{\Omega}) = \sum_{s=0}^{\backslash n/2\backslash} a_{n-2s}^{(n)} \Omega_{n-2s}^{ijk\ldots}(\nu), \qquad \nu = n, n+2, n+4, \ldots \tag{17}$$

Тензоры $\Omega_{n-2s}^{ijk\ldots}(\nu)$ играют роль степеней η^{n-2s}. Симметричный сферический тензор $C_n^{ijk\ldots}(n,\mathbf{\Omega})$, ранг которого равен степени $\nu = n$, будем называть *тензором-родителем* для *тензоров-потомков* $\nu > n$.

Наличие коэффициентного соответствия с классом четно-нечетных многочленов позволяет сделать утверждение: любой симметричный сферический тензор степени n, ранга $\nu \geq n$ можно единственным образом разложить в конечную сумму нормированных тензоров (17) той же четности, ранга и степени не выше n.

Теорема сложения (аналог теоремы сложения сферических функций (5)) следует из правил свертки (14). Пусть $C_n(\eta)$ есть четно-нечетный многочлен (16). Выполнив подстановку $\eta = \mathbf{\Omega\Theta}$, получим равенства

$$\begin{aligned} C_n(\mathbf{\Omega\Theta}) &= \sum_{s=0}^{[n/2]} a_{n-2s}^{(n)} (\mathbf{\Omega\Theta})^{n-2s} = \sum_{s=0}^{[n/2]} a_{n-2s}^{(n)} \Omega_{n-2s}^{ijk\ldots}(n-2s) \Theta_{n-2s}^{ijk\ldots}(n-2s) = \\ &= \left[\sum_{s=0}^{[n/2]} a_{n-2s}^{(n)} \Omega_{n-2s}^{ijk\ldots}(n) \right] \Theta_n^{ijk\ldots}(n) = C_n^{ijk\ldots}(n,\mathbf{\Omega}) \Theta_n^{ijk\ldots}(n) = \\ &= \Omega_n^{ijk\ldots}(n) \left[\sum_{s=0}^{[n/2]} a_{n-2s}^{(n)} \Theta_{n-2s}^{ijk\ldots}(n) \right] = \Omega_n^{ijk\ldots}(n) C_n^{ijk\ldots}(n,\mathbf{\Theta}). \end{aligned} \tag{18}$$

Теперь можно расширить определение моментов.

Степенными моментами распределения будем называть компоненты тензора степени n, ранга $\nu = n, n+2, \ldots$, получаемого интегрированием распределения с весом нормированного тензора:

$$\Phi_n^{ijk\ldots}(\nu, E, \mathbf{r}, t) = \int_{4\pi} \Omega_n^{ijk\ldots}(\nu) \varphi(E, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{\Omega}, \qquad \nu = n, n+2, \ldots \tag{19}$$

Компоненты тензора-родителя $\Phi_n^{ijk\ldots}(n, E, \mathbf{r}, t)$, ранг которого равен степени, суть степенные моменты прежнего более узкого определения (8).

Моменты распределения. Пусть дана система независимых четно-нечетных многочленов $C_n(\eta)$, $n = 0,1,2,\ldots$. В соответствии с (16), (17) многочлены порождают систему независимых симметричных сферических тензоров $C_n^{ijk\ldots}(\nu,\mathbf{\Omega})$. Моментами распределения будем называть компоненты симметричного тензора степени n, ранга $v = n, n+2, \ldots$, получаемого интегрированием распределения с весом сферического тензора:

$$\Lambda_n^{ijk\ldots}(v, E, \mathbf{r}, t) = \int\limits_{4\pi} C_n^{ijk\ldots}(v, \mathbf{\Omega})\,\varphi(E, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, t)\, d\mathbf{\Omega}, \qquad v = n, n+2, \ldots . \tag{20}$$

Разложение момента (20) на степенные моменты (19) следует из (17):

$$\Lambda_n^{ijk\ldots}(v, E, \mathbf{r}, t) = \sum_{s=0}^{\backslash n/2 \backslash} a_{n-2s}^{(n)} \Phi_{n-2s}^{ijk\ldots}(v, E, \mathbf{r}, t). \tag{21}$$

2. Тензорные разложения источника частиц

Степенное разложение. Пусть индикатриса $w(\eta)$ есть непрерывная функция на отрезке $-1 < \eta < 1$. Аппроксимируем ее многочленом:

$$w(E' \to E, \eta, \mathbf{r}, t) \approx \sum_{n=0}^{N} f_n(E' \to E, \mathbf{r}, t)\,\eta^n, \qquad f_N \neq 0. \tag{22}$$

Подставив (22) в (2), получим разложение источника частиц по нормированным тензорам:

$$q^s(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{N} \int\limits_0^\infty \nu^s(E')\Sigma^s(E') \int\limits_{4\pi} f_n(E' \to E)(\mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}')^n\, \varphi(E', \mathbf{\Omega}')\, d\mathbf{\Omega}'\, dE' = \tag{23}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{N} \Omega_n^{ijk\ldots}(n) \int\limits_0^\infty \nu^s(E')\Sigma^s(E') f_n(E' \to E)\, \Phi_n^{ijk\ldots}(n, E')\, dE'.$$

В качестве аппроксимирующего многочлена можно пробовать разложение функции в ряд Тейлора или интерполяционный многочлен Лагранжа. Однако в общем случае эти многочлены приближают индикатрису на отрезке $-1 < \eta < 1$ неравномерно. Также они часто нарушают дополнительные свойства индикатрисы, например, ее положительность. Хорошее решение состоит в использовании в качестве (22) многочлена наилучшего равномерного приближения функции $w(\eta)$ [3-5]. К сожалению, задача поиска таких многочленов трудноредаема.

Разложения на основе ортогональных многочленов. На практике в качестве (22) используются конечные отрезки разложения индикатрисы в ряд по системе ортогональных многочленов $C_n(\eta)$, $n = 0, 1, \ldots$. Эти приближения имеют относительно хорошие свойства равномерной сходимости. Мы ограничимся рассмотрением систем четно-нечетных многочленов, которые порождаются четными весовыми функциями $h(\eta) = h(-\eta)$ [2-6]:

$$w(E'\to E,\eta,\mathbf{r},t)\approx\sum_{n=0}^{N}\frac{\omega_n(E'\to E,\mathbf{r},t)}{h_n}C_n(\eta)\,, \tag{24}$$

$$\omega_n(E'\to E,\mathbf{r},t)=\int_{-1}^{1}h(\eta)C_n(\eta)\,w(E'\to E,\eta,\mathbf{r},t)\,d\eta\,,$$

$$C_n(\eta)=[-1]^n C_n(-\eta)\,,\qquad \int_{-1}^{1}h(\eta)C_m(\eta)C_n(\eta)d\mu=h_n\delta_{mn}\,.$$

Здесь ω_n – коэффициенты разложения, h_n – нормировочные множители.

Построим на основе (24) разложения источника частиц $q^s(\varphi)$ по сферическим тензорам. Применим к (24) теорему сложения (18):

$$w(\mathbf{\Omega\Theta})\approx\sum_{n=0}^{N}\frac{\omega_n}{h_n}C_n(\mathbf{\Omega\Theta})=\sum_{n=0}^{N}\frac{\omega_n}{h_n}\sum_{s=0}^{\backslash n/2\backslash}a_{n-2s}^{(n)}[\mathbf{\Omega\Theta}]^{n-2s}=$$

$$=\sum_{n=0}^{N}\frac{\omega_n}{h_n}\left[\sum_{s=0}^{\backslash n/2\backslash}a_{n-2s}^{(n)}\Omega_{n-2s}^{ijk\dots}(n)\right]\Theta_{ijk\dots}^{(n)}(n)=\sum_{n=0}^{N}\frac{\omega_n}{h_n}\Omega_n^{ijk\dots}(n)\left[\sum_{s=0}^{\backslash n/2\backslash}a_{n-2s}^{(n)}\Theta_{n-2s}^{ijk\dots}(n)\right]=$$

$$=\sum_{n=0}^{N}\frac{\omega_n}{h_n}C_n^{ijk\dots}(n,\mathbf{\Omega})\Theta_n^{ijk\dots}(n)=\sum_{n=0}^{N}\frac{\omega_n}{h_n}\Omega_n^{ijk\dots}(n)C_n^{ijk\dots}(n,\mathbf{\Theta})\,.$$

Тензоры $C_n^{ijk\dots}(n,\mathbf{\Omega})$, $C_n^{ijk\dots}(n,\mathbf{\Theta})$ имеют одинаковые коэффициенты с многочленом $C_n(\mu)$. Подставив разложение в (2), получим два союзных разложения источника частиц по системе симметричных тензоров:

$$q^s(\varphi)=\sum_{n=0}^{N}\frac{C_n^{ijk\dots}(n,\mathbf{\Omega})}{2\pi h_n}\int_0^\infty \nu^s\Sigma^s(E',\mathbf{r},t)\omega_n(E'\to E,\mathbf{r},t)\Phi_n^{ijk\dots}(E',\mathbf{r},t)dE'\,, \tag{25}$$

$$q^s(\varphi)=\sum_{n=0}^{N}\frac{\Omega_n^{ijk\dots}(n)}{2\pi h_n}\int_0^\infty \nu^s\Sigma^s(E',\mathbf{r},t)\omega_n(E'\to E,\mathbf{r},t)\Lambda_n^{ijk\dots}(n,E',\mathbf{r},t)dE'\,,$$

$$C_n^{ijk\dots}(n,\mathbf{\Omega})=\sum_{s=0}^{\backslash n/2\backslash}a_{n-2s}^{(n)}\Omega_{n-2s}^{ijk\dots}(n)\,,\qquad \Lambda_n^{ijk\dots}(n,E')=\int_{4\pi}C_n^{ijk\dots}(n,\mathbf{\Theta})\,\varphi(\mathbf{\Theta},E')d\mathbf{\Theta}\,.$$

3. Стандартные тензорные разложения источника

Многочлены и тензоры Гегенбауэра. Рассмотрим классическую систему четно-нечетных ортогональных многочленов Гегенбауэра $C_n(\lambda;\mu)$

$$h(\lambda;\eta)=\frac{1}{[1-\eta^2]^{1/2-\lambda}}\,,\qquad \lambda>-\frac{1}{2}\,, \tag{26}$$

$$\int_{-1}^{1} h(\lambda;\eta)C_k(\lambda;\eta)C_n(\lambda;\eta)d\eta = h_n(\lambda)\delta_{kn}, \qquad h_n(\lambda) = \frac{2^{1-2\lambda}\pi\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma^2(\lambda)[n+\lambda]\Gamma(n+1)}.$$

Многие свойства тензоров $C_n^{ijk\dots}(\lambda;v,\mathbf{\Omega})$, $\Lambda_n^{ijk\dots}(\lambda;v,\mathbf{r},t)$ можно получить из известных свойств многочленов. Система Гегенбауэра замечательна тем, что для коэффициентов многочленов имеются явные формулы [2-6]:

$$C_n(\lambda;\eta) = \sum_{s=0}^{\backslash n/2 \backslash} a_{n-2s}^{(n)}(\lambda)\eta^{n-2s}, \quad a_{n-2s}^{(n)}(\lambda) = \frac{[-1]^s 2^{n-2s}\Gamma(n-s+\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(s+1)\Gamma(n-2s+1)}, \qquad (27)$$

$$C_0(\lambda;\eta) = 1, \quad C_1(\lambda;\eta) = 2\lambda\eta, \quad C_2(\lambda;\eta) = 2\lambda[1+\lambda]\eta^2 - \lambda, \; \dots$$

$$\left\{ C_n^{ijk\dots}(\lambda;v,\mathbf{\Omega}), \quad \Lambda_n^{ijk\dots}(\lambda;v,E,\mathbf{r}) \right\} = \sum_{s=0}^{\backslash n/2 \backslash} a_{n-2s}^{(n)}(\lambda) \left\{ \Omega_{n-2s}^{ijk\dots}(v), \quad \Phi_{n-2s}^{ijk\dots}(v,E,\mathbf{r}) \right\}.$$

Разложения индикатрисы и источника частиц даются формулами (24),(25).

Многочлены (тензоры) Лежандра $P_n(\mu)$ есть многочлены (тензоры) Гегенбауэра при $\lambda = 1/2$:

$$h(1/2;\eta) = 1, \qquad \int_{-1}^{1} P_k(\eta)P_n(\eta)d\mu = \frac{2\delta_{kn}}{2n+1}, \qquad h_n(1/2) = \frac{2}{2n+1}, \qquad (28)$$

$$P_n(\eta) = \sum_{s=0}^{\backslash n/2 \backslash} a_{n-2s}^{(n)}(1/2)\eta^{n-2s}, \quad a_{n-2s}^{(n)}(1/2) = \frac{[-1]^s 2^{n-2s}\Gamma(n-s+1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(s+1)\Gamma(n-2s+1)},$$

$$\left\{ P_n^{ijk\dots}(v,\mathbf{\Omega}), \quad \Psi_n^{ijk\dots}(v,\mathbf{r}) \right\} = \sum_{s=0}^{\backslash n/2 \backslash} a_{n-2s}^{(n)}(1/2) \left\{ \Omega_{n-2s}^{ijk\dots}(v), \quad \Phi_n^{ijk\dots}(v,\mathbf{r}) \right\}.$$

Таблица 1. Многочлены и сферические тензоры Лежандра.

Многочлен Лежандра	Тензоры Лежандра
$P_0(\eta) = 1$	$P_0(0,\mathbf{\Omega}) = \Omega_0(0) = 1$, $\quad P_0^{ijk\dots}(2u,\mathbf{\Omega}) = \Omega_0^{ijk\dots}(2u)$
$P_1(\eta) = \eta$	$P_1^i(1,\mathbf{\Omega}) = \Omega_1^i(1) = \Omega^i$, $\quad P_1^{ijk\dots}(2u+1,\mathbf{\Omega}) = \Omega_1^{ijk\dots}(2u+1)$
$P_2(\eta) = \frac{3}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}$	$P_2^{ij}(2,\mathbf{\Omega}) = \frac{3}{2}\Omega_2^{ij}(2) - \frac{1}{2}\Omega_0^{ij}(2) = \frac{3}{2}\Omega^i\Omega^j - \frac{\delta^{ij}}{2}$, $P_2^{ijk\dots}(2u+2,\mathbf{\Omega}) = \frac{3}{2}\Omega_2^{ijk\dots}(2u+2) - \frac{1}{2}\Omega_2^{ijk\dots}(2u+2)$
$P_3(\eta) = \frac{5}{2}\eta^3 - \frac{3}{2}\eta$	$P_3^{ijk\dots}(2u+3,\mathbf{\Omega}) = \frac{5}{2}\Omega_3^{ijk\dots}(2u+3) - \frac{3}{2}\Omega_1^{ijk\dots}(2u+3)$
$P_4(\eta) = \frac{35}{8}\eta^4 - \frac{30}{8}\eta^2 + \frac{3}{8}$	$P_4^{ijk\dots}(v,\mathbf{\Omega}) = \frac{35}{8}\Omega_4^{ijk\dots}(v) - \frac{30}{8}\Omega_2^{ijk\dots}(v) + \frac{3}{8}\Omega_0^{ijk\dots}(v)$, $v = 2u+4$

Свойства тензоров Лежандра следуют из (13), (28). Свертка тензора-родителя (n,n) с единичным вектором дает тензор-родитель рангом ниже:

$$\Omega^k P_n^{ijk\ldots}(n,\mathbf{\Omega}) = P_{n-1}^{ij\ldots}(n-1,\mathbf{\Omega}), \qquad n \ge 1.$$

Свертка тензора-потомка по любой паре индексов пропорциональна тензору-потомку на два ранга ниже. Свертка тензора-родителя по любой паре индексов равна нулю:

$$\delta^{jk} P_n^{ijkl\ldots}(\nu,\mathbf{\Omega}) = \frac{[\nu-n][\nu+n+1]}{\nu[\nu-1]} P_n^{il\ldots}(\nu-2,\mathbf{\Omega}), \quad \delta^{jk} P_n^{ijkl\ldots}(n,\mathbf{\Omega}) = 0, \tag{29}$$

$$\delta^{jk} \Psi_n^{ijkl\ldots}(\nu,E,\mathbf{r}) = \frac{[\nu-n][\nu+n+1]}{\nu[\nu-1]} \Psi_n^{il\ldots}(\nu-2,E,\mathbf{r}), \quad \delta^{jk} \Psi_n^{ijkl\ldots}(n,E,\mathbf{r}) = 0.$$

Важно отметить, что тензоры-родители суть тензоры-девиаторы с равным нулю следом. Разложения индикатрисы и источника частиц по многочленам и тензорам Лежандра получаются подстановкой (28) в (24), (25):

$$q^s(\varphi) \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{2n+1}{4\pi} P_n^{ijk\ldots}(n,\mathbf{\Omega}) \int_0^\infty \nu^s \Sigma^s(E',\mathbf{r}) \omega_n(E' \to E,\mathbf{r}) \Phi_n^{ijk\ldots}(n,E',\mathbf{r}) dE' \approx \tag{30}$$

$$\approx \sum_{n=0}^{N} \frac{2n+1}{4\pi} \Omega_n^{ijk\ldots}(n) \int_0^\infty \nu^s \Sigma^s(E',\mathbf{r}) \omega_n(E' \to E,\mathbf{r}) \Psi_n^{ijk\ldots}(n,E',\mathbf{r}) dE' \approx$$

$$\approx \sum_{n=0}^{N} \frac{2n+1}{4\pi} \frac{P_n^{ijk\ldots}(\mathbf{\Omega})}{a_n^{(n)}} \int_0^\infty \nu^s \Sigma^s(E',\mathbf{r}) \omega_n(E' \to E,\mathbf{r}) \Psi_n^{ijk\ldots}(n,E',\mathbf{r}) dE'.$$

Третье разложение в (30) следует из равенства нулю следа моментов-девиаторов (29). Разложения (30) эквивалентны разложению индикатрисы и источника по системе сферических функций (6), (7).

Если в (2), (30) положить $w(\eta) = \delta(\eta-1)\delta(E'-E)$, то мы получим разложения функции распределения частиц по тензорам Лежандра:

$$\varphi(E,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} P_n^{ijk\ldots}(n,\mathbf{\Omega}) \Phi_n^{ijk\ldots}(n,E,\mathbf{r},t) \simeq \tag{31}$$

$$\simeq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \Omega_n^{ijk\ldots}(n) \Psi_n^{ijk\ldots}(n,E,\mathbf{r},t) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \frac{P_n^{ijk\ldots}(n,\mathbf{\Omega})}{a_n^{(n)}} \Psi_n^{ijk\ldots}(n,E,\mathbf{r},t).$$

Система многочленов и тензоров Лежандра отличается простотой и наличием тензорного разложения функции распределения (31).

Многочлены (тензоры) Чебышева $T_n(\mu)$ – многочлены (тензоры) Гегенбауэра при $\lambda = 0$ (см.[2, с.186], [4, с.19]):

$$h(0,\eta)=\frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}\,,\qquad \int\limits_{-1}^{1}\frac{T_k(\eta)T_n(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}d\eta=h_n(0)\delta_{kn}\qquad h_n(0)=\frac{\pi}{2}[1+\delta_{0n}]\,. \qquad (32)$$

$$T_n(\eta)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\Gamma(\lambda)[n+\lambda]}{2}C_n(\lambda,\eta)=\cos(n\arccos\eta)=\sum_{s=0}^{\backslash n/2\backslash}a_{n-2s}^{(n)}\eta^{n-2s}\,,$$

$$a_{n-2s}^{(n)}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\Gamma(\lambda)[n+\lambda]}{2}a_{n-2s}^{(n)}(\lambda)=\frac{[-1]^s 2^{n-2s-1}n\Gamma(n-s)}{\Gamma(s+1)\Gamma(n-2s+1)}\,,$$

$$\left\{T_n^{ijk\cdots}(v,\mathbf{\Omega}),\quad \tau_n^{ijk\cdots}(v,\mathbf{r})\right\}=\sum_{s=0}^{\backslash n/2\backslash}a_{n-2s}^{(n)}\left\{\Omega_{n-2s}^{ijk\ldots}(v),\quad \Phi_{n-2s}^{ijk\ldots}(v,\mathbf{r})\right\}.$$

Таблица 2. Многочлены и сферические тензоры Чебышева.

Многочлен Чебышева	Тензоры Чебышева
$T_0(\eta)=1$	$T_0(0,\mathbf{\Omega})=\Omega_0(0)=1$, $T_0^{ijk\cdots}(2u,\mathbf{\Omega})=\Omega_0^{ijk\cdots}(2u)$
$T_1(\eta)=\eta$	$T_1^i(1,\mathbf{\Omega})=\Omega_1^i(1)=\Omega^i$, $T_1^{ijk\cdots}(2u+1,\mathbf{\Omega})=\Omega_1^{ijk\cdots}(2u+1)$
$T_2(\eta)=2\eta^2-1$	$T_2^{ijk\cdots}(2u+2,\mathbf{\Omega})=2\Omega_2^{ijk\cdots}(2u+2)-\Omega_2^{ijk\cdots}(2u+2)$
$T_3(\eta)=4\eta^3-3\eta$	$T_3^{ijk\cdots}(2u+3,\mathbf{\Omega})=4\Omega_3^{ijk\cdots}(2u+3)-3\Omega_1^{ijk\cdots}(2u+3)$
$T_4(\eta)=8\eta^4-8\eta^2+1$	$T_4^{ijk\cdots}(v,\mathbf{\Omega})=8\Omega_4^{ijk\cdots}(v)-8\Omega_2^{ijk\cdots}(v)+\Omega_0^{ijk\cdots}(v)$, $v=2u+4$

Свойства сферических тензоров Чебышева следуют из (13),(32). Свертка тензора-родителя с единичным вектором дает тензор рангом ниже; свертка тензора по двум индексам есть тензор Чебышева второго рода $U_{n-2}^{ij\cdots}$ (сферический тензор Гегенбауэра, $\lambda=1$):

$$\Omega_k T_n^{ijk\cdots}(n,\mathbf{\Omega})=T_{n-1}^{ij\cdots}(n-1,\mathbf{\Omega})\,,\qquad n\geq 1\,, \qquad (33)$$

$$\delta^{kl}T_n^{ijkl\cdots}(n,\mathbf{\Omega})=-\frac{U_{n-2}^{ij\cdots}(n-2,\mathbf{\Omega})}{n-1},\qquad \delta^{kl}\tau_n^{ijkl\cdots}(n,\mathbf{r})=-\frac{\Lambda_n^{ijkl\cdots}(1;n-2,\mathbf{r})}{n-1}\,.$$

Разложения источника частиц по многочленам и тензорам Чебышева получаются подстановкой (32) в (24), (25):

$$q^s(\varphi)\approx\sum_{n=0}^{N}\frac{T_n^{ijk\cdots}(n,\mathbf{\Omega})}{\pi^2[1+\delta_{0n}]}\int\limits_0^\infty \nu^s\Sigma^s(E',\mathbf{r},t)\omega_n(E'\to E,\mathbf{r},t)\Phi_n^{ijk\cdots}(n,E',\mathbf{r},t)dE'\approx \qquad (34)$$

$$\approx\sum_{n=0}^{N}\frac{\Omega_n^{ijk\cdots}(n)}{\pi^2[1+\delta_{0n}]}\int\limits_0^\infty \nu^s\Sigma^s(E',\mathbf{r},t)\omega_n(E'\to E,\mathbf{r},t)\tau_n^{ijk\cdots}(n,E',\mathbf{r},t)dE'\,,$$

$$\omega_n(E' \to E, \mathbf{r}, t) = \int_{-1}^{1} \frac{w(E' \to E, \eta, \mathbf{r}, t) T_n(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta.$$

Если рассматривать функции $w(E' \to E, \eta, \mathbf{r}, t)$ широкого класса, меняющиеся в пространстве, во времени или от задачи к задаче, то скорость сходимости разложения (24) и разложений источника (25) может меняться в зависимости от изменений функции и выбора системы многочленов. Система многочленов Чебышева отличается тем, что она имеет устойчиво высокую скоростью равномерной сходимости при увеличении порядка N. При разложении ограниченной, непрерывной на отрезке $[-1,1]$ функции скорость сходимости не более чем в $\ln N$ раз уступает максимально возможной скорости в классе многочленов [3, с.95, 448], [4, с.111].

Сравнение скорости сходимости на примере индикатрисы Хеньи-Гринстейна. В качестве примера рассмотрим индикатрису Хеньи-Гринстейна, которая часто применяется для моделирования преимущественного рассеяния фотонов вперед-назад:

$$w(\eta) = \frac{[1-\gamma][1-g^2]}{2[1-2g\eta+g^2]^{3/2}} + \frac{\gamma[1-g^2]}{2[1+2g\eta+g^2]^{3/2}}, \qquad 0 \le g < 1. \tag{35}$$

Чем ближе к единице параметр g, тем выше анизотропия рассеяния. При $g = 0$ рассеяние изотропно. Параметр γ, $0 \le \gamma \le 1$, задает вес рассеяния назад. При $\gamma = 0$ рассеяние происходит преимущественно вперед $\eta \approx 1$. Разложение индикатрисы по многочленам Лежандра:

$$w(\eta) \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{2n+1}{2} \omega_n P_n(\eta), \quad \omega_n = \int_{-1}^{1} w(\mu) P_n(\mu) d\mu = \left[1-\gamma+[-1]^n\gamma\right] g^n. \tag{36}$$

Разложение индикатрисы по многочленам Чебышева:

$$w(\eta) \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{2\varepsilon_n}{\pi[1+\delta_{0n}]} T_n(\eta), \qquad \varepsilon_n = \sum_{k=0}^{\infty} D_{nk}\omega_{n+2k}, \tag{37}$$

$$D_{nk} = \frac{[n+2k+1/2]\Gamma(k+1/2)\Gamma(n+k+1/2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)}.$$

Оценим скорость сходимости разложений (36), (37) с помощью отношения максимума n-й гармоники к первой гармонике соответствующего ряда:

$$K_{2n}(g) = [4n+1]\frac{\omega_{2n}}{\omega_0} = [4n+1]g^{2n}, \qquad K_{2n}(g) = \frac{2}{1+\delta_{0n}} \frac{\varepsilon_{2n}}{\varepsilon_0}.$$

Значения отношений приведены в табл.3 и табл.4.

Таблица 3. Значения $K_{2n}(g)$ для разложения по многочленам Лежандра.

g \ n	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
0.85	1.00	3.61	4.70	4.90	4.63	4.13	3.56	2.98	2.45	1.98	1.59
0.80	1.00	3.20	3.69	3.41	2.85	2.25	1.72	1.28	0.93	0.67	0.47
0.70	1.00	2.45	2.16	1.53	0.98	0.59	0.35	0.20	0.11	0.06	0.03
0.60	1.00	1.80	1.17	0.61	0.29	0.13	0.05	0.02	0.01		
0.50	1.00	1.25	0.56	0.20	0.07	0.02	0.01				
0.40	1.00	0.80	0.23	0.05	0.01						
0.30	1.00	0.45	0.07	0.01							
0.20	1.00	0.20	0.01								
0.10	1.00	0.05									
0.00	1.00										

g \ n	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
0.85	1.26	0.99	0.77	0.60	0.47	0.36	0.27	0.21	0.16	0.12
0.80	0.33	0.23	0.16	0.11	0.08	0.05	0.03	0.02	0.02	0.01
0.70	0.02	0.01								

Таблица 4. Значения $K_{2n}(g)$ для разложения по многочленам Чебышева.

g \ n	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
0.85	1.00	1.80	1.50	1.21	0.96	0.75	3.56	0.44	2.45	0.25	0.19
0.80	1.00	1.68	1.28	0.92	0.65	0.45	1.72	0.21	0.34	0.10	0.06
0.70	1.00	1.41	0.85	0.48	0.26	0.14	0.35	0.04	0.14	0.01	0.01
0.60	1.00	1.12	0.50	0.21	0.09	0.03	0.05	0.01	0.02		
0.50	1.00	0.82	0.26	0.08	0.02	0.01	0.01				
0.40	1.00	0.55	0.11	0.02							
0.30	1.00	0.32	0.04								
0.20	1.00	0.15	0.01								
0.10	1.00	0.04									
0.00	1.00										

Как видим, при высокой анизотропии рассеяния разложение по многочленам Чебышева сходится в полтора-два раза быстрее разложения по многочленам Лежандра. Поэтому при решении задач переноса излучений в веществе с преимущественным рассеянием вперед или назад целесообразно пользоваться разложением индикатрисы по многочленам Чебышева.

Формулы преобразования многочленов и тензоров в конечную сумму многочленов и тензоров другой системы. В заключение раздела приведем ряд полезных вспомогательных формул, с помощью которых в следующем разделе будут выполнены преобразования разложений из одной системы классических многочленов в другую.

1. Разложение многочлена (тензора) Гегенбауэра системы λ в конечную сумму многочленов (тензоров) системы ξ:

$$\left\{\begin{matrix} C_n(\lambda;\eta), C_n^{ijk\ldots}(\lambda;\nu,\mathbf{\Omega}) \\ \Lambda_n^{ijk\ldots}(\lambda;\nu,\mathbf{r},t) \end{matrix}\right\} = \sum_{s=0}^{\backslash n/2\backslash} d_{n-2s}^{(n)}(\lambda\to\xi) \left\{\begin{matrix} C_{n-2s}(\xi;\eta), C_{n-2s}^{ijk\ldots}(\xi;\nu,\mathbf{\Omega}) \\ \Lambda_{n-2s}^{ijk\ldots}(\xi;\nu,\mathbf{r},t) \end{matrix}\right\}, \quad (38)$$

$$d_{n-2s}^{(n)}(\lambda\to\xi) = \frac{\Gamma(\xi)[n-2s+\xi]\Gamma(s+\lambda-\xi)\Gamma(n-s+\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\lambda-\xi)\Gamma(s+1)\Gamma(n-s+\xi+1)}$$

[8, с.566, 570] (после преобразования). Разложения многочлена и тензора Лежандра следуют из (38), если положить $\lambda,\xi = 1/2$.

2. Разложение многочлена (тензора) Гегенбауэра системы λ в конечную сумму многочленов (тензоров) Чебышева:

$$\left\{\begin{matrix} C_n(\lambda;\eta) \\ C_n^{ijk\ldots}(\lambda;\nu,\mathbf{\Omega}) \\ \Lambda_n^{ijk\ldots}(\lambda;\nu,\mathbf{r}) \end{matrix}\right\} = \sum_{s=0}^{\backslash n/2\backslash} d_{n-2s}^{(n)} \left\{\begin{matrix} T_{n-2s}(\eta) \\ T_{n-2s}^{ijk\ldots}(\nu,\mathbf{\Omega}) \\ \tau_{n-2s}^{ijk\ldots}(\nu,\mathbf{r}) \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{n} e_{|n-2s|}^{(n)} \left\{\begin{matrix} T_{|n-2s|}(\eta) \\ T_{|n-2s|}^{ijk\ldots}(\nu,\mathbf{\Omega}) \\ \tau_{|n-2s|}^{ijk\ldots}(\nu,\mathbf{r}) \end{matrix}\right\}, \quad (39)$$

$$d_{n-2s}^{(n)}(\lambda\to 0) = \frac{e_{n-2s}^{(n)}}{1+\delta_{2s,n}}, \qquad e_{n-2s}^{(n)} = \frac{2\Gamma(s+\lambda)\Gamma(n-s+\lambda)}{\Gamma^2(\lambda)\Gamma(s+1)\Gamma(n-s+1)}$$

[2, с.177,181], [3, с.121,263], [5, с.103,105], [7, с.517]. Разложения многочлена (тензора) Лежандра следуют из (39), если положить $\lambda = 1/2$.

3. Подстановка (5) в (38) дает разложение по сферическим функциям:

$$C_n(\lambda;\mathbf{\Omega\Omega}') = \sum_{s=0}^{\backslash n/2\backslash} d_{n-2s}^{(n)}(\lambda\to 1/2) \sum_{|l|\le n-2s} \frac{2Y_{n-2s}^{l}(\mathbf{\Omega})Y_{n-2s}^{l}(\mathbf{\Omega}')}{1+\delta_{0l}}, \quad (40)$$

$$d_{n-2s}^{(n)}(\lambda\to 1/2) = \frac{\Gamma(1/2)[n-2s+1/2]\Gamma(s+\lambda-1/2)\Gamma(n-s+\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\lambda-1/2)\Gamma(s+1)\Gamma(n-s+3/2)}.$$

4. Разложение многочлена и тензора Чебышева ($\lambda = 0$) в конечную сумму многочленов, тензоров Гегенбауэра системы ξ следует из (32),(38):

$$\left\{\begin{matrix} T_n(\eta) \\ T_n^{ijk\ldots}(\nu,\mathbf{\Omega}) \\ \tau_{ijk\ldots}^{(n)}(\nu,\mathbf{r},t) \end{matrix}\right\} = [1+\delta_{0n}] \sum_{s=0}^{\backslash n/2\backslash} d_{n-2s}^{(n)}(0\to\xi) \left\{\begin{matrix} C_{n-2s}(\xi;\eta) \\ C_{n-2s}^{ijk\ldots}(\xi;\eta) \\ \Lambda_{ijk\ldots}^{(n-2s)}(\xi;\eta,\mathbf{r},t) \end{matrix}\right\}, \quad (41)$$

$$d_{n-2s}^{(n)}(0 \to \xi) = \frac{n[n-2s+\xi]\Gamma(\xi)\Gamma(s-\xi)\Gamma(n-s)}{2\Gamma(-\xi)\Gamma(s+1)\Gamma(n-s+\xi+1)}.$$

5. Подстановка (5) в (41) дает разложение по сферическим функциям:

$$T_n(\mathbf{\Omega\Omega}') = [1+\delta_{0n}] \sum_{s=0}^{\backslash n/2 \backslash} d_{n-2s}^{(n)}(0 \to 1/2) \sum_{|l| \le n-2s} \frac{2Y_{n-2s}^l(\mathbf{\Omega})Y_{n-2s}^l(\mathbf{\Omega}')}{1+\delta_{0l}}. \quad (42)$$

Более полный перечень формул преобразования приведен в [9].

4. Преобразование и экономизация разложений

В разделе изложен метод экономизации (уменьшения порядка) разложения источника частиц с помощью преобразований разложений.

Пусть известны коэффициенты $\omega_n(\lambda)$, $0 \le n \le N$, разложения индикатрисы в ряд (24) по многочленам Гегенбауэра $C_n(\lambda;\eta)$ системы λ. С помощью конечных сумм (38)-(41) можно вычислить коэффициенты $\varepsilon_n(\xi)$ разложения индикатрисы по многочленам $C_n(\xi;\eta)$ системы $\xi \ne \lambda$. Подставим (38), (39) в (24) и поменяем местами порядок суммирования:

$$w(\eta) \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{\omega_n(\lambda)}{h_n(\lambda)} C_n(\lambda;\eta) \underset{\lambda \to \xi}{\approx} \sum_{n=0}^{N} \frac{\varepsilon_n(\xi)}{h_n(\xi)} \begin{Bmatrix} C_n(\xi;\eta) \\ T_n(\eta), \quad \xi = 0 \end{Bmatrix}. \quad (43)$$

Аналогично преобразуется разложение по многочленам Чебышева:

$$w(\eta) \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{2\omega_n}{\pi[1+\delta_{0n}]} T_n(\eta) \underset{0 \to \xi}{\approx} \sum_{n=0}^{N} \frac{\varepsilon_n(\xi)}{h_n(\xi)} C_n(\xi;\eta). \quad (44)$$

Коэффициенты преобразованного разложения вычисляются по формулам:

$$\varepsilon_n(\xi) = \sum_{k=0}^{\backslash [N-n]/2 \backslash} D_{nk}(\lambda \to \xi)\omega_{n+2k}(\lambda), \quad (45)$$

$$D_{nk}(\lambda \to \xi) = \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(n+2\xi)[n+2k+\lambda]\Gamma(k+\lambda-\xi)\Gamma(n+k+\lambda)\Gamma(n+2k+1)}{2^{2\xi-2\lambda}\Gamma(\xi)\Gamma(\lambda-\xi)\Gamma(n+1)\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+\xi+1)\Gamma(n+2k+2\lambda)},$$

$$D_{nk}(\lambda \to 0) = \frac{\pi e_n^{(n+2k)}}{2h_{n+2k}(\lambda)} = \frac{[n+2k+\lambda]\Gamma(k+\lambda)\Gamma(n+k+\lambda)\Gamma(n+2k+1)}{2^{1-2\lambda}\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)\Gamma(n+2k+2\lambda)},$$

$$D_{nk}(0 \to \xi) = -\frac{\xi \sin(\pi\xi)\Gamma(n+2\xi)}{2^{2\xi-1}\pi\Gamma(n+1)} \frac{[n+2k]\Gamma(k-\xi)\Gamma(n+k)}{[1+\delta_{0,n+k}]\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+\xi+1)},$$

$$D_{nk}(0 \to 1/2) = -\frac{1}{2\pi} \frac{[n+2k]\Gamma(k-1/2)\Gamma(n+k)}{[1+\delta_{0,n+k}]\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+3/2)}.$$

Элементы матрицы перехода D_{nk} легко вычисляются в программах Excel, MathLab, Mathematica. После выполнения преобразования необходимо подправить первый коэффициент разложения $\varepsilon_0(\xi)$ так, чтобы выполнялась нормировка (3), обеспечивающая выполнение закона сохранения частиц.

Подстановка (43), (44) в источник частиц (2) и применение соответствия между многочленами и симметричными сферическими тензорами (16)-(18) дают разложения:

$$q^s(\varphi) \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{C_n^{ijk\dots}(\xi;n,\mathbf{\Omega})}{2\pi h_n(\xi)} \int_0^\infty \nu^s \Sigma^s(E',\mathbf{r})\varepsilon_n(E' \to E,\mathbf{r})\Phi_n^{ijk\dots}(E',\mathbf{r})dE' \approx \quad (46)$$

$$\approx \sum_{n=0}^{N} \frac{\Omega_n^{ijk\dots}(n)}{2\pi h_n(\xi)} \int_0^\infty \nu^s \Sigma^s(E',\mathbf{r})\varepsilon_n(E' \to E,\mathbf{r})\Lambda_n^{ijk\dots}(\xi;n,E',\mathbf{r})dE' .$$

В случае преобразования $\lambda \to 1/2$:

$$q^s(\varphi) \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{2n+1}{4\pi} P_n^{ijk\dots}(n,\mathbf{\Omega}) \int_0^\infty \nu^s \Sigma^s(E',\mathbf{r})\varepsilon_n(E' \to E,\mathbf{r})\Phi_n^{ijk\dots}(E',\mathbf{r})dE' \approx \quad (47)$$

$$\approx \sum_{n=0}^{N} \frac{2n+1}{4\pi} \Omega_n^{ijk\dots}(n) \int_0^\infty \nu^s \Sigma^s(E',\mathbf{r})\varepsilon_n(E' \to E,\mathbf{r})\Psi_n^{ijk\dots}(n,E',\mathbf{r})dE' \approx$$

$$\approx \sum_{n=0}^{N} \frac{2n+1}{4\pi} \frac{P_n^{ijk\dots}(\mathbf{\Omega})}{a_n^{(n)}} \int_0^\infty \nu^s \Sigma^s(E',\mathbf{r})\varepsilon_n(E' \to E,\mathbf{r})\Psi_n^{ijk\dots}(n,E',\mathbf{r})dE' .$$

Использование теоремы сложения сферических функций (5), (6) дает разложение по сферическим функциям

$$q^s(\varphi) \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{2n+1}{4\pi} \sum_{l=-n}^{n} \frac{2Y_n^l(\mathbf{\Omega})}{1+\delta_{0l}} \int_0^\infty \nu^s \Sigma^s(E',\mathbf{r})\varepsilon_n(E' \to E,\mathbf{r})Z_n^l(E',\mathbf{r})dE' . \quad (48)$$

На первый взгляд (46)-(48) не отличаются от разложений (25), (30), (7). Однако это не так. Разложения (46)-(48) имеют порядок *N*, который равен порядку исходного разложения индикатрисы (43) по системе $C_n(\eta,\lambda)$ или разложения (44) по системе $T_n(\eta)$. Коэффициенты преобразованного разложения ε_n суть комбинации (45) исходных коэффициентов ω_n. Поэтому в случае преобразования $\lambda = 0 \to \xi = 1/2$ разложение (47) есть произведение разложения индикатрисы по многочленам Чебышева и разложения распределения частиц по тензорам Лежандра (31).

Выбор удачного разложения индикатрисы (например, по системе Чебышева) позволяет уменьшать порядок конечных разложений (46)-(48). Данный метод аналогичен известному методу экономизации степенных рядов с помощью их преобразования в разложение по системе Чебышева.

5. Система уравнений для степенных моментов

В разделе дана тензорная формулировка системы уравнений для степенных моментов функции распределения частиц. Решение системы уравнений дает альтернативный способ нахождения распределения частиц. Функция распределения частиц восстанавливается по формуле (31).

Если умножать уравнение переноса частиц (1) на компоненты сферических тензоров Лежандра $P_n^{ijk...}(n,\mathbf{\Omega})$ и интегрировать результат по угловым переменным, мы получим бесконечную систему уравнений для степенных моментов-девиаторов $\Psi_n^{ijk...}(n)$ (29):

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\Psi_0}{\partial t}+\frac{\partial\Psi_1^i}{\partial r^i}+\Sigma\Psi_0=F_0+S_0, \tag{49}$$

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\Psi_1^i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r^j}\left[\frac{2}{3}\Psi_2^{ij}+\Psi_0\frac{\delta^{ij}}{3}\right]+\Sigma\Psi_1^i=S_1^i,$$

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\Psi_2^{ij}}{\partial t}+\frac{3}{5}\frac{\partial\Psi_3^{ijk}}{\partial r^k}+\frac{\partial}{\partial r^k}\left[\frac{3}{5}\frac{\Psi_1^i\delta^{jk}+\Psi_1^j\delta^{ik}}{2}-\frac{2}{5}\frac{\Psi_1^k\delta^{ij}}{2}\right]+\Sigma\Psi_2^{ij}=S_2^{ij},$$

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\Psi_3^{ijk}}{\partial t}+\frac{4}{7}\frac{\partial\Psi_4^{ijkl}}{\partial r^l}+\frac{5}{7}\frac{\partial}{\partial r^l}\frac{\Psi_2^{ij}\delta^{kl}+\Psi_2^{ik}\delta^{jl}+\Psi_2^{jk}\delta^{il}}{3}-$$

$$-\frac{2}{7}\frac{\partial}{\partial r^l}\frac{\Psi_2^{il}\delta^{jk}+\Psi_2^{jl}\delta^{ik}+\Psi_2^{kl}\delta^{ij}}{3}+\Sigma\Psi_3^{ijk}=S_3^{ijk},\dots .$$

Правые части уравнений равны:

$$S_n^{ijk...}=\int_0^\infty \nu^s\Sigma^s(E',\mathbf{r},t)\omega_n(E'\to E,\mathbf{r},t)\Psi_n^{ijkl}(n,E',\mathbf{r},t)\,dE'+ \tag{50}$$

$$+\int_{4\pi} P_n^{ijk...}(n,\mathbf{\Omega})\,q^{ext}(E,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)d\mathbf{\Omega}.$$

При применении метода экономизации разложений коэффициенты ω_n заменяются на коэффициенты ε_n (45).

Замыкание системы уравнений (49) производится в пренебрежении моментами $\Psi_n^{ijk...}$ с номерами $n\ge 2k$, $k=2,3,\dots$. Постановка граничных условий для системы уравнений обсуждается, например, в [10,11].

Заключение

Установлена связь между классами четно-нечетных многочленов и симметричных сферических тензоров. Получены тензорные разложения источников частиц. Описана методика экономизации (уменьшения порядка) разложений. Показано, что в задачах переноса нейтронов и фотонов в веществе с преимущественным рассеянием вперед или назад целесообразно применять разложения по системе Чебышева, для которой характерна высокая скорость равномерной сходимости. Дана тензорная формулировка метода степенных моментов для решения уравнения переноса излучений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. 4-е изд. – М.: Наука, 1981; *Vladimirov V.S.* Equations of mathematical physics. – NY.: Marcel Dekker, 1971.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции (специальные функции математической физики). Т.2. 2-е изд. – М.: Наука, 1975; *Bateman H.* Higher transcendental functions. V.II. – NY.: McGraw-Hill, 1953.
3. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. 2-е изд. – М.: Наука, 1979; *Suetin P.K.* Klassicheskie ortogonalnye mnogochleny. 2-e izd. – M.: Nauka, 1979.
4. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. – М.: Наука, 1983; *Paszkowski S.* Zastosowania numeryczne wielomianow i szeregow Czebyszewa. – Warszawa: Paristwowe Wydawnictwo Naukowe, 1975.
5. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. – М.: ГИФМЛ, 1962; *Szego G.* Orthogonal polynomials. Colloquium publ. V. XXIII. – Providence, Rhode Island. American Math. Society, 1939.
6. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики. 2-е изд. – М.: Наука, 1984; *Nikiforov A.F., Uvarov V.B.* Special functions of mathematical physics. A unified introduction with applications. – Basel: Birkhauser, 1988.
7. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Т.1. Элементарные функции. 2-е изд. – М.: Наука, 2002; *Prudnikov A.P., Brychkov Yu. A., and Marichev O.I.*, Integrals and series. V.1. Elementary functions. – Gordon and Breach, 1986.
8. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Т.2. Специальные функции. 2-е изд. – М.: Наука, 2003; *Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A.*, and *Marichev O.I.* Integrals and series. V.2. Special functions. – Gordon and Breach, 1986.
9. *Шильков А.В.* Разложение оператора рассеяния уравнения переноса частиц в ряд по сферическим тензорам – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2018, препринт №249, 28 с.; *Shilkov A.V.* Razlozhenie operatora rasseianiia uravneniia perenosa chastits v riad po sfericheskim tenzoram. – M.: IPM im. M.V. Keldysha, 2018, preprint №249, 28 s.
10. *Дэвисон Б., Сайкс Дж.* Теория переноса нейтронов. – М.: Атомиздат, 1960; *Davison B., Sykes J.B.* Neutron Transport Theory. – Oxford: Clarendon Press, 1958.
11. *Владимиров В.С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц. Труды МИАН СССР им.В.А. Стеклова. – М.: Изд-во АН СССР, 1961, т.61. с.3-158; *Vladimirov V.S.* Mathematical Problems in the One-Velocity Theory of Particle Transport. – Ontario: Atomic Energy of Canada, 1963.

Поступила в редакцию 08.04.2019
После доработки 08.04.2019
Принята к публикации 25.11.2019