С. А. Гриценко, Л. Н. Куртова, Асимптотические формулы для дробных моментов некоторых рядов Дирихле, *Чебышевский сб.*, 2013, том 14, выпуск 1, 18–33

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 1 (2013)

УДК 511

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ДРОБНЫХ МОМЕНТОВ НЕКОТОРЫХ РЯДОВ ДИРИХЛЕ [1]

С. А. Гриценко, Л. Н. Куртова (г. Белгород)

Аннотация

Пусть v — натуральное число, $\Phi(T)$ — сколь угодно медленно стремящаяся к $+\infty$ при $T \to +\infty$ функция. Получены асимптотические формулы для дробных моментов дзета-функции Римана вида $\int\limits_T^{2T} |\zeta(\sigma+it)|^{2/m} dt$ при $\frac{1}{2} + \frac{\Phi(T)}{\ln T} \leqslant \sigma < 1$, а также для дробных моментов функций $L(s)$ степени 2 из класса Сельберга $\int\limits_T^{2T} |L(\sigma+it)|^{2/m} dt$, при $\frac{1}{2} + \frac{\Phi(T)}{\sqrt{\ln T}} \leqslant \sigma < 1$ в предположении гипотезы Сельберга.

ASYMPTOTICAL FORMULA FOR FRACTIONAL MOMENTS OF SOME DIRICHLET SERIES

S.A. Gritsenko, L.N. Kurtova

Belgorod State University,
Pobedy str., 85, Belgorod, 308015, Russia

Abstract

Let $v \in \mathbf{N}$. Let the function $\Phi(T)$ arbitrarily slow tend to $+\infty$ with $T \to +\infty$. The asymptotical formulas for fractional moments of the Riemann zeta-function $\int\limits_T^{2T} |\zeta(\sigma+it)|^{2/v} dt$ for $1/2 + \Phi(T)/\ln T \leqslant \sigma < 1$ and for fractional moments of the arithmetical Dirichlet series of second degree from Selberg's class $\int\limits_T^{2T} |L(\sigma+it)|^{2/v} dt$ for $1/2 + \Phi(T)/\sqrt{\ln T} \leqslant \sigma < 1$, are obtained.

[1] Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», госконтракт 14.A18.21.0357

1. Введение

Пусть k — неотрицательное вещественное число, $\frac{1}{2} \leqslant \sigma < 1$, $T \geqslant 2$. Интеграл вида

$$I_k(\sigma, T) = \int\limits_T^{2T} |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt$$

будем называть моментом дзета-функции Римана степени $2k$.

Определим мультипликативную функцию $d_k(n)$ из равенства

$$\zeta^k(s) = \prod_p (1 - \frac{1}{p^s})^{-k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)}{n^s} \quad (\Re\ s > 1).$$

Хорошо известно, что при $\sigma > 1/2$ справедлива асимптотическая формула

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(\sigma + it)^{2k} dt \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k^2(n)}{n^{2\sigma}}$$

(см., например, [1], [2], [3, глава 7]).

В 1981 году Р.Т. Турганалиев [4] на основе одной идеи С.М. Воронина оценил в этой асимптотической формуле остаточный член и доказал, что при $0 < k < 2$, $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ справедливо равенство

$$\int\limits_T^{2T} |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt = T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k^2(n)}{n^{2\sigma}} + O(T^{1-\kappa}), \tag{1}$$

где $\kappa = \kappa(\sigma, k) > 0$.

В формуле Турганалиева параметр $\sigma > \frac{1}{2}$ фиксирован, то есть не зависит от основного параметра T.

Для приложений особый интерес вызывает случай, когда σ равно $\frac{1}{2}$ или хотя бы стремится к $\frac{1}{2}$ справа с ростом T. В 1985 году И.Ш. Джаббаров [5] доказал, что равенство (1) справедливо при

$$\frac{1}{2} + \frac{\log\log\log T}{\log\log T} \leqslant \sigma < 1.$$

Получена асимптотическая формула для $I_k(\sigma, T)$ в частном случае, когда $k = \frac{1}{m}$, $m \in N$. Важно отметить, что параметр k фиксирован (не зависит от T). Наша формула справедлива при весьма близких к $\frac{1}{2}$ значениях σ и в этом смысле представляет собой уточнение цитированных выше теорем.

Теорема 1. *. Пусть m — натуральное число, $\Phi(T)$ — сколь угодно медленно стремящаяся к $+\infty$ при $T \to +\infty$ функция. Тогда при $\frac{1}{2} + \frac{\Phi(T)}{\ln T} \leqslant \sigma < 1$*

справедлива асимптотическая формула

$$\int\limits_T^{2T} |\zeta(\sigma+it)|^{2/m} dt = T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_{1/m}^2(n)}{n^{2\sigma}} + O\left(T(\sigma-\frac{1}{2})^{-1/m^2}e^{-0,1\Phi(T)}\right).$$

В 1989 году А. Сельберг [6] в своем докладе на конференции в Амальфи определил класс S рядов Дирихле

$$L(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s}, \quad (\Re s>1),$$

удовлетворяющих следующим условиям:

1) функция $(s-1)^m L(s)$ является целой функцией конечного порядка при некотором $m\geqslant 0$;

2) коэффициенты Дирихле $a(n)$ удовлетворяют соотношениям

$$a(1)=1, \quad a(n)\ll_{\varepsilon} n^{\varepsilon}$$

для любого положительного ε и всех $n\geqslant 1$;

3) при $\Re s>1$ функция $L(s)$ раскладывается в эйлерово произведение:

$$L(s)=\prod_p(1+a(p)p^{-s}+a(p^2)p^{-2s}+\cdots),$$

p пробегает простые числа,

$$\log L(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b(n)}{n^s}$$

где $b(n)=0$, если n не равно положительной степени простого числа, причем $b(n)\ll n^{\theta}$ для некоторого $\theta\geqslant 1/2$;

4) $L(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению вида

$$\Lambda(s)=\overline{\Lambda(1-\overline{s})},$$

где

$$\Lambda(s)=\eta A^s\prod_{j=1}^{k}\Gamma(\lambda_j s+\mu_j)L(s)$$

и

$$|\eta|=1, \quad A>0, \quad \lambda_j>0, \quad \Re\mu_j\geqslant 0.$$

В статье [7] для любой функции $L(s)$ из S определена степень $L(s)$ следующим образом:

$$d_L=2\sum_{j=1}^{k}\lambda_j.$$

Для примитивных (не представляющихся в виде $L_1(s)L_2(s)$, $L_1(s) \in S$, $L_2(s) \in S$) функций из класса S А. Сельберг высказал в работе [6] ряд гипотез, в частности следующую:

Гипотеза. *При $x \to \infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{n \leqslant x} |a(n)|^2 n^{-1} = \log x + O(1), \tag{2}$$

где $a(n)$ — коэффициенты Дирихле функции $L(s)$.

Интеграл вида

$$I'_k(\sigma, T) = \int\limits_{T}^{2T} |L(\sigma + it)|^{2k} dt$$

будем называть моментом функции $L(s)$ из класса Сельберга S степени $2k$.

Вторым основным результатом данной статьи является вывод асимптотической формулы для дробных моментов $I'_{1/m}(\sigma, T)$, $m \in N$ функций $L(s)$ из класса Сельберга, $d_L = 2$. Эта задача представляет трудность потому, что в отличие от $\zeta(s)$ точная верхняя оценка дробных моментов для таких функций на критической прямой не известна.

Теорема 2. . *Пусть m — натуральное число, $\Phi(T)$ — сколь угодно медленно стремящаяся к $+\infty$ при $T \to +\infty$ функция. Тогда при $\frac{1}{2} + \frac{\Phi(T)}{\sqrt{\ln T}} \leqslant \sigma < 1$ в предположении гипотезы Сельберга (2) справедлива асимптотическая формула*

$$\int\limits_{T}^{2T} |L(\sigma + it)|^{2/m} dt = T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a(n)|^2}{n^{2\sigma}} + O\left(Te^{-\frac{1}{2}\sqrt{\ln T}}\right).$$

Введем некоторые обозначения. Пусть N — натуральное число. При доказательстве теоремы 1 считаем, что $N \leqslant T/\log T$. При доказательстве теоремы 2 полагаем $N \leqslant Te^{\sqrt{\ln T}}$.

$$S_N(s) = \sum_{n=1}^{N} d_{1/m}(n) n^{-s}, \quad g(s) = \zeta(s) - S_N^m(s).$$

$$S'_N(s) = \sum_{n=1}^{N} a(n) n^{-s}, \quad g'(s) = L(s) - S'^m_N(s).$$

Определим интегралы:

$$K(\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(\sigma + it)|^{2/m} w(t) dt, \quad K'(\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |g'(\sigma + it)|^{2/m} w(t) dt,$$

$$I(\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |S_N(\sigma+it)|^2 w(t)dt, \quad I'(\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |S'_N(\sigma+it)|^2 w(t)dt,$$

$$J(\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\zeta(\sigma+it)|^{2/m} w(t)dt, \quad J'(\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |L(\sigma+it)|^{2/m} w(t)dt,$$

где $w(t) = \int\limits_{T}^{2T} e^{-2(t-\tau)^2/m} d\tau$.

Функция $w(t)$ обладает следующим свойством: $w(t) \ll e^{-(t^2+T^2)/m}$, если $t \leqslant 0$, $t \geqslant 3T$, $\quad w(t) \ll 1$ в остальных случаях.

2. Леммы

Лемма 1. *([8]). Пусть $f(s)$ — регулярная в полосе $\alpha < \Re s < \beta$ и непрерывная в полосе $\alpha \leqslant \Re s \leqslant \beta$ функция. Предположим, что $f(s) \to 0$ при $|\Im s| \to \infty$ равномерно по $\alpha \leqslant \Re s \leqslant \beta$. Тогда при $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$ и $q > 0$ имеем:*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\gamma+it)|^q dt \leqslant \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\alpha+it)|^q dt\right)^{\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\beta+it)|^q dt\right)^{\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}}.$$

Лемма 2. *([9]). Для любых комплексных чисел a_n справедливо равенство*

$$\int\limits_{0}^{T} \left|\sum_{n=1}^{N} a_n n^{it}\right|^2 dt = (T + O(N)) \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2.$$

Лемма 3. . *Пусть $0 < \sigma \leqslant \frac{5}{4}$, $|\sigma - 1| > 0,01$, $N \leqslant \tau$. Тогда справедливы неравенства:*

$$|g(\sigma+it)|^{2/m} \ll 1 + (t-\tau)^2 + \tau^2,$$

$$|g'(\sigma+it)|^{2/m} \ll 1 + (t-\tau)^2 + \tau^2.$$

Доказательство. Из определения $g(\sigma+it)$ имеем

$$|g(\sigma+it)|^{2/m} \ll |\zeta(\sigma+it)|^{2/m} + |S_N(\sigma+it)|^2.$$

Докажем, что $|\zeta(\sigma+it)|^{2/m} \ll 1 + t^2$.

Если $|t| \leqslant 2\pi$, это очевидно, так как $|\sigma - 1| > 0,01$.

Если $|t| > 2\pi$, воспользуемся известной формулой

$$\zeta(\sigma+it) = \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n^{\sigma+it}} + \frac{x^{1-\sigma-it}}{\sigma - 1 + it} + O(x^{-\sigma} \log x),$$

где $x = \frac{|t|}{\pi}$ (см., например, [10] с. 72). Оценивая правую часть тривиально, приходим к неравенствам

$$|\zeta(\sigma+it)| \ll |t|, \quad |\zeta(\sigma+it)|^{2/m} \ll 1+t^2.$$

Сумму $S_N(\sigma+it)$ оценим тривиально:

$$|S_N(\sigma+it)| \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{d_{1/m}(n)}{n^\sigma}.$$

Поскольку функция $d_{1/m}(n)$ мультипликативна и

$$0 < d_{1/m}(p^\nu) = \frac{\frac{1}{m}(\frac{1}{m}+1)\cdots(\frac{1}{m}+\nu-1)}{\nu!} \leqslant 1$$

(p — простое число, $\nu \geqslant 1$), то имеем $0 < d_{1/m}(n) \leqslant 1$. Поэтому

$$|S_N(\sigma+it)|^2 \leqslant (\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\sigma})^2 \leqslant N^2 \leqslant \tau^2.$$

Получено неравенство

$$|g(\sigma+it)|^{2/m} \ll 1+t^2+\tau^2 \ll 1+(t-\tau)^2+\tau^2.$$

Неравенство для $|g'(\sigma+it)|^{2/m}$ доказывается аналогично. Необходимо только выбрать τ таким, что $N^{1+\varepsilon} \leqslant \tau$.

Лемма 4. . *Пусть* $0,49 \leqslant \alpha \leqslant \sigma \leqslant \frac{7}{8} \leqslant \beta$, $1,1 \leqslant \beta \leqslant 2$. *Тогда справедливы неравенства:*

$$K(\sigma) \ll \{K(\alpha)\}^{\frac{\beta-\sigma}{\beta-\alpha}}\{K(\beta)\}^{\frac{\sigma-\alpha}{\beta-\alpha}} + T^5 e^{-\frac{T^2}{4m}\frac{(\beta-\sigma)}{(\beta-\alpha)}} + T^5 e^{-\frac{T^2}{4m}\frac{(\sigma-\alpha)}{(\beta-\alpha)}},$$

$$K'(\sigma) \ll \{K'(\alpha)\}^{\frac{\beta-\sigma}{\beta-\alpha}}\{K'(\beta)\}^{\frac{\sigma-\alpha}{\beta-\alpha}} + T^5 e^{-\frac{T^2}{4m}\frac{(\beta-\sigma)}{(\beta-\alpha)}} + T^5 e^{-\frac{T^2}{4m}\frac{(\sigma-\alpha)}{(\beta-\alpha)}}.$$

Доказательство. Докажем первое неравенство. Доказательство второго неравенства проводится аналогично, необходимо лишь заменить $g(z)$ на $g'(z)$. Положим в лемме 1 $f(z) = (z-1)g(z)e^{(z-i\tau)^2}$, где $\tau \in [T, 2T]$.

Пусть κ — одно из чисел α, σ, β. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\kappa+it)|^{2/m} dt = \int_{\tau/2}^{3\tau/2} |f(\kappa+it)|^{2/m} dt + \left(\int_{-\infty}^{\tau/2} + \int_{\infty}^{3\tau/2}\right) |f(\kappa+it)|^{2/m} dt.$$

Оценим два последних интеграла. При $t \in (-\infty, \tau/2) \cup (3\tau/2, +\infty)$ в силу леммы 4 имеем:

$$|f(\kappa+it)|^{2/m} \ll (1+(t-\tau)^4+\tau^4) e^{\frac{-(t-\tau)^2}{m}} e^{-\frac{\tau^2}{4m}}.$$

Тогда

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{\tau/2}+\int\limits_{\infty}^{3\tau/2}\right)|f(\kappa+it)|^{2/m}dt \ll \tau^4 e^{-\frac{\tau^2}{4m}},$$

следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(\kappa+it)|^{2/m}dt \ll \tau^{2/m}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g(\kappa+it)|^{2/m}e^{-2(t-\tau)^2/m}dt+\tau^4 e^{-\frac{\tau^2}{4m}}.$$

Пользуясь неравенствами:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g(\alpha+it)|^{2/m}e^{-2(t-\tau)^2/m}dt \ll T^2, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}|g(\beta+it)|^{2/m}e^{-2(t-\tau)^2/m}dt \ll 1,$$

получаем,что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g(\sigma+it)|^{2/m}e^{-2(t-\tau)^2/m}dt \ll \{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g(\alpha+it)|^{2/m}e^{-2(t-\tau)^2/m}dt\}^{\frac{\beta-\sigma}{\beta-\alpha}}\times$$

$$\times\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g(\beta+it)|^{2/m}e^{-2(t-\tau)^2/m}dt\}^{\frac{\sigma-\alpha}{\beta-\alpha}}+T^4 e^{-\frac{T^2}{4m}\frac{(\beta-\sigma)}{(\beta-\alpha)}}+T^4 e^{-\frac{T^2}{4m}\frac{(\sigma-\alpha)}{(\beta-\alpha)}}.$$

Осталось проинтегрировать это неравенство по τ от T до $2T$ и воспользоваться неравенством Гельдера.

Лемма 5. . *При* $1,01<\sigma_0\leqslant 2$ *справедливы неравенства:*

$$K(\sigma_0)\ll TN^{-(2\sigma_0-1)/m},$$

$$K'(\sigma_0)\ll TN^{-(2\sigma_0-1)/m}.$$

Доказательство. По определению имеем

$$(\sum_{n=1}^{\infty}d_{1/m}(n)n^{-s})^m=\zeta(s), \quad (\Re s>1).$$

Сравнивая коэффициенты рядов Дирихле слева и справа, получаем

$$\sum_{n_1\cdots n_m=n}d_{1/m}(n_1)\cdots d_{1/m}(n_m)=1.$$

Отсюда и из положительности $d_{1/m}(n)$ следует, что

$$0\leqslant\beta(n)=1-\sum_{n_1\cdots n_m=n,\quad 1\leqslant n_1,\dots,n_m\leqslant N}d_{1/m}(n_1)\cdots d_{1/m}(n_m)\leqslant 1.$$

Если $n \leqslant N$, то $\beta(n) = 0$.

По определению имеем

$$g(\sigma_0 + it) = \sum_{n=N+1} \beta(n) n^{-\sigma_0 - it}.$$

Поскольку $|g(\sigma_0 + it)| \ll 1$, то

$$\left(\int_{-\infty}^{0} + \int_{3T}^{\infty} \right) |g(\sigma_0 + it)|^{2/m} w(t) dt \ll$$

$$\ll \int_{T}^{2T} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{-2(t-\tau)^2/m} dt + \int_{3T}^{\infty} e^{-2(t-\tau)^2/m} dt \right) d\tau \ll e^{-T^2/(2m)}.$$

Поэтому, пользуясь неравенством Гельдера, получаем, что

$$K(\sigma_0) \ll \int_{0}^{3T} |\sum_{n=N+1}^{\infty} \beta(n) n^{-\sigma_0 - it}|^{2/m} dt + e^{-T^2/(2m)} \ll$$

$$\ll \left(T^{m-1} \int_{0}^{3T} |\sum_{n=N+1}^{\infty} \beta(n) n^{-\sigma_0 - it}|^2 dt \right)^{1/m} + e^{-T^2/(2m)} \ll$$

$$\ll T N^{-(2\sigma_0 - 1)/m}.$$

Неравенство для $K'(\sigma_0)$ доказывается аналогично.

Лемма 6. . *Пусть* $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant \frac{3}{4}$, $m \geqslant 1$, $T \geqslant 2$, *тогда справедливы неравенства:*

$$J(\frac{1}{2}) \ll T^{\frac{1}{m}(\sigma - \frac{1}{2})} J(\sigma),$$

$$J'(\frac{1}{2}) \ll T^{\frac{2}{m}(\sigma - \frac{1}{2})} J'(\sigma).$$

Доказательство. Первое неравенство доказывается в [11].

Докажем второе неравенство. Положим в лемме 1 $f(z) = L(z) e^{(z - i\tau)^2}$, где $\tau \in [T, 2T]$; $\gamma = 1/2$, $\alpha = 1 - \sigma$, $\beta = \sigma$, $q = 2/m$, тогда имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |L(\frac{1}{2} + it) e^{(1/2 + it - i\tau)^2}|^{2/m} dt \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |L(1 - \sigma + it) e^{(1 - \sigma + it - i\tau)^2}|^{2/m} dt \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |L(\sigma + it) e^{(\sigma + it - i\tau)^2}|^{2/m} dt \right)^{1/2}.$$

Используем функциональное уравнения для $L(s)$. Так как $d_L = 2$, то

$$L(1-z) = cA^{1-2s}\frac{\Gamma(z+\mu)}{\Gamma(1-z+\mu)}L(z),$$

где $|c| = 1,\ A > 0$. Тогда, используя формулу Стирлинга, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |L(1-\sigma+it)e^{(1-\sigma+it-i\tau)^2}|^{2/m}dt \ll$$

$$\ll \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |L(\sigma+it)|^{2/m}(1+|t|)^{2(2\sigma-1)/m}e^{-2(t-\tau)^2/m}dt \ll$$

$$\ll \left(\int\limits_{-\infty}^{\tau/2} + \int\limits_{3\tau/2}^{+\infty}\right)(1+|t|)^{2/m}e^{-2(t-\tau)^2/m}dt +$$

$$+\tau^{\frac{2}{m}(2\sigma-1)}\int\limits_{\tau/2}^{3\tau/2} |L(\sigma+it)|^{2/m}e^{-2(t-\tau)^2/m}dt \ll$$

$$\ll \tau^{\frac{2}{m}(2\sigma-1)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |L(\sigma+it)|^{2/m}e^{-2(t-\tau)^2/m}dt.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |L(\frac{1}{2}+it)|^{2/m}e^{-2(t-\tau)^2/m}dt \ll$$

$$\ll \tau^{\frac{2}{m}(\sigma-\frac{1}{2})}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |L(\sigma+it)|^{2/m}e^{-2(t-\tau)^2/m}dt.$$

Осталось проинтегрировать последнее равенство по $T \leqslant \tau \leqslant 2T$ и доказательство леммы завершено.

Лемма 7. *([11]). Для фиксированного $m \geqslant 0$ существует $c_m > 0$, такое, что для всех σ, удовлетворяющих неравенству $\frac{1}{2} + \frac{c_m}{\ln T} \leqslant \sigma \leqslant \frac{3}{4}$, справедливы оценки:*

$$I(\sigma) \ll T(\sigma - \frac{1}{2})^{-1/m^2},$$

$$I(\frac{1}{2}) \ll T(\ln T)^{1/m^2}.$$

Лемма 8. . *Для всех* σ, *удовлетворяющих неравенству* $\frac{1}{2} + \frac{\Phi(T)}{\sqrt{\ln T}} \leqslant \sigma < 1$, *где* $\Phi(T)$ — *сколь угодно медленно стремящаяся к* $+\infty$ *при* $T \to +\infty$ *функция, в предположении гипотезы Сельберга (2) справедливы оценки:*

$$I'(\sigma) \ll Te^{-\frac{1}{2}\sqrt{\ln T}},$$

$$I'(\frac{1}{2}) \ll Te^{\sqrt{\ln T}} \ln T.$$

Доказательство. Заметим, что функция $w(t)$ обладает следующим свойством: $w(t) \ll e^{-(t^2+T^2)/m}$, если $t \leqslant 0$, $t \geqslant 3T$, $\quad w(t) \ll 1$ в остальных случаях. Кроме того, $S_N(s) \ll N \ll Te^{\sqrt{\ln T}}$. Тогда

$$I'(\sigma) = \int\limits_0^{3T} |S_N(\sigma+it)|^2 \, w(t)dt + O(1) \ll \int\limits_0^{3T} \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{a(n)}{n^{\sigma+it}} \right|^2 dt + O(1).$$

Используя равенство из леммы 2, будем иметь:

$$I'(\sigma) \ll (T + O(N)) \sum_{n=1}^{N} \frac{|a(n)|^2}{n^{2\sigma}} \ll N \sum_{n=1}^{N} \frac{|a(n)|^2}{n^{2\sigma}}.$$

Вычислим асимптотически полученную сумму. Применим преобразование Абеля:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|a(n)|^2}{n} n^{1-2\sigma} = -\int\limits_1^{N} \left(\sum_{n \leqslant x} \frac{|a(n)|^2}{n} \right) dx^{1-2\sigma} + N^{1-2\sigma} \sum_{n=1}^{N} \frac{|a(n)|^2}{n}.$$

Далее будем использовать гипотезу Сельберга (см. формулу (2)). Вычислив интеграл, можем утверждать, что

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|a(n)|^2}{n^{2\sigma}} = O\left(N^{1-2\sigma} \ln N\right).$$

Так как $N \leqslant Te^{\sqrt{\ln T}}$ и $\sigma - \frac{1}{2} \geqslant \frac{\Phi(T)}{\sqrt{\ln T}}$, то

$$I'(\sigma) \ll Te^{\sqrt{\ln T}} T^{-2\frac{\Phi(T)}{\sqrt{\ln T}}} e^{-2\Phi(T)} \ln T \ll Te^{-\frac{1}{2}\sqrt{\ln T}}.$$

$I'(\frac{1}{2})$ оцениваем аналогично. Имеем

$$I'(\frac{1}{2}) \ll N \sum_{n=1}^{N} \frac{|a(n)|^2}{n} \ll N \ln N \ll Te^{\sqrt{\ln T}} \ln T.$$

3. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1.

1. При $m \geqslant 2$ из очевидного неравенства

$$|z_1|^{2/m} - |z_2|^{2/m} \leqslant |z_1 + z_2|^{2/m} \leqslant |z_1|^{2/m} + |z_2|^{2/m}, \qquad (3)$$

справедливого для любых комплексных чисел z_1 и z_2, следует, что

$$\int_T^{2T} |\zeta(\sigma+it)|^{2/m} dt = \int_T^{2T} |S_N(\sigma+it)|^2 dt + O\left(\int_T^{2T} |g(\sigma+it)|^{2/m} dt\right)$$

(мы положили в (3) $z_1 = S_N^m(\sigma+it)$, $z_2 = g(\sigma+it)$ и проинтегрировали получившееся неравенство по t от T до $2T$).

2. Вычислим асимптотически интеграл

$$\int_T^{2T} |S_N(\sigma+it)|^2\, dt.$$

Воспользуемся леммой 2. Имеем

$$\int_T^{2T} |S_N(\sigma+it)|^2\, dt = \int_T^{2T} \left|\sum_{n=1}^{N} \frac{d_{1/m}(n) n^{-it}}{n^{\sigma}}\right|^2 dt = (T + O(N)) \sum_{n=1}^{N} \frac{d_{1/m}^2(n)}{n^{2\sigma}}.$$

Тогда

$$\int_T^{2T} |S_N(\sigma+it)|^2\, dt = T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{1/m}^2(n)}{n^{2\sigma}} + O(S_1) + O(S_2),$$

где

$$S_1 = T \sum_{n=N}^{\infty} \frac{d_{1/m}^2(n)}{n^{2\sigma}}, \quad S_2 = N \sum_{n=1}^{N} \frac{d_{1/m}^2(n)}{n^{2\sigma}}.$$

Оценим эти суммы. Так как $0 < d_{1/m}(n) \leqslant 1$, то

$$S_1 = T \sum_{n=N}^{\infty} \frac{d_{1/m}^2(n)}{n^{2\sigma}} \ll T N^{1-2\sigma}.$$

Так как $\sigma - \frac{1}{2} \geqslant \frac{\Phi(T)}{\ln T}$ и $N \leqslant T/\log T$, то $S_1 \ll T(\sigma - \frac{1}{2})^{-1/m^2} e^{-0{,}1\Phi(T)}$.

Аналогичные рассуждения приводят к следующей оценке суммы S_2:

$$S_2 = N \sum_{n=1}^{N} \frac{d_{1/m}^2(n)}{n^{2\sigma}} \ll N^{2-2\sigma} = T\frac{N}{T} N^{1-2\sigma} \ll T(\sigma - \frac{1}{2})^{-1/m^2} e^{-0{,}1\Phi(T)}.$$

Таким образом, имеем

$$\int_T^{2T} |S_N(\sigma+it)|^2\,dt = T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_{1/m}^2(n)}{n^{2\sigma}} + O\left(T(\sigma-\frac{1}{2})^{-1/m^2}e^{-0,1\Phi(T)}\right).$$

3. Перейдем к оценке $\int\limits_T^{2T}|g(\sigma+it)|^{2/m}dt$. Заметим, что при $t\in[T,2T]$ $w(t)\gg\int_0^{T/2}\exp(-2\tau^2/m)d\tau\gg 1$, поэтому

$$\int_T^{2T}|g(\sigma+it)|^{2/m}dt\ll K(\sigma).$$

Применим лемму 4 с параметрами $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{5}{4}$; получим неравенство

$$K(\sigma)\ll\{K(\frac{1}{2})\}^{\frac{5-4\sigma}{3}}\{K(\frac{5}{4})\}^{\frac{4\sigma-2}{3}}+1$$

(мы учли, что $\sigma-\frac{1}{2}\geqslant\frac{\Phi(T)}{\ln T}\geqslant\frac{1}{\ln T}$ и поэтому $\exp(-\frac{T^2(\sigma-\frac{1}{2})}{3m})\ll T^{-A}$ для любого $A>0$ и достаточно большого T).

Если $K(\frac{1}{2})\leqslant T$, то, так как $K(\frac{5}{4})\ll T$, то и $K(\sigma)\ll T$.

4. Пусть $K(\frac{1}{2})>T$. Тогда

$$K(\sigma)\ll K(\frac{1}{2})(T^{-1}K(\frac{5}{4}))^{\frac{4\sigma-2}{3}}+1.$$

Используем оценку из леммы 5: $K(\frac{5}{4})\ll TN^{-3/(2m)}$. Тогда

$$K(\sigma)\ll K(\frac{1}{2})N^{-\frac{2}{m}(\sigma-\frac{1}{2})}+1\ll K(\frac{1}{2})\Delta, \tag{4}$$

где $\Delta=N^{-\frac{2}{m}(\sigma-\frac{1}{2})}$.

Из (3) получаем, что

$$K(\sigma)-I(\sigma)\ll J(\sigma)\ll K(\sigma)+I(\sigma). \tag{5}$$

Тогда

$$K(\frac{1}{2})\ll J(\frac{1}{2})+I(\frac{1}{2}).$$

Функцию $J(\frac{1}{2})$ оценим, используя лемму 6. Имеем $J(\frac{1}{2})\ll T^{\frac{1}{m}(\sigma-\frac{1}{2})}J(\sigma)$. Для $J(\sigma)$ используем правую часть неравенства (5). Тогда

$$K(\frac{1}{2})\ll T^{\frac{1}{m}(\sigma-\frac{1}{2})}(K(\sigma)+I(\sigma))+I(\frac{1}{2}).$$

Подставляем полученную оценку в (4). Получаем, что

$$K(\sigma) \ll \Delta T^{\frac{1}{m}(\sigma-\frac{1}{2})}(K(\sigma)+I(\sigma))+\Delta I(\frac{1}{2})$$

С учетом условий $N \leqslant T$, $\sigma-\frac{1}{2} \geqslant \frac{\Phi(T)}{\ln T}$ и равенства для Δ будем иметь

$$\Delta T^{\frac{1}{m}(\sigma-\frac{1}{2})} = N^{-\frac{2}{m}(\sigma-\frac{1}{2})}T^{\frac{1}{m}(\sigma-\frac{1}{2})} \ll T^{-\frac{1}{m}\frac{\Phi(T)}{\ln T}} \ll e^{-\frac{1}{m}\Phi(T)} \ll e^{-0,1\Phi(T)}.$$

Тогда

$$K(\sigma) \ll e^{-0,1\Phi(T)}I(\sigma)+e^{-0,1\Phi(T)}I(\frac{1}{2}).$$

Используя оценки для $I(\sigma)$ и $I(\frac{1}{2})$ из леммы 7, получаем:

$$K(\sigma) \ll T(\sigma-\frac{1}{2})^{-1/m^2}e^{-0,1\Phi(T)}.$$

Доказательство теоремы 2.

Проводится по схеме доказательства теоремы 1. Более подробно остановимся на вычислении главного члена асимптотической формулы и оценке $K'(\sigma)$, если $K'(\frac{1}{2}) > T$.

1. Вычислим асимптотически интеграл

$$\int_T^{2T} |S'_N(\sigma+it)|^2\,dt.$$

Воспользуемся леммой 2. Имеем

$$\int_T^{2T} |S'_N(\sigma+it)|^2\,dt = \int_T^{2T}\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{a(n)n^{-it}}{n^{\sigma}}\right|^2 dt = (T+O(N))\sum_{n=1}^{N}\frac{|a(n)|^2}{n^{2\sigma}}.$$

Тогда

$$\int_T^{2T} |S'_N(\sigma+it)|^2\,dt = T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a(n)|^2}{n^{2\sigma}}+O(S_1)+O(S_2),$$

где

$$S_1 = T\sum_{n=N}^{\infty}\frac{|a(n)|^2}{n^{2\sigma}},\quad S_2 = N\sum_{n=1}^{N}\frac{|a(n)|^2}{n^{2\sigma}}.$$

Оценим эти суммы. Так как $|a(n)| \ll n^{\varepsilon}$, то

$$S_1 = T\sum_{n=N}^{\infty}\frac{|a(n)|^2}{n^{2\sigma}} \ll TN^{1-2\sigma+2\varepsilon}.$$

Учтем условия $\sigma - \frac{1}{2} \geqslant \frac{\Phi(T)}{\sqrt{\ln T}}$ и $N \leqslant Te^{\sqrt{\ln T}}$, получаем

$$S_1 \ll T(Te^{\sqrt{\ln T}})^{-2\frac{\Phi(T)}{\sqrt{\ln T}}+2\varepsilon} \ll Te^{-2\Phi(T)+2\varepsilon\sqrt{\ln T}}T^{-2\frac{\Phi(T)}{\sqrt{\ln T}}+2\varepsilon} \ll Te^{-\frac{1}{2}\sqrt{\ln T}}.$$

Оценим сумму S_2. Применим преобразование Абеля:

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{|a(n)|^2}{n}n^{1-2\sigma} = -\int\limits_1^N\left(\sum_{n\leqslant x}\frac{|a(n)|^2}{n}\right)dx^{1-2\sigma} + N^{1-2\sigma}\sum_{n=1}^{N}\frac{|a(n)|^2}{n}.$$

Далее будем использовать гипотезу Сельберга (см. формулу (2)). Вычислив интеграл, можем утверждать, что

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{|a(n)|^2}{n^{2\sigma}} = O\left(N^{1-2\sigma}\ln N\right).$$

Так как $N \leqslant Te^{\sqrt{\ln T}}$ и $\sigma - \frac{1}{2} \geqslant \frac{\Phi(T)}{\sqrt{\ln T}}$, то

$$S_2 \ll N^{2-2\sigma}\ln N = T\frac{N}{T}N^{1-2\sigma}\ln N \ll Te^{\sqrt{\ln T}}T^{-2\frac{\Phi(T)}{\sqrt{\ln T}}}e^{-2\Phi(T)}\ln N \ll Te^{-\frac{1}{2}\sqrt{\ln T}}.$$

Таким образом, имеем:

$$\int\limits_T^{2T}\left|S'_N(\sigma+it)\right|^2 dt = T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a(n)|^2}{n^{2\sigma}} + O\left(Te^{-\frac{1}{2}\sqrt{\ln T}}\right).$$

2. Пусть $K'(\frac{1}{2}) > T$.

$$K'(\sigma) \ll K'(\frac{1}{2})\Delta, \tag{6}$$

где $\Delta = N^{-\frac{2}{m}(\sigma-\frac{1}{2})}$.

Из (3) получаем, что

$$K'(\sigma) - I'(\sigma) \ll J'(\sigma) \ll K'(\sigma) + I'(\sigma). \tag{7}$$

Тогда

$$K'(\frac{1}{2}) \ll J'(\frac{1}{2}) + I'(\frac{1}{2}).$$

Функцию $J'(\frac{1}{2})$ оценим, используя лемму 6. Имеем $J'(\frac{1}{2}) \ll T^{\frac{2}{m}(\sigma-\frac{1}{2})}J'(\sigma)$. Для $J'(\sigma)$ используем правую часть неравенства (7). Тогда

$$K'(\frac{1}{2}) \ll T^{\frac{2}{m}(\sigma-\frac{1}{2})}(K'(\sigma) + I'(\sigma)) + I'(\frac{1}{2}).$$

Подставляем полученную оценку в (5). Получаем, что

$$K'(\sigma) \ll \Delta T^{\frac{2}{m}(\sigma-\frac{1}{2})}(K'(\sigma) + I'(\sigma)) + \Delta I'(\frac{1}{2})$$

С учетом условий $N \leqslant Te^{\sqrt{\ln T}}$, $\sigma - \frac{1}{2} \geqslant \frac{\Phi(T)}{\sqrt{\ln T}}$ и равенства для Δ будем иметь

$$\Delta T^{\frac{2}{m}(\sigma-\frac{1}{2})} = N^{-\frac{2}{m}(\sigma-\frac{1}{2})} T^{\frac{2}{m}(\sigma-\frac{1}{2})} \ll e^{-\frac{2}{m}\Phi(T)} \ll 1.$$

Тогда

$$K'(\sigma) \ll I'(\sigma) + \Delta I'(\frac{1}{2}) \ll I'(\sigma) + e^{-\Phi(T)\sqrt{\ln T}} I'(\frac{1}{2}).$$

Используя оценки для $I'(\sigma)$ и $I'(\frac{1}{2})$ из леммы 8, получаем:

$$K'(\sigma) \ll Te^{-\frac{1}{2}\sqrt{\ln T}} + e^{-\Phi(T)\sqrt{\ln T}} Te^{\sqrt{\ln T}} \ln T \ll Te^{-\frac{1}{2}\sqrt{\ln T}}.$$

Замечание 1. . *L–функции Гекке, соответствующие комплексным характерам, составляют подкласс класса Сельберга S степени 2 (см. [12]), для которого утверждение теоремы 2 безусловно.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ingham A. E. Mean-value theorems in the theory of the Riemann Zeta-function // Proc. London Math. Soc. 1927. V. 27. №2. P. 273—300.

2. Davenport H. Note on mean-value theorems for the Riemann zeta-function // J. London Math. Soc. 1935. V. 10. P. 136—138.

3. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. М.: Изд. иностран. литер., 1953.

4. Турганалиев Р. Т. Асимптотическая формула для средних значений дробной степени дзета-функции Римана // Труды Математического института АН СССР. 1981. Т. 158. С. 203—226.

5. Джаббаров И. Ш. Дробные моменты ζ-функции // Математические заметки. 1985. Т. 38. №4. С. 481—493.

6. Selberg A. Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series // Proc. of the Amalfi conference on Analytic Number Theory. Univ. di. Salerno. 1992. P. 365—387.

7. Corney J. B., Ghosh A. On the Selberg class of Dirichlet series: small degrees // Duke Math. J. 1993. V. 72. №3. P. 673—695.

8. Gabriel R. M. Some results concerning the integrals of moduli or regular functions along certain curves // J. London Math. Soc. 1927. V. 2. P. 112—117.

9. Montgomery H. L., Vaughan R. C. Hilbert's inequality // J. London Math. Soc. 1974. V. 2. №8. P. 73—82.

10. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.

11. Heath-Brown D. R. Fractional moments of the Riemann Zeta-function // J. London Math. Soc. 1981. V. 24. №2. P. 65—78.

12. Гриценко С. А. О нулях специального вида функций, связанных с L-функциями Гекке мнимых квадратичных полей // Изв. РАН. Сер. Мат. 1997. Т. 61. №1. С. 45—68.

НИУ «Белгородский государственный университет»
Поступило 25.03.2013
e-mail: gritsenko@bsu.edu.ru; kurtova@bsu.edu.ru