

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. A. Malyshev, Cell structure of the space of real  
polynomials,  
*Algebra i Analiz*, 2003, Volume 15, Issue 2, 40–127

<https://www.mathnet.ru/eng/aa784>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have  
read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.80

April 19, 2025, 10:41:23



## КЛЕТОЧНАЯ СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВА ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПОЛИНОМОВ

© В. А. Малышев

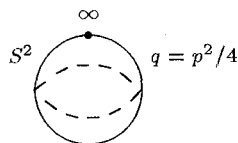
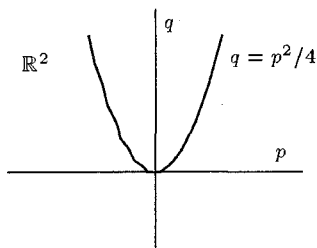
Для пространства вещественных полиномов построены клеточные разбиения, у которых полиномы, принадлежащие одной клетке, имеют одинаковую структуру корней на отрезке, полупрямой и прямой. В качестве приложения изучена зависимость экстремумов полинома от его корней, изложено построение интерполяционного полинома со свободными узлами, возрастающего и убывающего вместе с данными, и дана классификация уравнений Абеля в задаче чебышевской аппроксимации с фиксированными коэффициентами.

### Введение

Рассмотрим  $(p, q)$  плоскость  $\mathbb{R}^2$  вещественных полиномов

$$f(t) = t^2 + pt + q.$$

В плоскости  $\mathbb{R}^2$  кривая  $p^2 - 4q = 0$  является границей между полиномами с вещественными различными корнями и полиномами с комплексными корнями. После добавления к плоскости  $\mathbb{R}^2$  бесконечно удаленной точки  $\infty$  мы получаем клеточное разбиение двумерной сферы  $S^2$  с одной нульмерной клеткой  $\infty$ , одной одномерной клеткой  $p^2 - 4q = 0$  и двумя двумерными клетками  $p^2 - 4q > 0$  и  $p^2 - 4q < 0$ .



*Ключевые слова:* положительные полиномы, клеточные разбиения.

На всех клетках полином  $f(t)$  имеет фиксированную структуру вещественных корней. Аналогичные клеточные разбиения удается построить для полиномов произвольной степени.

Рассмотрим вещественный полином

$$f(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n.$$

Дадим определение структуры корней полинома  $f(t)$  на прямой  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ , полупрямой  $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$  и отрезке  $[-1, 1]$ .

В случае прямой  $\mathbb{R}$  запишем полином  $f(t)$  в виде

$$f(t) = (t - x_1)^{q_1} \dots (t - x_k)^{q_k} g(t),$$

где  $x_1 < \dots < x_k$  и  $q_1 \geq 1, \dots, q_k \geq 1$ , а полином  $g(t)$  не имеет корней на прямой  $\mathbb{R}$ . Будем структуру корней полинома  $f(t)$  на прямой  $\mathbb{R}$  задавать строкой  $(q_1, \dots, q_k)$ . Множество полиномов  $f(t)$  со структурой корней  $(q_1, \dots, q_k)$  связно. Отметим, что полином  $g(t)$  может быть представлен в виде

$$g(t) = u^2(t) + v^2(t),$$

где полиномы  $u(t)$  и  $v(t)$  имеют вещественные перемежающиеся на прямой  $\mathbb{R}$  корни.

В случае полупрямой  $\mathbb{R}_+$  запишем полином  $f(t)$  в виде

$$f(t) = t^p (t - x_1)^{q_1} \dots (t - x_k)^{q_k} g(t),$$

где  $0 < x_1 < \dots < x_k$  и  $p \geq 0, q_1 \geq 1, \dots, q_k \geq 1$ , а полином  $g(t)$  не имеет корней на полупрямой  $\mathbb{R}_+$ . Будем структуру корней полинома  $f(t)$  на полупрямой  $\mathbb{R}_+$  задавать строкой  $(p; q_1, \dots, q_k)$ . Множество полиномов  $f(t)$  со структурой корней  $(p; q_1, \dots, q_k)$  связно. Отметим, что полином  $g(t)$  может быть представлен в виде

$$g(t) = u^2(t) + tv^2(t),$$

где полиномы  $u(t)$  и  $v(t)$  имеют вещественные перемежающиеся на полупрямой  $(0, \infty)$  корни.

В случае отрезка  $[-1, 1]$  запишем полином  $f(t)$  в виде

$$f(t) = (t + 1)^p (t - x_1)^{q_1} \dots (t - x_k)^{q_k} (t - 1)^r g(t),$$

где  $-1 < x_1 < \dots < x_k < 1$  и  $p \geq 0, q_1 \geq 1, \dots, q_k \geq 1, r \geq 0$ , а полином  $g(t)$  не имеет корней на отрезке  $[-1, 1]$ . Будем структуру корней полинома  $f(t)$  на отрезке  $[-1, 1]$  задавать строкой  $(p; q_1, \dots, q_k; r)$ . При

$$p + q_1 + \dots + q_k + r = n$$

имеем  $g(t) \equiv 1$ , и множество полиномов  $f(t)$  со структурой корней  $(p; q_1, \dots, q_k; r)$  связно. При

$$p + q_1 + \dots + q_k + r < n$$

это множество имеет две компоненты связности. В зависимости от знака полинома  $g(t)$  на отрезке  $[-1, 1]$  мы обозначаем эти компоненты через  $(p; q_1, \dots, q_k; r)_+$  и  $(p; q_1, \dots, q_k; r)_-$ . Отметим, что полином  $g(t)$  в случае четной степени может быть представлен в виде

$$g(t) = \pm [u^2(t) + (1 - t^2)v^2(t)],$$

а в случае нечетной степени может быть представлен в виде

$$g(t) = \pm [(1 + t)u^2(t) + (1 - t)v^2(t)],$$

где полиномы  $u(t)$  и  $v(t)$  имеют вещественные перемежающиеся на отрезке  $(-1, 1)$  корни.

При определении структуры корней полинома  $f(t)$  корни полинома  $g(t)$  не участвуют. Однако представление полинома  $g(t)$  в виде суммы квадратов полиномов  $v(t)$  и  $u(t)$  играет решающую роль в последующих топологических конструкциях.

Отождествим полином

$$f(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$$

с точкой  $a = (a_1, \dots, a_n)$  пространства  $\mathbb{R}^n$ . Добавим к пространству  $\mathbb{R}^n$  бесконечно удаленную точку  $\infty$  и при помощи стереографической проекции отождествим расширенное пространство  $\mathbb{R}^n \cup \infty$  с единичной сферой  $S^n$ . Клеточные разбиения сферы  $S^n$  у нас всегда содержат точку  $\infty$  в качестве нульмерной клетки. Поэтому финитные клетки образуют разбиение пространства  $\mathbb{R}^n$ . Такие разбиения пространства  $\mathbb{R}^n$  мы также называем клеточными.

Обозначим через  $S_1^n$  любое клеточное разбиение сферы  $S^n$ , у которого полиномы, принадлежащие одной клетке, имеют одинаковую структуру корней на отрезке  $[-1, 1]$ . Обозначим через  $S_2^n$  любое клеточное разбиение сферы  $S^n$ , у которого полиномы, принадлежащие одной клетке, имеют одинаковую структуру корней на полупрямой  $\mathbb{R}_+$ . Обозначим через  $S_3^n$  любое клеточное разбиение сферы  $S^n$ , у которого полиномы, принадлежащие одной клетке, имеют одинаковую структуру корней на прямой  $\mathbb{R}$ .

Среди клеточных разбиений типа  $S_1^n, S_2^n, S_3^n$  имеются разбиения с минимальным числом клеток. Минимальные клеточные разбиения мы называем крупными. Все остальные клеточные разбиения мы называем мелкими. Крупное клеточное разбиение  $S_1^n$  имеет  $1 + 2n$  клеток размерности  $n$ , крупное клеточное разбиение  $S_2^n$  имеет  $1 + n$  клеток размерности  $n$ , а крупное клеточное разбиение  $S_3^n$  имеет  $1 + [n/2]$  клеток размерности  $n$ .

Следует отметить, что крупные клеточные разбиения имеют достаточно сложную структуру. Оказывается, среди мелких клеточных разбиений имеются разбиения с очень простой геометрической природой. После построения таких мелких разбиений крупные разбиения получаются при помощи естественной операции соединения клеток.



Все содержательные мелкие клеточные разбиения будут иметь симплициальную структуру, а в этом случае определение операции соединения клеток самоочевидно.

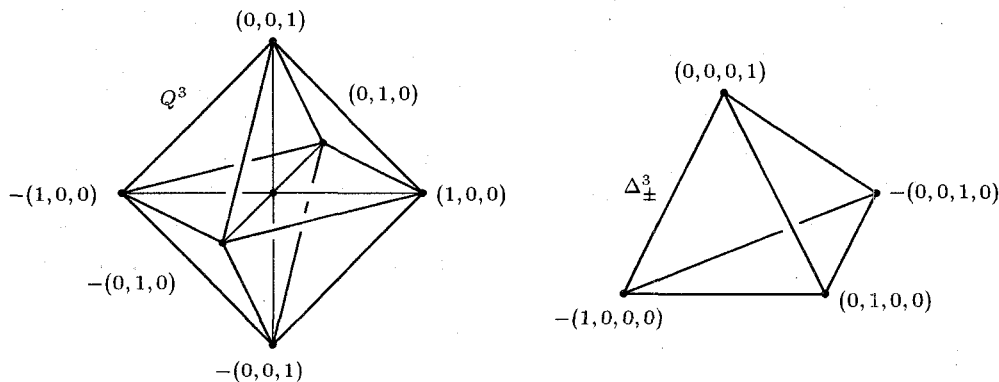
Будет доказано существование таких клеточных разбиений  $S_1^n, S_2^{n+1}, S_3^{n+2}$ , что

$$S_2^{n+1} = \text{su } S_1^n,$$

$$S_3^{n+2} = / \text{su } S_2^{n+1}.$$

Здесь  $\text{su}$  — надстройка, а  $/ \text{su}$  — надстройка с отмеченной точкой. Клеточное разбиение  $S_2^{n+1} = \text{su } S_1^n$  имеет ровно две нульмерные клетки. Поэтому клеточное разбиение  $\text{su } S_2^{n+1}$  имеет ровно две одномерные клетки. Факторизация  $/$  заключается в том, что мы стягиваем одну замкнутую одномерную клетку в точку. Это дает клеточное разбиение  $S_3^{n+2} = / \text{su } S_2^{n+1}$  с одной нульмерной клеткой. Все необходимые нам топологические конструкции изложены в учебнике Рохлина и Фукса [1].

Операции надстройки  $su$  и надстройки с отмеченной точкой / $su$  сводят задачу к построению последовательности клеточных разбиений  $S_1^0, S_1^1, S_1^2, \dots$ . Клеточное разбиение  $S_1^n$  имеет симплицальную природу и получается в результате приклеивания  $n$ -мерного октаэдра к  $n$ -мерному тетраэдру посредством симплицального отображения границы октаэдра на границу тетраэдра. Например, клеточное разбиение  $S_1^3$  получается в результате приклеивания октаэдра к тетраэдру



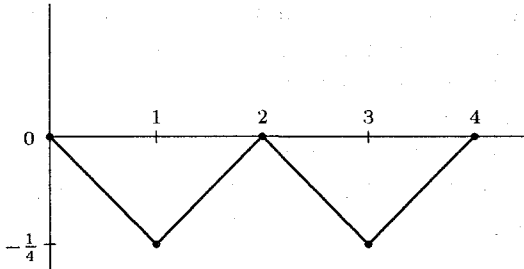
посредством симплицального отображения

$$\begin{aligned}
 -(1, 0, 0) &\longmapsto -(1, 0, 0, 0) \\
 (1, 0, 0) &\longmapsto (0, 1, 0, 0) \\
 (0, 1, 0) &\longmapsto (0, 1, 0, 0) \\
 -(0, 1, 0) &\longmapsto -(0, 0, 1, 0) \\
 -(0, 0, 1) &\longmapsto -(0, 0, 1, 0) \\
 (0, 0, 1) &\longmapsto (0, 0, 0, 1)
 \end{aligned}$$

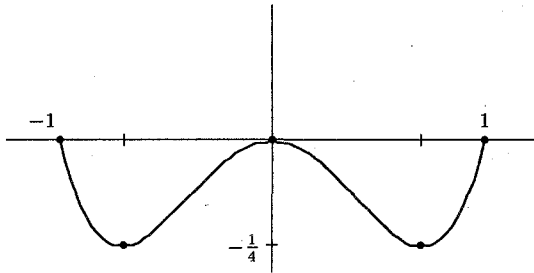
Так получается мелкое клеточное разбиение  $S_1^3$  с  $9 = 1 + 2^3$  клетками размерности 3. Для получения крупного клеточного разбиения  $S_1^3$  с  $7 = 1 + 2 \cdot 3$  клетками размерности 3 надо в октаэдре соединить две пары трехмерных клеток. Полезно отметить, что тетраэдр  $\Delta_{\pm}^3$  образован из альтернированных векторов, у которых координаты меняют знак так, что последняя координата положительна. Случай  $n = 3$  легко обобщается, и это дает топологическую классификацию клеточных разбиений  $S_1^0, S_1^1, S_1^2, \dots$ .

Существенно, что  $n$ -мерный октаэдр  $Q^n$  и  $n$ -мерный альтернированный тетраэдр  $\Delta_{\pm}^n$  являются правильными многогранниками. При этом точки  $Q^n$

и  $\Delta_{\pm}^n$  удобно отождествить с  $n$ -звенными и  $(n + 1)$ -звенными ломаными. Например, барицентру  $\Delta_{\pm}^3$  соответствует пилообразная ломаная



Склеенные  $Q^n$  и  $\Delta_{\pm}^n$  можно вложить в сферу  $S^{n+1}$  так, что ломаные имеют такую же последовательность максимумов и минимумов, что и соответствующие им полиномы на отрезке  $[-1, 1]$ . Например, барицентру  $\Delta_{\pm}^3$  соответствует полином Чебышева



Во многих задачах такая линейризация полинома оказывается очень полезной и позволяет воспользоваться методами кусочно-линейной топологии. В качестве приложений будут рассмотрены задача о корнях и экстремумах, задача о комонотонной интерполяции и задача о классификации уравнений Абеля.

В задаче о корнях и экстремумах рассматриваются полиномы степени  $m + n$ , у которых  $m \geq 2$  корней фиксированы, а  $n$  корней свободно меняются на вещественной прямой. Возникает естественное отображение пространства  $\mathbb{R}^n$  свободных корней в пространство  $\mathbb{R}^{n+m-1}$  экстремумов. Образом такого отображения оказывается алгебраическое многообразие размерности  $n$  в пространстве размерности  $n + m - 1$ . Будет изучена топология этого многообразия. В частности, для  $m = 2$  в этом многообразии будет найдена вложенная  $n$ -мерная сфера.

Интерполяция Лагранжа с равномерным шагом имеет существенный недостаток: при большом количестве данных интерполяционный полином сильно осциллирует. Будет построен интерполяционный полином с переменным шагом, возрастающий и убывающий вместе с данными. Для альтернированных данных такой интерполяционный полином строится однозначно. Например, для пилообразных данных этим полиномом оказывается классический полином Чебышева.

Аппроксимация Чебышева с  $m$  фиксированными коэффициентами сводится к решению конечного набора уравнений Абеля. Для  $m = 0, 1, 2$  фиксированных коэффициентов эта задача решена Чебышевым, Золотаревым и Ахиезером. В нашей работе будет дана топологическая классификация уравнений Абеля, возникающих в задаче чебышевской аппроксимации с произвольным числом  $m$  фиксированных коэффициентов. С этой целью будет построено клеточное разбиение сферы размерности  $m$  такое, что каждой клетке соответствует одно из уравнений Абеля.

§1. Примеры в малых размерностях

Заполним таблицу

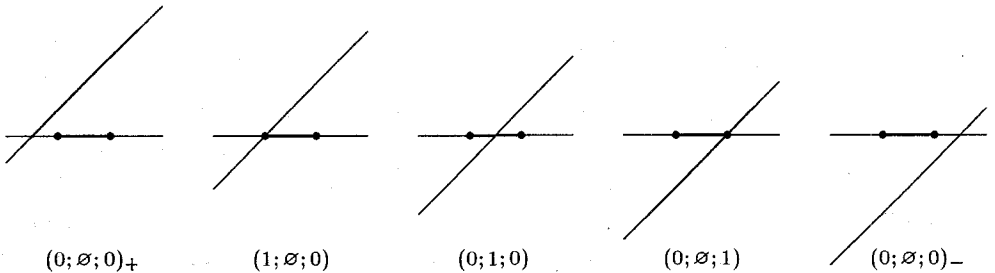
$$\begin{array}{cccc}
 S_1^0 & S_1^1 & & \\
 S_2^0 & S_2^1 & S_2^2 & \\
 S_3^0 & S_3^1 & S_3^2 & S_3^3
 \end{array}$$

Клеточные разбиения  $S_1^0 = S_2^0 = S_3^0$ . Две нульмерные клетки

$$\begin{array}{cc}
 \bullet & \bullet \\
 0 & \infty
 \end{array}$$

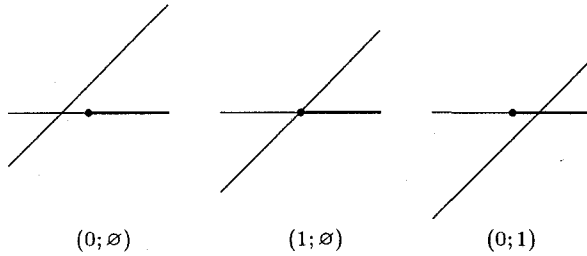
Далее, мы перечисляем все клетки, но не изображаем нульмерную клетку  $\infty$ . Для финитных клеток мы демонстрируем типичные представители.

Клеточное разбиение  $S_1^1$ . Три нульмерные клетки  $\infty, (1; \emptyset; 0), (0; \emptyset; 1)$  и три одномерные клетки  $(0; \emptyset; 0)_+, (0; 1; 0), (0; \emptyset; 0)_-$ .

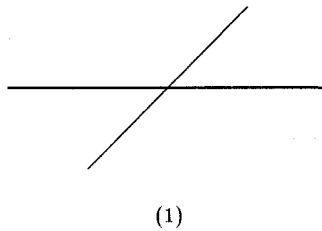




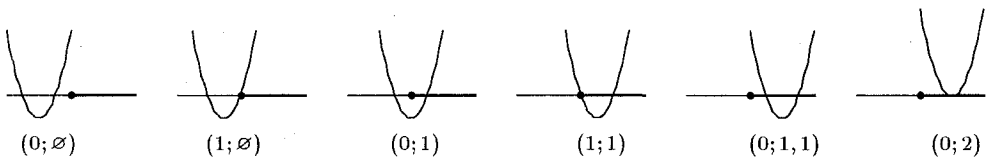
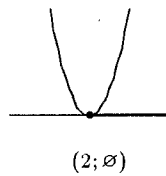
**Клеточное разбиение  $S_2^1$ .** Две нульмерные клетки  $\infty$ ,  $(1; \emptyset)$  и две одномерные клетки  $(0; \emptyset)$ ,  $(0; 1)$ .



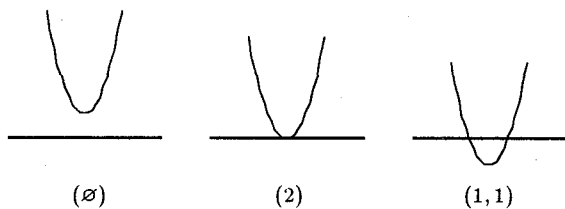
**Клеточное разбиение  $S_3^1$ .** Одна нульмерная клетка  $\infty$  и одна одномерная клетка (1).



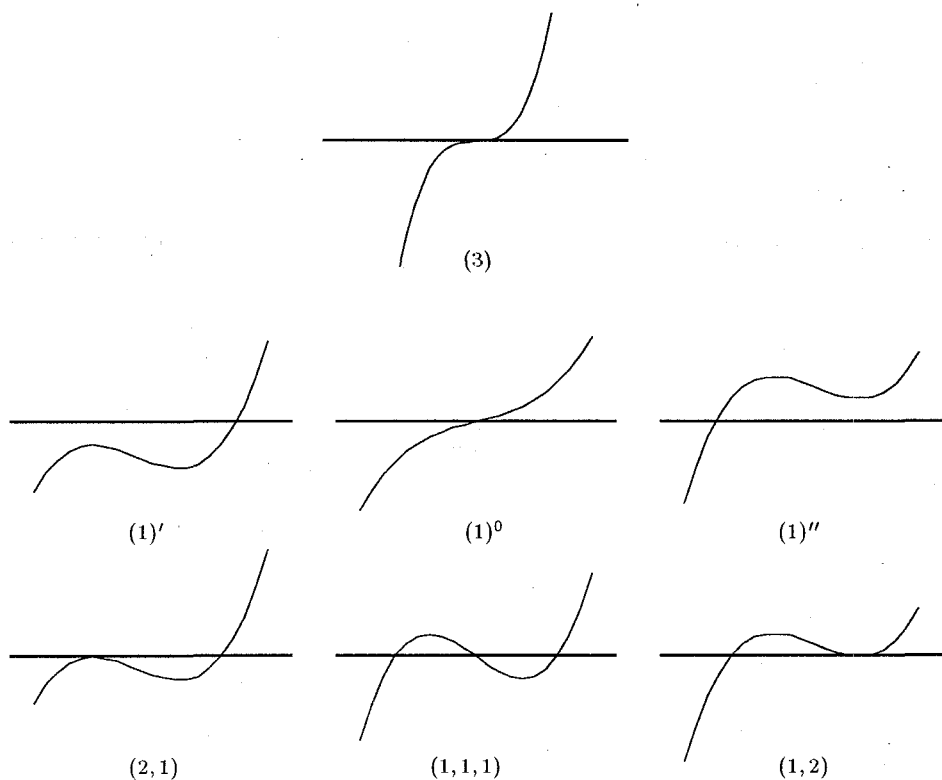
**Клеточное разбиение  $S_2^2$ .** Две нульмерные клетки  $\infty$ ,  $(2; \emptyset)$ , три одномерные клетки  $(1; \emptyset)$ ,  $(1; 1)$ ,  $(0; 2)$  и три двумерные клетки  $(0; \emptyset)$ ,  $(1; 1)$ ,  $(0; 1, 1)$ .



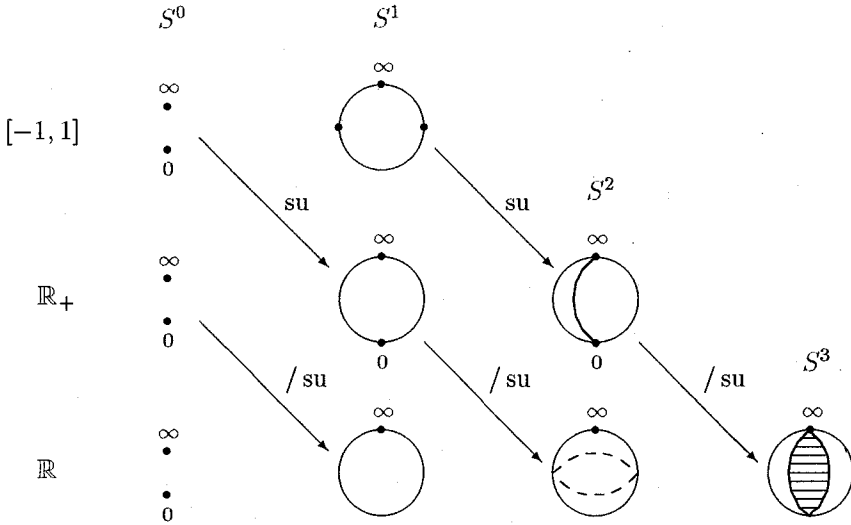
**Клеточное разбиение  $S_3^2$ .** Одна нульмерная клетка  $\infty$ , одна одномерная клетка (2) и две двумерные клетки  $(\emptyset)$ , (1, 1).



**Клеточное разбиение  $S_3^3$ .** Крупное разбиение: одна нульмерная клетка  $\infty$ , одна одномерная клетка (3), две двумерные клетки (2, 1), (1, 2) и две трехмерные клетки (1), (1, 1, 1). Мелкое разбиение: по техническим соображениям крупную трехмерную клетку (1) удобно разбить на две мелкие трехмерные клетки (1)' и (1)'' дополнительной двумерной клеткой (1)<sup>0</sup>, образованной из строго возрастающих симметричных полиномов. Представители клеток мелкого разбиения показаны на следующих семи рисунках.

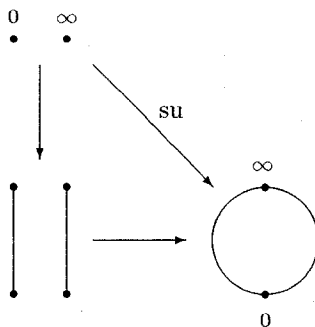


Построенные клеточные разбиения выглядят так:

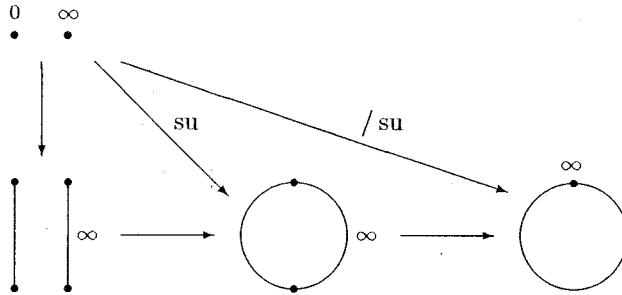


Поясним построение  $S^3_3$ . Возьмем в плоскости  $x = 0$  пространства  $\mathbb{R}^3$  единичный круг  $D^2$ . На рисунке этот круг заштрихован. Нульмерная клетка  $\infty$  отмечена. Одномерной клеткой (3) является граничная окружность  $D^2$  без отмеченной точки. Двумерной клеткой  $(1)^0$  является внутренность  $D^2$ . Двумерной клеткой  $(2, 1)$  является левая открытая полусфера сферы  $S^2$ . Двумерной клеткой  $(1, 2)$  является правая открытая полусфера сферы  $S^2$ . Трехмерной клеткой  $(1)'$  является левая открытая половина шара  $D^3$ . Трехмерной клеткой  $(1)''$  является правая открытая половина шара  $D^3$ . Трехмерной клеткой  $(1, 1, 1)$  является внешность шара  $D^3$ , дополненная бесконечно удаленной точкой пространства  $\mathbb{R}^3$ .

Связь между клеточными разбиениями устанавливается при помощи операции надстройки



и операции надстройки с отмеченной точкой



Напомним операцию надстройки  $su$ . Пусть задано клеточное пространство  $X$ . Построим цилиндр  $X \times [0, 1]$  над  $X$ . Клетки  $X \times [0, 1]$  имеют вид  $e \times 0$ ,  $e \times (0, 1)$ ,  $e \times 1$ , где  $e$  — клетка  $X$ . Надстройка  $su X$  получается из цилиндра  $X \times [0, 1]$  стягиванием основания  $X \times 0$  в нульмерную клетку, которую мы обозначаем через  $0$ , и стягиванием основания  $X \times 1$  в нульмерную клетку, которую мы обозначаем через  $\infty$ . В результате  $su X$  имеет ровно две нульмерные клетки  $0$  и  $\infty$ . Остальные клетки  $su X$  имеют вид  $e \times (0, 1)$ , где  $e$  — клетка  $X$ .

Напомним операцию надстройки с отмеченной точкой  $/su$ . Пусть клеточное пространство  $Y$  имеет отмеченную нульмерную клетку  $\infty$ . Тогда надстройка  $su Y$  имеет отмеченную одномерную клетку  $\infty \times (0, 1)$ . Стянем замыкание  $\infty \times [0, 1]$  одномерной клетки  $\infty \times (0, 1)$  в точку и обозначим полученное клеточное пространство через  $/su Y$ . В нашем случае  $Y = \{0, \infty\}$  или  $Y = su X$ . Поэтому надстройка с отмеченной точкой  $/su Y$  имеет ровно одну нульмерную клетку, которую мы опять обозначаем через  $\infty$ .

## §2. Положительные полиномы

В этом параграфе мы даем единообразное доказательство теорем о представлении положительных полиномов на прямой, полупрямой и отрезке. С другими доказательствами можно познакомиться в работах Полия и Сега [2], Карлина и Шепли [3], Карлина и Стаддена [4], Виденского [5] и Сега [6]. Впервые представление положительных полиномов на отрезке было дано Марковым [7] для полиномов четной степени. В общем случае представление положительных полиномов на отрезке осуществляется при помощи конструкции Бернштейна обобщенных полиномов Чебышева [8].

**Теорема 1.** Пусть вещественный полином

$$f(t) = t^{2m} + a_1 t^{2m-1} + \dots + a_{2m}$$

не имеет корней на  $\mathbb{R}$ . Существуют и единственны точки  $x_1 < x_2 < \dots < x_{2m-1}$  и величина  $r > 0$  такие, что

$$f(t) = \prod_{k=1}^m (t - x_{2k-1})^2 + r \prod_{k=1}^{m-1} (t - x_{2k})^2.$$

**Доказательство.** Обозначим через  $z_1, \dots, z_m$  корни  $f(t)$ , лежащие в верхней комплексной полуплоскости. Зададим дробно-рациональную функцию

$$F(t) = \prod_{k=1}^m \frac{t - z_k}{t - \bar{z}_k}.$$

Тогда точки  $-\infty < x_1 < x_2 < \dots < x_{2m-1} < +\infty$  определяются из соотношения

$$F(x_k) = (-1)^k,$$

где  $k = 1, 2, \dots, 2m - 1$ , а величина  $r > 0$  определяется из соотношения

$$r^2 = \sum_{k=1}^m \operatorname{Im} z_k.$$

Основой доказательства служит соотношение

$$f(t) = (t - z_1) \dots (t - z_m)(t - \bar{z}_1) \dots (t - \bar{z}_m).$$

Зададим

$$\varphi(t) = (t - z_1) \dots (t - z_m)$$

и

$$\psi(t) = (t - \bar{z}_1) \dots (t - \bar{z}_m).$$

Тогда вещественные полиномы

$$u(t) = \frac{\varphi(t) + \psi(t)}{2}$$

и

$$v(t) = \frac{\varphi(t) - \psi(t)}{2i}$$

удовлетворяют равенству

$$f(t) = u^2(t) + v^2(t).$$

Докажем, что  $u(t)$  и  $v(t)$  имеют попарно различные вещественные корни, причем эти корни чередуются, и чередование начинается с корня  $u(t)$ .

Дробно-линейная функция

$$L_k(t) = \frac{t - z_k}{t - \bar{z}_k}$$

переводит вещественную прямую на единичную окружность так, что при изменении  $t$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  аргумент  $\arg L_k(t)$  строго возрастает от 0 до  $2\pi$ . Аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей. Поэтому при изменении  $t$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  аргумент  $\arg F(t)$  строго возрастает от 0 до  $2\pi m$ . Это означает, что на вещественной прямой существуют точки  $-\infty < x_1 < x_2 < \dots < x_{2m-1} < +\infty$ , удовлетворяющие равенствам

$$F(x_k) = (-1)^k$$

при всех  $k = 1, 2, \dots, 2m - 1$ .

Очевидно, нечетные точки  $x_1, x_3, \dots, x_{2m-1}$  являются корнями  $u(t)$ , а четные точки  $x_2, x_4, \dots, x_{2m-2}$  являются корнями  $v(t)$ . Поскольку степень  $u(t)$  равна  $m$ , а степень  $v(t)$  равна  $m - 1$ , найдены все корни указанных полиномов.

Представление  $f(t)$  в виде

$$f(t) = \prod_{k=1}^m (t - x_{2k-1})^2 + r \prod_{k=1}^{m-1} (t - x_{2k})^2$$

получено. Отметим, что

$$r^2 = \sum_{k=1}^m \operatorname{Im} z_k.$$

Докажем единственность данного представления.

Допустим существование еще одного представления

$$f(t) = \prod_{k=1}^m (t - x'_{2k-1})^2 + r' \prod_{k=1}^{m-1} (t - x'_{2k})^2,$$

где  $x'_1 < x'_2 < \dots < x'_{2m-1}$  и  $r' > 0$ . Зададим

$$h(t) = \prod_{k=1}^m (t - x_{2k-1})^2 - \prod_{k=1}^m (t - x'_{2k-1})^2.$$

Поскольку

$$h(t) = r' \prod_{k=1}^{m-1} (t - x'_{2k})^2 - r \prod_{k=1}^{m-1} (t - x_{2k})^2,$$

полином  $h(t)$  имеет степень  $\leq 2m - 2$ . Предположим, что  $h(t) \not\equiv 0$ , и получим противоречие.

Не умаляя общности, можно считать, что  $x'_1 \leq x_1$ . Обозначим через  $\mu_k$  число корней  $h(t)$ , совпадающих с точкой  $x_k$ . Из определения  $h(t)$  следует, что при  $\mu_k \neq 0$  имеет место неравенство  $\mu_k \geq 2$ . Далее, обозначим через  $\nu_k$  число корней  $h(t)$ , попадающих в  $(x_k, x_{k+1})$ . Общее число корней  $h(t)$  на отрезке  $[x_1, x_{2m-1}]$  может быть представлено в виде

$$\frac{\mu_1}{2} + \sum_{k=1}^{2m-2} \left( \frac{\mu_k}{2} + \nu_k + \frac{\mu_{k+1}}{2} \right) + \frac{\mu_{2m-1}}{2}.$$

Очевидно, что  $h(x_k)h(x_{k+1}) \leq 0$  при всех  $1 \leq k \leq 2m - 2$ . Поэтому из равенств  $\mu_k = \mu_{k+1} = 0$  следует неравенство  $h(x_k)h(x_{k+1}) < 0$ , влекущее за собой неравенство  $\nu_k \geq 1$ . Отсюда

$$\sum_{k=1}^{2m-2} \left( \frac{\mu_k}{2} + \nu_k + \frac{\mu_{k+1}}{2} \right) \geq 2m - 2.$$

Если  $\mu_1 \geq 2$ , то  $h(t)$  имеет невозможное число  $2m - 1$  корней на отрезке  $[x_1, x_{2m-1}]$ . Предположим, что  $\mu_1 = 0$ . В этом случае выполняются неравенства  $x'_1 < x_1$  и  $h(x'_1)h(x_1) < 0$ . Из этих неравенств следует, что  $h(t)$  имеет корень на отрезке  $(x'_1, x_1)$ . Поэтому  $h(t)$  имеет невозможное число  $2m - 1$  корней на отрезке  $[x'_1, x_{2m-1}]$ . •

**Теорема 2.** Пусть вещественный полином

$$f(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$$

не имеет корней на  $\mathbb{R}_+$ . Существуют и единственны точки  $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$  и величина  $r > 0$  такие, что при  $n = 2m$  имеет место представление

$$f(t) = \prod_{k=1}^m (t - x_{2k-1})^2 + rt \prod_{k=1}^{m-1} (t - x_{2k})^2,$$

а при  $n = 2m + 1$  имеет место представление

$$f(t) = t \prod_{k=1}^m (t - x_{2k})^2 + r \prod_{k=1}^m (t - x_{2k-1})^2.$$

**Доказательство.** Зададим  $F(t) = f(t^2)$ . Из теоремы 1 следует, что

$$F(t) = \prod_{k=1}^n (t - \lambda_{2k-1})^2 + r \prod_{k=1}^{n-1} (t - \lambda_{2k})^2$$

при некоторых  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{2n-1}$  и  $r > 0$ . Поскольку функция  $F(t)$  четная, получаем

$$F(t) = \prod_{k=1}^n (t + \lambda_{2k-1})^2 + r \prod_{k=1}^{n-1} (t + \lambda_{2k})^2.$$

Из единственности следует, что точки  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{2n-2} < \lambda_{2n-1}$  расположены симметрично относительно нуля, причем  $\lambda_n = 0$ .

Зададим  $x_k = \lambda_{n+k}^2$  при  $1 \leq k \leq n-1$ . В случае  $n = 2m$  имеем

$$F(t) = \prod_{k=1}^m (t^2 - \lambda_{n+2k-1}^2)^2 + rt^2 \prod_{k=1}^{m-1} (t^2 - \lambda_{n+2k}^2)^2.$$

Поэтому

$$f(t) = \prod_{k=1}^m (t - x_{2k-1})^2 + rt \prod_{k=1}^{m-1} (t - x_{2k})^2.$$



В случае  $n = 2m + 1$  имеем

$$F(t) = t^2 \prod_{k=1}^m (t^2 - \lambda_{n+2k}^2)^2 + r \prod_{k=1}^m (t^2 - \lambda_{n+2k-1}^2)^2.$$

Поэтому

$$f(t) = t \prod_{k=1}^m (t - x_{2k})^2 + r \prod_{k=1}^m (t - x_{2k-1})^2.$$

Единственность указанных представлений очевидна. •

**Теорема 3.** Пусть вещественный полином

$$f(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$$

не имеет корней на  $[-1, 1]$ . Существуют и единственны точки  $-1 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < 1$  и величина  $|r| > 1$  такие, что при  $n = 2m$  имеет место представление

$$f(t) = \frac{r+1}{2} \prod_{k=1}^m (t - x_{2k-1})^2 + \frac{r-1}{2} (1-t^2) \prod_{k=1}^{m-1} (t - x_{2k})^2,$$

а при  $n = 2m + 1$  имеет место представление

$$f(t) = \frac{r+1}{2} (1+t) \prod_{k=1}^m (t - x_{2k})^2 + \frac{r-1}{2} (1-t) \prod_{k=1}^m (t - x_{2k-1})^2.$$

При этом  $r > 1$ , если полином  $f(t)$  положителен на отрезке  $[-1, 1]$ , и  $r < -1$ , если полином  $f(t)$  отрицателен на отрезке  $[-1, 1]$ .

**Доказательство.** Обозначим через  $z_1, \dots, z_n$  корни  $f(t)$ . Поскольку точки  $z_1, \dots, z_n$  лежат во внешности единичного отрезка  $[-1, 1]$ , во внутренности единичного круга существуют и единственны точки  $w_1, \dots, w_n$  такие, что

$$\frac{1}{2} \left( w_k + \frac{1}{w_k} \right) = z_k$$

при всех  $k = 1, \dots, n$ . Зададим дробно-рациональную функцию

$$F(w) = \frac{1}{2} \left( \prod_{k=1}^n \frac{w - w_k}{1 - w_k w} + \prod_{k=1}^n \frac{1 - w_k w}{w - w_k} \right).$$

Далее, мы докажем, что при  $-1 \leq t \leq 1$  справедливо представление

$$F(t + i\sqrt{1-t^2}) = \frac{g(t)}{f(t)}$$

с вещественным полиномом  $g(t)$  степени  $n$ . Здесь и далее при  $-1 < t < 1$  корень  $\sqrt{1-t^2}$  предполагается положительным. Утверждается, что точки  $-1 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < 1$  определяются из соотношения

$$\frac{g(x_k)}{f(x_k)} = (-1)^{n-k},$$

где  $k = 1, 2, \dots, n-1$ , а величина  $r$  является старшим коэффициентом  $g(t)$  и определяется из соотношения

$$r = (-1)^n \frac{1}{2} \left( \prod_{k=1}^n w_k + \prod_{k=1}^n w_k^{-1} \right).$$

При  $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  условимся через  $\sqrt{z^2 - 1}$  обозначать то значение корня  $(z^2 - 1)^{1/2}$ , для которого

$$|z + \sqrt{z^2 - 1}| > 1.$$

При таком соглашении функция

$$w = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

отображает внешность единичного отрезка на внешность единичного круга, а функция

$$w = z - \sqrt{z^2 - 1}$$

отображает внешность единичного отрезка на внутренность единичного круга. В частности,

$$w_k = z_k - \sqrt{z_k^2 - 1},$$

где  $k = 1, \dots, n$ .

Рассмотрим точку  $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  и зададим

$$w = z + \sqrt{z^2 - 1}.$$

Пусть для удобства  $\zeta = \sqrt{z^2 - 1}$  и  $\zeta_k = \sqrt{z_k^2 - 1}$ . Легко видеть, что

$$\begin{aligned} (w - w_k)(1 - w_k w) &= -2w_k w(z - z_k), \\ (w - w_k)(w^{-1} - w_k^{-1}) &= 2(1 - z_k z + \zeta_k \zeta), \\ (w - w_k^{-1})(w^{-1} - w_k) &= 2(1 - z_k z - \zeta_k \zeta). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} F(w) &= \frac{1}{2} \left( \prod_{k=1}^n \frac{w - w_k}{1 - w_k w} + \prod_{k=1}^n \frac{1 - w_k w}{w - w_k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \prod_{k=1}^n \frac{(w - w_k)(w - w_k)}{(w - w_k)(1 - w_k w)} + \prod_{k=1}^n \frac{(1 - w_k w)(1 - w_k w)}{(w - w_k)(1 - w_k w)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \prod_{k=1}^n (1 - z_k z + \zeta_k \zeta) + \prod_{k=1}^n (1 - z_k z - \zeta_k \zeta) \right) \frac{1}{f(z)}. \end{aligned}$$

Многочлен

$$\Phi(z, \zeta) = \frac{1}{2} \left( \prod_{k=1}^n (1 - z_k z + \zeta_k \zeta) + \prod_{k=1}^n (1 - z_k z - \zeta_k \zeta) \right)$$

имеет вещественные коэффициенты и степень  $\leq n$  по переменным  $z$  и  $\zeta$ . Относительно переменной  $\zeta$  многочлен  $\Phi(z, \zeta)$  является четной функцией. Поэтому функция

$$g(z) = \Phi(z, \sqrt{z^2 - 1})$$

является вещественным полиномом степени  $\leq n$ . Старший коэффициент  $r$  полинома  $g(z)$  имеет вид

$$r = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(t)}{t^n} = (-1)^n \frac{1}{2} \left( \prod_{k=1}^n w_k + \prod_{k=1}^n w_k^{-1} \right).$$

Поэтому  $|r| > 1$  и полином  $g(t)$  имеет степень  $n$ . Если  $f(t) > 0$  на  $[-1, 1]$ , то четность числа корней, которые  $f(t)$  имеет на отрицательной вещественной полуоси, совпадает с четностью  $n$ , поэтому  $r > 1$ . Если  $f(t) < 0$  на  $[-1, 1]$ , то четность числа корней, которые  $f(t)$  имеет на отрицательной вещественной полуоси, не совпадает с четностью  $n$ , поэтому  $r < -1$ .

По непрерывности из представления

$$F(z + \sqrt{z^2 - 1}) = \frac{g(z)}{f(z)}$$

при  $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  следует, что

$$F(t + i\sqrt{1 - t^2}) = F(t - i\sqrt{1 - t^2}) = \frac{g(t)}{f(t)}$$

при  $-1 \leq t \leq 1$ .

Рассмотрим дробно-рациональную функцию

$$P(w) = \prod_{k=1}^n \frac{w - w_k}{1 - \bar{w}_k w}.$$

Отметим, что  $P(1) = 1$  и  $P(-1) = (-1)^n$ . Поскольку полином  $(w - w_1) \dots (w - w_n)$  имеет вещественные коэффициенты, выполнено равенство

$$P(w) = \prod_{k=1}^n \frac{w - w_k}{1 - \bar{w}_k w}.$$

Пусть  $|w| = 1$ . Тогда легко проверяемое равенство  $P(\bar{w}) = \overline{P(w)}$  означает, что функция  $P(w)$  отображает верхнюю и нижнюю полуокружности симметрично относительно вещественной оси.

Дробно-линейная функция

$$L_k(w) = \frac{w - w_k}{1 - \bar{w}_k w}$$

переводит единичную окружность на единичную окружность. Если точка  $w$  один раз обходит единичную окружность в положительном направлении, то аргумент  $\arg L_k(w)$  строго возрастает и получает приращение  $2\pi$ . Функция  $P(w)$  также переводит единичную окружность на единичную окружность. Однако если точка  $w$  один раз обходит единичную окружность в положительном

направлении, то аргумент  $\arg P(w)$  строго возрастает и получает приращение  $2\pi n$ .

Зададим точки на верхней полуокружности в виде

$$w = t + i\sqrt{1 - t^2},$$

где  $-1 \leq t \leq 1$ . Пусть точка  $t$  движется по единичному отрезку в положительном направлении от точки  $-1$  к точке  $1$ . Тогда точка

$$z = P(t + i\sqrt{1 - t^2})$$

движется по единичной окружности в отрицательном направлении от точки  $(-1)^n$  к точке  $1$ . При этом из соображений симметрии она делает ровно  $n$  полуоборотов. При четном  $n$  точка  $z$  стартует из точки  $1$ , делает  $n/2$  полных оборотов и финиширует в исходной точке  $1$ . При нечетном  $n$  точка  $z$  стартует из точки  $-1$ , делает  $(n - 1)/2$  полных оборотов плюс один полуоборот и финиширует в противоположной точке  $1$ .

Изложенное показывает, что при  $-1 \leq t \leq 1$  дробно-рациональная функция

$$\frac{g(t)}{f(t)} = F(t + i\sqrt{1 - t^2})$$

удовлетворяет неравенству

$$-1 \leq \frac{g(t)}{f(t)} \leq 1$$

и обладает свойством альтернанса Чебышева. А именно, на единичном отрезке существуют точки

$$-1 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1,$$

между которыми функция  $f(t)/g(t)$  строго монотонна и в которых

$$\frac{g(x_k)}{f(x_k)} = (-1)^{n-k}$$

при всех  $k = 0, 1, \dots, n$ .

Зададим функции

$$f^*(t) = \frac{f(t) + g(t)}{2} \quad \text{и} \quad f_*(t) = \frac{f(t) - g(t)}{2}.$$

Очевидно, что

$$f(t) = f^*(t) + f_*(t).$$

Пусть  $n = 2m$ . Тогда

$$f^*(t) = \alpha \prod_{k=1}^m (t - x_{2k-1})^2 \quad \text{и} \quad f_*(t) = \beta (1 - t^2) \prod_{k=1}^{m-1} (t - x_{2k})^2.$$

Пусть  $n = 2m + 1$ . Тогда

$$f^*(t) = \alpha (1 + t) \prod_{k=1}^m (t - x_{2k})^2 \quad \text{и} \quad f_*(t) = \beta (1 - t) \prod_{k=1}^m (t - x_{2k-1})^2.$$

В обоих случаях из сравнения степеней следует, что

$$\alpha = \frac{r+1}{2} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{r-1}{2}.$$

Докажем единственность полученного представления.

Допустим существование еще одного представления с данными  $-1 < x'_1 < x'_2 < \dots < x'_{n-1} < 1$  и  $r' > 1$ . Зададим при  $n = 2m$  полином

$$h(t) = \frac{r+1}{2} \prod_{k=1}^m (t - x_{2k-1})^2 - \frac{r'+1}{2} \prod_{k=1}^m (t - x'_{2k-1})^2,$$

а при  $n = 2m + 1$  — полином

$$h(t) = \frac{r+1}{2} (1+t) \prod_{k=1}^m (t - x_{2k})^2 - \frac{r'+1}{2} (1+t) \prod_{k=1}^m (t - x'_{2k})^2.$$

Предположим, что  $h(t) \neq 0$ , и получим противоречие.

Не умаляя общности, можно считать, что  $x'_1 \leq x_1$ . Пусть для удобства  $x_0 = -1$  и  $x_n = 1$ . Обозначим через  $\mu_k$  число корней  $h(t)$ , совпадающих с точкой  $x_k$ , где  $k = 0, 1, \dots, n$ . Из определения  $h(t)$  следует, что при  $\mu_k \neq 0$

имеет место неравенство  $\mu_k \geq 2$ , где  $k = 1, \dots, n - 1$ . Далее, обозначим через  $\nu_k$  число корней  $h(t)$ , попадающих в отрезок  $(x_k, x_{k+1})$ , где  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ . Общее число корней  $h(t)$  на отрезке  $[-1, 1]$  может быть представлено в виде

$$\mu_0 + \nu_0 + \frac{\mu_1}{2} + \sum_{k=1}^{n-2} \left( \frac{\mu_k}{2} + \nu_k + \frac{\mu_{k+1}}{2} \right) + \frac{\mu_{n-1}}{2} + \nu_{n-1} + \mu_n.$$

Очевидно, что  $h(x_k)h(x_{k+1}) \leq 0$  при  $1 \leq k \leq n - 2$ . Поэтому из равенств  $\mu_k = \mu_{k+1} = 0$  следует неравенство  $h(x_k)h(x_{k+1}) < 0$ , влекущее за собой неравенство  $\nu_k \geq 1$ . Отсюда

$$\sum_{k=1}^{n-2} \left( \frac{\mu_k}{2} + \nu_k + \frac{\mu_{k+1}}{2} \right) \geq n - 2.$$

Покажем, что

$$\mu_0 + \nu_1 + \frac{\mu_1}{2} \geq 2.$$

Ясно, что  $\mu_0 \geq 1$ . Предположим, что  $\mu_1 = 0$ . В этом случае выполняются неравенства  $x'_1 < x_1$  и  $h(x'_1)h(x_1) < 0$ . Из этих неравенств следует, что  $h(t)$  имеет корень на отрезке  $(x'_1, x_1)$ . Поэтому  $\nu_1 \geq 1$ . Однако  $\mu_n \geq 1$ . Поэтому полином  $h(t)$  степени  $\leq n$  имеет невозможное число  $n + 1$  корней на отрезке  $[-1, 1]$ . •

### §3. Полиномы над отрезком

Начиная с этого параграфа, чтобы отличать евклидовое пространство  $\mathbb{R}^n$  от пространства вещественных полиномов

$$f(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n,$$

будем обозначать пространство полиномов через  $\mathbb{R}^n(t)$ . Добавим к пространству  $\mathbb{R}^n(t)$  бесконечно удаленный полином  $\infty(t)$  и обозначим расширенное пространство  $\mathbb{R}^n(t) \cup \infty(t)$  через  $S^n(t)$ .

Зададим полином

$$\omega_n(t, x) = \prod_{i=1}^n (t - x_i),$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ . При  $n = 0$  пустое произведение равно единице.

Зададим при  $n = 2m$  полином

$$\mu_n(t, y, r) = \frac{r+1}{2} \prod_{i=1}^m (t - y_{2i-1})^2 + \frac{r-1}{2} (1-t^2) \prod_{i=1}^{m-1} (t - y_{2i})^2,$$

а при  $n = 2m + 1$  — полином

$$\mu_n(t, y, r) = \frac{r+1}{2} (1+t) \prod_{i=1}^m (t - y_{2i})^2 + \frac{r-1}{2} (1-t) \prod_{i=1}^m (t - y_{2i-1})^2,$$

где  $y \in \mathbb{R}^{n-1}$  и  $r \in \mathbb{R}$ . Выпишем первые четыре полинома

$$\begin{aligned} \mu_1(t, y, r) &= \frac{r+1}{2} (1+t) && + \frac{r-1}{2} (1-t), \\ \mu_2(t, y, r) &= \frac{r+1}{2} (t - y_1)^2 && + \frac{r-1}{2} (1-t^2), \\ \mu_3(t, y, r) &= \frac{r+1}{2} (1+t)(t - y_2)^2 && + \frac{r-1}{2} (1-t)(t - y_1)^2, \\ \mu_4(t, y, r) &= \frac{r+1}{2} (t - y_1)^2 (t - y_3)^2 && + \frac{r-1}{2} (1-t^2)(t - y_2)^2. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение симплекс возрастающих векторов

$$\nabla^n = \{x \in \mathbb{R}^n : -1 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1\}$$

с вершинами

$$\begin{aligned} A_0^n &= (1, 1, 1, \dots, 1), \\ A_1^n &= (-1, 1, 1, \dots, 1), \\ &\vdots \\ A_n^n &= (-1, -1, -1, \dots, -1). \end{aligned}$$

Возьмем полином  $f \in \mathbb{R}^n(t)$ . Если полином  $f(t)$  имеет  $n$  корней на отрезке  $[-1, 1]$ , то однозначным образом

$$f(t) = \omega_n(t, x),$$

где  $x \in \nabla^n$ . Если полином  $f(t)$  имеет  $0 \leq k \leq n - 1$  корней на отрезке  $[-1, 1]$ , то однозначным образом

$$f(t) = \omega_k(t, x) \mu_{n-k}(t, y, r),$$



где  $x \times y \in \nabla^k \times \text{Int } \nabla^{n-1-k}$  и  $|r| > 1$ . Поэтому пространство  $\mathbb{R}^n(t)$  получается в результате склеивания  $1 + 2n$  тел

$$\begin{array}{ccc} & \nabla^n & \\ \nabla^0 \times \nabla^{n-1} \times (-\infty, -1] & \nabla^0 \times \nabla^{n-1} \times [1, \infty) & \\ \nabla^1 \times \nabla^{n-2} \times (-\infty, -1] & \nabla^1 \times \nabla^{n-2} \times [1, \infty) & \\ & \vdots & \\ \nabla^{n-1} \times \nabla^0 \times (-\infty, -1] & \nabla^{n-1} \times \nabla^0 \times [1, \infty) & \end{array}$$

по границам. При этом отождествляются те граничные точки, которым соответствует одинаковый полином  $f(t)$ . Оказывается, в результате склеивания последних  $2n$  тел получается  $n$ -мерный октаэдр с выколотым центром. Поэтому сфера  $S^n(t)$  получается в результате склеивания по границе октаэдра и тетраэдра размерности  $n$ . Нетривиальность конструкции заключается в том, что в размерностях  $n \geq 2$  приклеивающее отображение не является гомеоморфизмом.

Любой евклидовый симплекс является полиэдром с очевидной триангуляцией. Любой полиэдр является клеточным пространством с очевидным клеточным разбиением. Будем грани выпуклых многогранников (ограниченных и неограниченных) понимать в обычном смысле. При этом будем внутренности граней называть клетками соответствующих размерностей.

Пусть  $x \in \mathbb{R}^n$ . Положим

$$|x| = |x_1| + \dots + |x_n|.$$

Зададим октаэдр

$$Q^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}.$$

Обозначим через  $E_1^n, \dots, E_n^n$  орты  $\mathbb{R}^n$ . Ясно, что точки

$$-E_1^n, \dots, -E_n^n, E_1^n, \dots, E_n^n$$

являются вершинами  $Q^n$ . Напомним определение единичного симплекса

$$\Delta^n = \text{conv}\{E_1^{n+1}, E_2^{n+1}, \dots, E_{n+1}^{n+1}\}.$$

Возьмем вектор  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$  с координатами  $\pm 1$ . Зададим симплексы

$$\Delta^{n-1}(\delta) = \text{conv}\{\delta_1 E_1^n, \delta_2 E_2^n, \dots, \delta_n E_n^n\}$$

и

$$Q^n(\delta) = \text{conv}\{0, \delta_1 E_1^n, \delta_2 E_2^n, \dots, \delta_n E_n^n\}.$$

Отметим, что в симплексе  $Q^n(\delta)$  напротив вершины 0 расположена грань  $\Delta^{n-1}(\delta)$ . Будем октаэдр  $Q^n$  рассматривать как полиэдр с триангуляцией, образованной из объединения триангуляций всех симплексов  $Q^n(\delta)$ .

Обозначим через  $\text{alt}(\delta)$  число перемен знака в последовательности  $\delta_1, \dots, \delta_n$ . Зададим  $k = \text{alt}(\delta)$ . Представим точку  $\lambda \in \Delta^{n-1}(\delta)$  в виде

$$\lambda = \sum_{\nu=1}^n \gamma_\nu \delta_\nu E_\nu^n,$$

где  $\gamma \in \Delta^{n-1}$ . Обозначим через  $i_1, \dots, i_k$  номера перемены знака, а через  $j_1, \dots, j_{n-1-k}$  — номера сохранения знака в последовательности  $\delta_1, \dots, \delta_n$ . А именно пусть  $\delta_{i_\nu} \delta_{i_\nu+1} = -1$  при всех  $\nu = 1, \dots, k$  и  $\delta_{j_\nu} \delta_{j_\nu+1} = 1$  при всех  $\nu = 1, \dots, n-1-k$ . Зададим вектор  $x \in \nabla^k$  по правилу

$$x_\nu = -1 + 2(\gamma_1 + \dots + \gamma_{i_\nu}),$$

где  $\nu = 1, \dots, k$ , и вектор  $y \in \nabla^{n-1-k}$  по правилу

$$y_\nu = -1 + 2(\gamma_1 + \dots + \gamma_{j_\nu}),$$

где  $\nu = 1, \dots, n-1-k$ . Мы полагаем

$$T_\delta(\lambda) = x \times y.$$

Легко проверить, что отображение

$$T_\delta: \Delta^{n-1}(\delta) \longrightarrow \nabla^k \times \nabla^{n-1-k}$$

симплициально переводит симплекс  $\Delta^{n-1}(\delta)$  на один из  $C_{n-1}^k$  симплексов размерности  $n-1$  канонической триангуляции  $\nabla^k \times \nabla^{n-1-k}$ .

Пусть  $x \in \mathbb{R}^n$ . Обозначим через  $x_{\leq} \in \mathbb{R}^n$  вектор, образованный из координат вектора  $x$ , расположенных в порядке возрастания. Например,

$$(4, 3, 2, 4, 2, 1)_{\leq} = (1, 2, 2, 3, 4, 4).$$

Отображение  $x \mapsto x_{\leq}$  будет очень полезно.

Напомним операцию приклеивания. Пусть в топологических пространствах  $X$  и  $Y$  заданы подмножества  $A \subset X$  и  $B \subset Y$ . Рассмотрим непрерывное сюръективное отображение

$$\varphi: A \longrightarrow B.$$

Через  $Y \cup_{\varphi} X$  обозначается фактор-пространство прямой суммы  $Y \sqcup X$  по разбиению, классами которого служат одноточечные множества  $x \in X \setminus A$ , одноточечные множества  $y \in Y \setminus B$  и множества  $y \cup \varphi^{-1}(y)$ , где  $y \in B$ . Про топологическое пространство  $Y \cup_{\varphi} X$  говорят, что оно получено в результате приклеивания пространства  $X$  к пространству  $Y$  посредством отображения  $\varphi$ . Если  $X$  и  $Y$  являются клеточными пространствами,  $A$  и  $B$  являются клеточными подпространствами, а  $\varphi$  является клеточным отображением, то пространство  $Y \cup_{\varphi} X$  имеет естественную клеточную структуру.

Зададим симплициальное отображение

$$\varphi: \partial Q^n \longrightarrow \partial \nabla^n,$$

переводящее вершины  $Q^n$  на вершины  $\nabla^n$  при четном  $n$  по правилу

$$\begin{aligned} +E_1^n &\longmapsto A_0^n \\ -E_2^n, -E_1^n &\longmapsto A_1^n \\ +E_3^n, +E_2^n &\longmapsto A_2^n \\ &\vdots \\ -E_n^n, -E_{n-1}^n &\longmapsto A_{n-1}^n \\ +E_n^n &\longmapsto A_n^n \end{aligned}$$

а при нечетном  $n$  по правилу

$$\begin{aligned} -E_1^n &\longmapsto A_0^n \\ +E_2^n, +E_1^n &\longmapsto A_1^n \\ -E_3^n, -E_2^n &\longmapsto A_2^n \\ &\vdots \\ -E_n^n, -E_{n-1}^n &\longmapsto A_{n-1}^n \\ +E_n^n &\longmapsto A_n^n \end{aligned}$$

**Теорема 4.** Сфера  $S^n(t)$  имеет клеточное разбиение  $S_1^n(t)$ , топологически эквивалентное клеточному разбиению  $\nabla^n \cup_\varphi Q^n$ .

**Доказательство.** Зададим отображение

$$\Phi_\nabla: \nabla^n \longrightarrow S^n(t)$$

по правилу

$$\Phi_\nabla: \lambda \longmapsto \omega_n(t, \lambda),$$

где  $\lambda \in \nabla^n$ . Легко видеть, что  $\Phi_\nabla$  является вложением.

Возьмем вектор  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$  с координатами  $\pm 1$ . Зададим вспомогательное отображение

$$F_\delta: Q^n(\delta) \longrightarrow S^n(t)$$

по следующему правилу. Положим  $F_\delta(0) = \infty(t)$ . Пусть  $\lambda \in Q^n(\delta) \setminus 0$ . Положим

$$F_\delta(\lambda) = \omega_k(t, x)\mu_{n-k}(t, y, r),$$

где  $k = \text{alt}(\delta)$ ,  $x \times y = T_\delta(|\lambda|^{-1}\lambda)$  и  $r = |\lambda|^{-1}\delta_n$ .

Зададим теперь отображение

$$\Phi_Q: Q^n \longrightarrow S^n(t)$$

по правилу

$$\Phi_Q(\lambda) = F_\delta(\lambda),$$

где  $\lambda \in Q^n(\delta)$ . Проверим, что  $\Phi_Q(\lambda)$  не зависит от выбора  $\delta$ , при котором  $\lambda \in Q^n(\delta)$ .

Пусть  $\lambda \in Q^n(\delta) \cap Q^n(\delta')$ . Докажем, что  $F_\delta(\lambda) = F_{\delta'}(\lambda)$ . Зададим  $k = \text{alt}(\delta)$  и  $k' = \text{alt}(\delta')$ . Пусть для определенности  $k' \geq k$ . При  $\lambda = 0$  утверждение очевидно, поэтому далее  $\lambda \neq 0$ .

Для доказательства равенства  $F_\delta(\lambda) = F_{\delta'}(\lambda)$  достаточно рассмотреть случай, когда  $\delta$  и  $\delta'$  отличаются только одной координатой. Пусть такая координата имеет номер  $1 \leq p \leq n$ . Из равенства  $\delta'_p = -\delta_p$  следует, что в векторе  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  координата  $\lambda_p = 0$ . В частности, поэтому  $n \geq 2$ . Положим  $x \times y = T_\delta(|\lambda|^{-1}\lambda)$ ,  $x' \times y' = T_{\delta'}(|\lambda|^{-1}\lambda)$  и  $r = |\lambda|^{-1}\delta_n$ . Рассмотрим отдельно случай  $p = 1$ , случай  $2 \leq p \leq n - 1$  и случай  $p = n$ .

Пусть  $p = 1$ . Тогда  $k' = k + 1$ , поэтому

$$\begin{aligned} x' &= (-1, x), \\ y &= (-1, y'). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} F_\delta(\lambda) &= \omega_k(t, x)\mu_{n-k}(t, y, r) \\ &= (t + 1)\omega_k(t, x)\mu_{n-1-k}(t, y', r) \\ &= \omega_{k+1}(t, x')\mu_{n-1-k}(t, y', r) \\ &= F_{\delta'}(\lambda). \end{aligned}$$

Здесь множитель  $t + 1$  из полинома  $\mu_{n-k}(t, y, r)$  переносится в полином  $\omega_{k+1}(t, x')$ .

Пусть  $2 \leq p \leq n - 1$ . Тогда  $k' = k$  или  $k' = k + 2$ . Пусть  $k' = k$ . Тогда

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y. \end{aligned}$$

Поэтому  $F_\delta(\lambda) = F_{\delta'}(\lambda)$ . Пусть  $k' = k + 2$ . Тогда

$$\begin{aligned} x' &= (x_1, \dots, x_{i_{p-2}}, y_{j_{p-1}}, y_{j_p}, x_{i_{p-2}+1}, \dots, x_k), \\ y &= (y'_1, \dots, y'_{j_{p-2}}, y_{j_{p-1}}, y_{j_p}, y'_{j_{p-2}+1}, \dots, y'_{n-3-k}). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} F_\delta(\lambda) &= \omega_k(t, x)\mu_{n-k}(t, y, r) \\ &= (t - y_{j_p})^2 \omega_k(t, x)\mu_{n-2-k}(t, y', r) \\ &= \omega_{k+2}(t, x')\mu_{n-2-k}(t, y', r) \\ &= F_{\delta'}(\lambda). \end{aligned}$$

Здесь множитель  $(t - y_j)^2$  из полинома  $\mu_{n-k}(t, y, r)$  в переносится в полином  $\omega_{k+2}(t, x')$ .

Пусть  $p = n$ . Тогда  $k' = k + 1$ , поэтому

$$\begin{aligned}x' &= (x, 1), \\y &= (y', 1).\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}F_\delta(\lambda) &= \omega_k(t, x)\mu_{n-k}(t, y, r) \\&= (t - 1)\omega_k(t, x)\mu_{n-1-k}(t, y', -r) \\&= \omega_{k+1}(t, x)\mu_{n-1-k}(t, y', -r) \\&= F_{\delta'}(\lambda).\end{aligned}$$

Здесь множитель  $t - 1$  из полинома  $\mu_{n-k}(t, y, r)$  переносится в полином  $\omega_{k+1}(t, x')$ .

Докажем, что отображение  $\Phi_Q$  непрерывно. Для этого достаточно доказать, что для любого  $\delta$  отображение  $F_\delta$  непрерывно. В случае полинома

$$f(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$$

будем использовать обозначение

$$\|f(t)\| = (a_1^2 + \dots + a_n^2)^{1/2}.$$

Очевидно, что

$$\mu_{n-k}(t, y, r) = \mu_{n-k}(t, y, 0) + r \frac{\partial}{\partial r} \mu_{n-k}(t, y, r).$$

При этом многочлен

$$\frac{\partial}{\partial r} \mu_{n-k}(t, y, r)$$

не зависит от переменной  $r$ , имеет степень  $\leq n - 1 - k$  по переменной  $t$  и отличен от тождественного нуля при всех  $y \in \nabla^{n-1-k}$ . Поэтому из соображений компактности следует существование такого  $C > 0$ , что

$$\|\omega_k(t, x)\mu_{n-k}(t, y, r)\| \geq C|r|$$

при всех  $x \times y \in \nabla^k \times \nabla^{n-1-k}$  и при всех достаточно больших  $|r|$ . Отсюда

$$\|F_\delta(\lambda)\| \geq C|\lambda|^{-1}$$

при всех достаточно малых  $\lambda \in Q^n(\delta)$ . Поэтому отображение  $F_\delta$  непрерывно в точке  $\lambda = 0$ . Непрерывность отображения  $F_\delta$  во всех остальных точках очевидна.

Отметим, что

$$\Phi_\nabla(\nabla^n) \cup \Phi_Q(Q^n) = S^n(t)$$

и

$$\Phi_\nabla(\text{Int } \nabla^n) \cap \Phi_Q(\text{Int } Q^n) = \emptyset.$$

При этом

$$\Phi_\nabla(\partial \nabla^n) = \Phi_Q(\partial Q^n).$$

Проверим, что отображение  $\Phi_Q$  инъективно на  $\text{Int } Q^n$ . С этой целью для отображения

$$\Phi_Q: \text{Int } Q^n \longrightarrow S^n(t) \setminus \Phi_\nabla(\nabla^n)$$

построим обратное отображение

$$\Phi_Q^{-1}: S^n(t) \setminus \Phi_\nabla(\nabla^n) \longrightarrow \text{Int } Q^n.$$

Пусть  $f \in \mathbb{R}^n(t) \setminus \Phi_\nabla(\nabla^n)$ . Полином  $f(t)$  имеет  $k \leq n - 1$  корней на отрезке  $[-1, 1]$ . Поэтому

$$f(t) = \omega_k(t, x)\mu_{n-k}(t, y, r),$$

где  $x \times y \in \nabla^k \times \text{Int } \nabla^{n-1-k}$  и  $|r| > 1$ . Зададим вектор  $z = (x, y)_\leq$ . Пусть  $z_0 = -1$  и  $z_n = 1$ . Положим

$$\lambda_{\nu+1} = \frac{z_{\nu+1} - z_\nu}{2},$$

где  $\nu = 0, \dots, n - 1$ . Очевидно,  $\lambda \in \Delta^{n-1}$ . Составим множество  $Y$  из точек  $y_1, \dots, y_{n-1-k}$ . Пусть

$$\varepsilon_\nu = \begin{cases} 1 & \text{при } \lambda_{\nu+1} > 0 \text{ и } z_\nu \in Y, \\ -1 & \text{при } \lambda_{\nu+1} = 0 \text{ или } z_\nu \notin Y, \end{cases}$$

где  $\nu = 1, \dots, n-1$ , и  $\varepsilon_n = \text{sign } r$ . Определим  $\delta_1, \dots, \delta_n$  по правилу

$$\delta_\nu = \varepsilon_\nu \varepsilon_{\nu+1} \dots \varepsilon_n,$$

где  $\nu = 1, \dots, n$ . Тогда

$$\Phi_Q^{-1}(f) = |r|^{-1} \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu \delta_\nu E_\nu^n.$$

Равенство

$$\Phi_\nabla(\partial\nabla^n) = \Phi_Q(\partial Q^n)$$

позволяет определить отображение

$$\tilde{\varphi}: \partial Q^n \longrightarrow \partial\nabla^n$$

по правилу

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = \Phi_\nabla^{-1} \circ \Phi_Q(\lambda).$$

Докажем, что отображение  $\tilde{\varphi}$  симплициально.

Зададим вектор  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$  с координатами  $\pm 1$ . Проверим, что сужение

$$\tilde{\varphi}: \Delta^{n-1}(\delta) \longrightarrow \partial\nabla^n$$

симплициально. Пусть  $k = \text{alt } \delta$ . Определим отображение

$$P_\delta: \nabla^k \times \nabla^{n-1-k} \longrightarrow \partial\nabla^n.$$

Пусть  $x \times y \in \nabla^k \times \nabla^{n-1-k}$ . В случае  $n-k = 2m$  мы полагаем

$$P_\delta(x \times y) = \begin{cases} (x_1, \dots, x_k, y_1, y_1, y_3, y_3, \dots, y_{2m-1}, y_{2m-1}) \leq & \text{при } \delta_n = 1, \\ (x_1, \dots, x_k, -1, y_2, y_2, y_4, y_4, \dots, y_{2m-2}, y_{2m-2}, 1) \leq & \text{при } \delta_n = -1. \end{cases}$$

В случае  $n-k = 2m+1$  мы полагаем

$$P_\delta(x \times y) = \begin{cases} (x_1, \dots, x_k, -1, y_2, y_2, y_4, y_4, \dots, y_{2m}, y_{2m}) \leq & \text{при } \delta_n = 1. \\ (x_1, \dots, x_k, y_1, y_1, y_3, y_3, \dots, y_{2m-1}, y_{2m-1}, 1) \leq & \text{при } \delta_n = -1. \end{cases}$$



Легко проверить, что

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = P_\delta \circ T_\delta(\lambda)$$

при всех  $\lambda \in \Delta^{n-1}(\delta)$ . Поэтому отображение  $\tilde{\varphi}$  симплициально.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что симплициальные отображения  $\varphi$  и  $\tilde{\varphi}$  принимают одинаковые значения на вершинах полиэдра  $\partial Q^n$ . Поэтому

$$\varphi(\lambda) = \Phi_{\nabla}^{-1} \circ \Phi_Q(\lambda)$$

при всех  $\lambda \in \partial Q^n$ .

Зададим отображение

$$\Phi: \nabla^n \sqcup Q^n \longrightarrow S^n(t)$$

по правилу

$$\Phi(\lambda) = \begin{cases} \Phi_{\nabla}(\lambda) & \text{при } \lambda \in \nabla^n, \\ \Phi_Q(\lambda) & \text{при } \lambda \in Q^n. \end{cases}$$

Из компактности  $\nabla^n \sqcup Q^n$  и хаусдорфовости  $S^n(t)$  следует гомеоморфизм

$$S^n(t) = (\nabla^n \sqcup Q^n) / \Phi = \nabla^n \cup_{\varphi} Q^n.$$

Здесь через  $(\nabla^n \sqcup Q^n) / \Phi$  обозначено фактор-пространство прямой суммы  $\nabla^n \sqcup Q^n$  по разбиению на классы эквивалентности  $\Phi^{-1}(f)$ , где  $f \in S^n(t)$ . Из определения отображения  $\Phi$  следует, что сфера  $S^n(t)$  имеет клеточное разбиение  $S_1^n(t)$ , топологически эквивалентное  $\nabla^n \cup_{\varphi} Q^n$ . Теорема доказана. •

Пространство  $\nabla^n \cup_{\varphi} Q^n$  наследует клеточное разбиение от симплекса  $\nabla^n$  и октаэдра  $Q^n$ . Клетками  $\nabla^n \cup_{\varphi} Q^n$  служат все клетки симплекса  $\nabla^n$  и все клетки октаэдра  $Q^n$ , расположенные в его внутренности  $\text{Int } Q^n$ . Поэтому  $\nabla^n \cup_{\varphi} Q^n$  имеет  $1 + 2^n$  клеток размерности  $n$ . Это дает мелкое разбиение  $S_1^n(t)$  с  $1 + 2^n$  клетками размерности  $n$ . Крупное разбиение  $S_1^n(t)$  с  $1 + 2n$  клетками размерности  $n$  получается соединением клеток мелкого разбиения. Первая клетка имеет вид

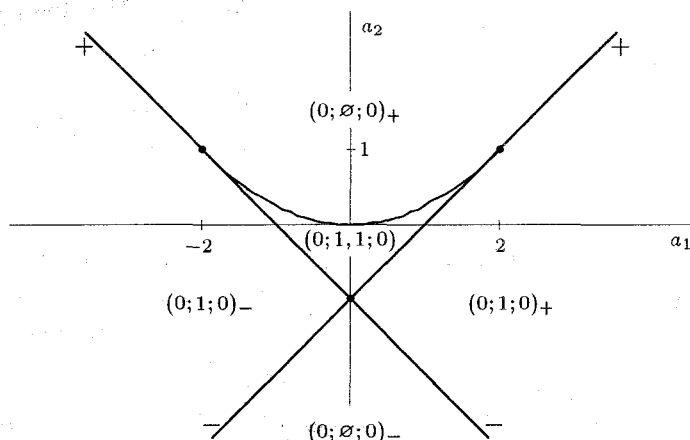
$$(0; \underbrace{1, \dots, 1}_n; 0) \leftrightarrow \text{Int } \nabla^n.$$

Остальные  $2n$  клетки, где  $0 \leq k \leq n-1$  и  $\varepsilon = \pm 1$ , имеют вид

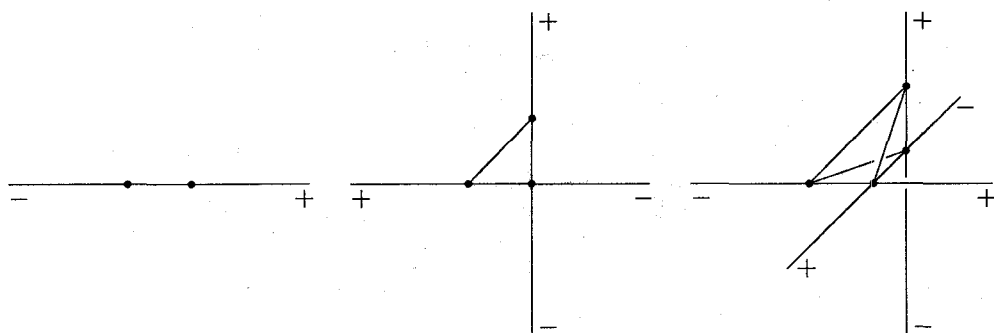
$$(0; \underbrace{1, \dots, 1}_k; 0)_\varepsilon \leftrightarrow \text{Int}\{\bigcup Q^n(\delta)\}.$$

Здесь объединение берется по всем  $\delta$  таким, что  $\text{alt } \delta = k$  и  $\delta_n = \varepsilon$ .

Например, клеточное разбиение  $S_1^2(t)$  показано на рисунке.



Аналогичным образом можно построить модель клеточного разбиения  $S_1^n(t)$  для любого  $n$ . Возьмем в пространстве  $\mathbb{R}^n$  тетраэдр и проведем через его  $n$  стороны ориентированные прямые так, как это показано на картинках.



Не умаляя общности, эти прямые можно считать параллельными осям координат. Ориентация осуществляется по закону альтернанса, при этом на последней прямой ориентация положительна.

Построим мелкое клеточное разбиение с  $1 + 2^n$  клетками размерности  $n$ . Первую клетку дает тетраэдр. Остальные  $2^n$  клетки строятся так. На каждой прямой берется луч с началом в вершине тетраэдра. Выбор лучей определяется выбором знаков  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ , которыми помечены лучи. На взятых лучах на расстоянии  $r > 0$  от начала ставится точка и на этих точках строится  $(n - 1)$ -мерный симплекс. При увеличении  $r$  от 0 до  $\infty$  такие симплексы заматают открытое множество  $e(\delta)$  пространства  $\mathbb{R}^n$ , которое является одной из  $2^n$  клеток размерности  $n$ .

Построим крупное клеточное разбиение с  $1 + 2n$  клетками размерности  $n$ . Клетке

$$(0; \underbrace{1, \dots, 1}_n; 0) \leftrightarrow \nabla^n$$

соответствует тетраэдр. Клетке

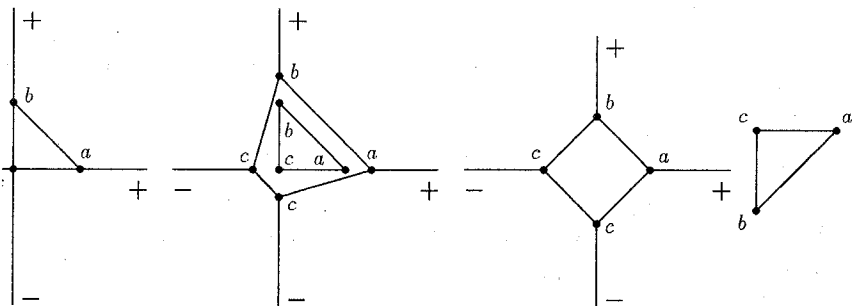
$$(0; \underbrace{1, \dots, 1}_k; 0)_- \leftrightarrow \nabla^k \times \nabla^{n-1-k} \times (-\infty, -1],$$

где  $0 \leq k \leq n - 1$ , соответствует соединению тех  $C_{n-1}^k$  клеток  $e(\delta)$ , у которых  $\text{alt } \delta = k$  и  $\delta_n = -1$ . Клетке

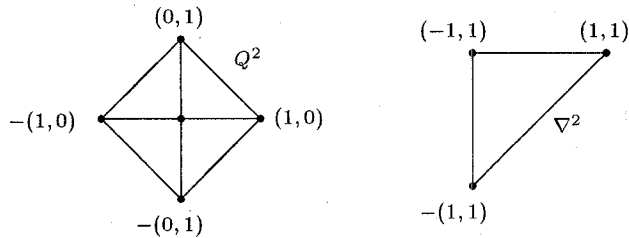
$$(0; \underbrace{1, \dots, 1}_k; 0)_+ \leftrightarrow \nabla^k \times \nabla^{n-1-k} \times [1, \infty),$$

где  $0 \leq k \leq n - 1$ , соответствует соединению тех  $C_{n-1}^k$  клеток  $e(\delta)$ , у которых  $\text{alt } \delta = k$  и  $\delta_n = 1$ .

В случае  $n = 2$  превращение модели клеточного разбиения  $S_1^2(t)$  в клеточное разбиение  $\nabla^n \cup_\varphi Q^n$  показано на рисунках



Инвертируя внешность квадрата в его внутренность, получаем



Теперь по правилу

$$\begin{aligned} (1,0) &\mapsto (1,1) \\ -(1,0) &\mapsto (-1,1) \\ -(0,1) &\mapsto (-1,-1) \\ (0,1) &\mapsto (-1,-1) \end{aligned}$$

приклеиваем квадрат  $Q^2$  к треугольнику  $\nabla^2$ .

#### §4. Полиномы над полупрямой

Зададим конус возрастающих положительных векторов

$$\mathbb{R}_{\leq +}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n\}.$$

Рассмотрим вектор  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$  с координатами  $\pm 1$ . Обозначим через  $\mathbb{R}^n(\delta)$  конус с образующими  $\delta_1 E_1^n, \dots, \delta_n E_n^n$ . Представим положительное полупространство

$$\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$$

в виде объединения

$$\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+ = \bigcup_{\delta: \delta_n=1} \mathbb{R}^n(\delta).$$

Гранями полупространства  $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$  мы называем грани всех конусов  $\mathbb{R}^n(\delta)$ , участвующих в этом объединении. В частности,  $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$  имеет  $2^{n-1}$  клеток размерности  $n$ .

Зададим при  $n = 2m$  полином

$$\rho_n(t, y, r) = \prod_{k=1}^m (t - y_{2k-1})^2 + rt \prod_{k=1}^{m-1} (t - y_{2k})^2,$$

а при  $n = 2m + 1$  полином

$$\rho_n(t, y, r) = t \prod_{k=1}^m (t - y_{2k})^2 + r \prod_{k=1}^m (t - y_{2k-1})^2.$$

где  $y \in \mathbb{R}^{n-1}$  и  $r \in \mathbb{R}$ . Выпишем первые четыре полинома

$$\begin{aligned} \rho_1(t, y, r) &= t && + r, \\ \rho_2(t, y, r) &= (t - y_1)^2 && + rt, \\ \rho_3(t, y, r) &= t(t - y_2)^2 && + r(t - y_1)^2, \\ \rho_4(t, y, r) &= (t - y_1)^2(t - y_3)^2 + rt(t - y_2)^2. \end{aligned}$$

Возьмем полином  $f \in \mathbb{R}^n(t)$ . Если полином  $f(t)$  имеет  $n$  корней на  $\mathbb{R}_+$ , то однозначным образом

$$f(t) = \omega_n(t, x),$$

где  $x \in \mathbb{R}_{\leq+}^n$ . Если полином  $f(t)$  имеет  $k \leq n-1$  корней на  $\mathbb{R}_+$ , то однозначным образом

$$f(t) = \omega_k(t, x) \rho_{n-k}(t, y, r),$$

где  $x \times y \in \mathbb{R}_{\leq+}^k \times \text{Int } \mathbb{R}_{\leq+}^{n-1-k}$  и  $r > 0$ . Поэтому пространство  $\mathbb{R}^n(t)$  получается в результате склеивания  $1 + n$  тел

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}_{\leq+}^n \\ &\mathbb{R}_{\leq+}^0 \times \mathbb{R}_{\leq+}^{n-1} \times \mathbb{R}_+ \\ &\mathbb{R}_{\leq+}^1 \times \mathbb{R}_{\leq+}^{n-2} \times \mathbb{R}_+ \\ &\vdots \\ &\mathbb{R}_{\leq+}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\leq+}^0 \times \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

по их границам.

Зададим симплекс возрастающих положительных векторов

$$\nabla_0^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = 1\}$$

с вершинами

$$B_0^n = (1, 1, 1, \dots, 1, 1)$$

$$B_1^n = (0, 1, 1, \dots, 1, 1)$$

⋮

$$B_{n-1}^n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1).$$

Пусть отображение  $\phi$  переводит вершины  $Q^{n-1}$  на вершины  $\nabla_0^{n-1}$  при четном  $n$  по правилу

$$\begin{aligned} +E_1^{n-1} &\longmapsto B_0^n \\ -E_2^{n-1}, -E_1^{n-1} &\longmapsto B_1^n \\ +E_3^{n-1}, +E_2^{n-1} &\longmapsto B_2^n \\ &\vdots \\ +E_{n-1}^{n-1}, +E_{n-2}^{n-1} &\longmapsto B_{n-2}^n \\ -E_{n-1}^{n-1} &\longmapsto B_{n-1}^n \end{aligned}$$

а при нечетном  $n$  по правилу

$$\begin{aligned} -E_1^{n-1} &\longmapsto B_0^n \\ +E_2^{n-1}, +E_1^{n-1} &\longmapsto B_1^n \\ -E_3^{n-1}, -E_2^{n-1} &\longmapsto B_2^n \\ &\vdots \\ +E_{n-1}^{n-1}, +E_{n-2}^{n-1} &\longmapsto B_{n-2}^n \\ -E_{n-1}^{n-1} &\longmapsto B_{n-1}^n \end{aligned}$$

Продолжим  $\phi$  до кусочно-линейного отображения

$$\phi: \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \partial \mathbb{R}_{\leq}^n$$

по правилу

$$\phi \left( \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \delta_i E_i^{n-1} \right) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \phi(\delta_i E_i^{n-1}),$$

где  $\lambda \in \mathbb{R}_+^{n-1}$ . Полезно заметить, что  $\mathbb{R}^{n-1} = \partial(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+)$ .

**Теорема 5.** *Имеет место гомеоморфизм*

$$\mathbb{R}^n(t) = \mathbb{R}_{\leq+}^n \cup_{\phi} (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+).$$

При этом  $S_2^n(t) = \text{su } S_1^{n-1}(t)$ .

**Доказательство.** Сформулированная теорема доказывается аналогично теореме 4. Поясним доказательство равенства  $S_2^n = \text{su } S_1^{n-1}$ . Зададим полиэдр

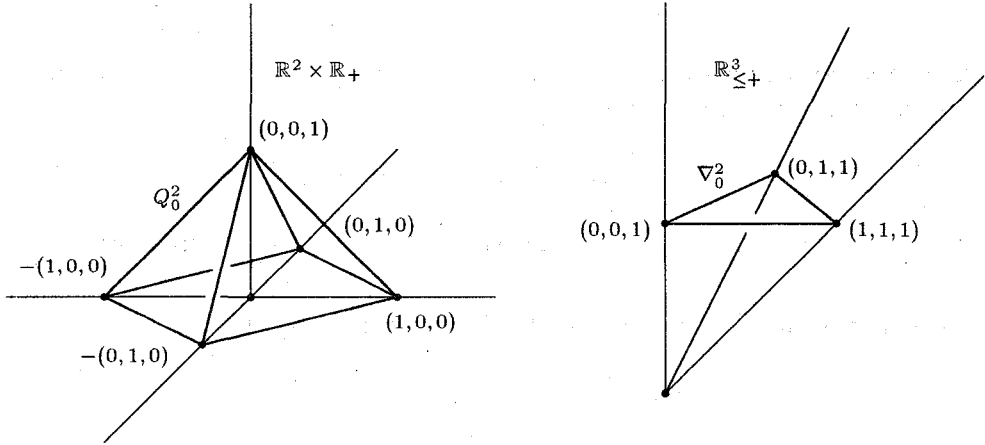
$$Q_0^{n-1} = \bigcup_{\delta: \delta_n=1} \Delta^{n-1}(\delta)$$

с очевидной триангуляцией. При каждом  $r > 0$  симплициальное отображение

$$\phi: r\partial Q_0^{n-1} \longrightarrow r\partial \nabla_0^{n-1}$$

приклеивает  $rQ_0^{n-1}$  к  $r\nabla_0^{n-1}$  точно так же, как симплициальное отображение  $\varphi$  приклеивает  $Q_0^{n-1}$  к  $\nabla_0^{n-1}$ . Факторизация при  $r = 0$  и  $r = \infty$  приводит к равенству  $S_2^n = \text{su } S_1^{n-1}$ .

На рисунке изображен случай  $n = 3$ .



В этом случае приклеивающее отображение действует по правилу

$$\begin{aligned} - (1, 0, 0) &\longmapsto (1, 1, 1) \\ (1, 0, 0) &\longmapsto (0, 1, 1) \\ (0, 1, 0) &\longmapsto (0, 1, 1) \\ -(0, 1, 0) &\longmapsto (0, 0, 1) \end{aligned}$$

Теорема доказана. •

Соотношение  $S_2^n(t) = \text{su } S_1^{n-1}(t)$  преобразует крупное разбиение  $S_1^{n-1}(t)$  в мелкое разбиение  $S_2^n(t)$ . В частности, это мелкое разбиение образовано из  $1 + 2(n - 1)$  клеток размерности  $n$ . Другое очевидное мелкое разбиение  $S_2^n(t)$  образовано из  $1 + 2^{n-1}$  клеток размерности  $n$ . Крупное разбиение  $S_2^n(t)$  получается соединением клеток мелкого разбиения  $S_2^n(t)$ . Перечислим  $1 + n$  клетки размерности  $n$  крупного разбиения  $S_2^n(t)$ . Первой клеткой является  $\text{Int } \mathbb{R}_{\leq +}^n$ . Остальными  $n$  клетками при  $0 \leq k \leq n - 1$  являются  $\text{Int} \{ \bigcup \mathbb{R}^n(\delta) \}$ , где объединение берется по всем  $\delta$  таким, что  $\text{alt } \delta = k$  и  $\delta_n = 1$ .

### §5. Полиномы над прямой

Введем в рассмотрение клин возрастающих векторов

$$\mathbb{R}_{\leq}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \leq \dots \leq x_n\}.$$

Зададим полином

$$\sigma_{2m}(t, y, r) = \prod_{k=1}^m (t - y_{2k-1})^2 + r \prod_{k=1}^{m-1} (t - y_{2k})^2,$$

где  $y \in \mathbb{R}^{2m-1}$  и  $r \in \mathbb{R}$ . Выпишем первые три полинома

$$\begin{aligned} \sigma_2(t, y, r) &= (t - y_1)^2 && + r, \\ \sigma_4(t, y, r) &= (t - y_1)^2(t - y_3)^2 && + r(t - y_2)^2, \\ \sigma_6(t, y, r) &= (t - y_1)^2(t - y_3)^2(t - y_5)^2 && + r(t - y_2)^2(t - y_4)^2. \end{aligned}$$

Возьмем полином  $f \in \mathbb{R}^n(t)$ . Если полином  $f(t)$  имеет  $n$  корней на  $\mathbb{R}$ , то однозначным образом

$$f(t) = \omega_n(t, x),$$

где  $x \in \mathbb{R}_{\leq}^n$ . Если полином  $f(t)$  имеет  $k \leq n - 1$  корней на  $\mathbb{R}$ , то  $k$  и  $n$  имеют одинаковую четность и  $f(t)$  однозначно представим в виде

$$f(t) = \omega_k(t, x) \sigma_{n-k}(t, y, r),$$



где  $x \times y \in \mathbb{R}_{\leq}^k \times \text{Int } \mathbb{R}_{\leq}^{n-1-k}$  и  $r > 0$ . Поэтому пространство  $\mathbb{R}^n(t)$  получается в результате склеивания  $1 + [n/2]$  тел по границам. При  $n = 2m$  склеиваются тела

$$\begin{aligned} & \mathbb{R}_{\leq}^{2m} \\ & \mathbb{R}_{\leq}^0 \times \mathbb{R}_{\leq}^{2m-1} \times \mathbb{R}_+ \\ & \mathbb{R}_{\leq}^2 \times \mathbb{R}_{\leq}^{2m-3} \times \mathbb{R}_+ \\ & \vdots \\ & \mathbb{R}_{\leq}^{2m-2} \times \mathbb{R}_{\leq}^1 \times \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

При  $n = 2m + 1$  склеиваются тела

$$\begin{aligned} & \mathbb{R}_{\leq}^{2m+1} \\ & \mathbb{R}_{\leq}^1 \times \mathbb{R}_{\leq}^{2m-1} \times \mathbb{R}_+ \\ & \mathbb{R}_{\leq}^3 \times \mathbb{R}_{\leq}^{2m-3} \times \mathbb{R}_+ \\ & \vdots \\ & \mathbb{R}_{\leq}^{2m-1} \times \mathbb{R}_{\leq}^1 \times \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

В случае полиномов над прямой структура пространства  $\mathbb{R}^n(t)$  инвариантна относительно сдвига. Чтобы воспользоваться этой инвариантностью, зададим полином

$$\psi_{2m-1}(t, y, r) = \sigma_{2m}[t, (0, y), r],$$

где  $y \in \mathbb{R}^{2m-2}$ , и полином

$$\psi_{2m}(t, y, r) = t\sigma_{2m}(t, y, r),$$

где  $y \in \mathbb{R}^{2m-1}$ . Выпишем первые четыре полинома

$$\begin{aligned} \psi_1(t, y, r) &= t^2 && + r, \\ \psi_2(t, y, r) &= t(t - y_1)^2 && + rt, \\ \psi_3(t, y, r) &= t^2(t - y_2)^2 && + r(t - y_1)^2, \\ \psi_4(t, y, r) &= t(t - y_1)^2(t - y_3)^2 && + rt(t - y_2)^2. \end{aligned}$$

Возьмем полином  $f \in \mathbb{R}^n(t)$ . Если полином  $f(t)$  имеет  $n$  корней на прямой  $\mathbb{R}$ , то  $f(t)$  однозначно представим в виде

$$f(t) = (t - \tau)\omega_{n-1}(t - \tau, x),$$

где  $\tau \in \mathbb{R}$  и  $x \in \mathbb{R}_{\leq+}^{n-1}$ . Если полином  $f(t)$  имеет  $\leq n-2$  корней на прямой  $\mathbb{R}$ , то  $f(t)$  однозначно представим в виде

$$f(t) = \omega_k(t - \tau, x) \psi_{n-1-k}(t - \tau, y, r),$$

где  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $x \times y \in \mathbb{R}_{\leq+}^k \times \text{Int } \mathbb{R}_{\leq+}^{n-2-k}$  и  $r > 0$ . Здесь  $0 \leq k \leq n-2$ . Отметим, что при нечетном  $n-1-k$  полином  $f(t)$  имеет  $k$  корней на прямой  $\mathbb{R}$ , а при четном  $n-1-k$  полином  $f(t)$  имеет  $k+1$  корней на прямой  $\mathbb{R}$ .

Сдвиг  $\tau$  однозначно определяется полиномом  $f(t)$ . Обозначим через  $\mathbb{R}_\tau^{n-1}(t)$  множество полиномов  $f \in \mathbb{R}^n(t)$ , у которых сдвиг равен  $\tau$ . Все  $\mathbb{R}_\tau^{n-1}(t)$  идентичны. При этом  $\mathbb{R}_\tau^{n-1}(t)$  получается в результате склеивания  $n$  тел

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}_{\leq+}^{n-1} \\ \mathbb{R}_{\leq+}^0 \times \mathbb{R}_{\leq+}^{n-2} \times \mathbb{R}_+ \\ \mathbb{R}_{\leq+}^1 \times \mathbb{R}_{\leq+}^{n-3} \times \mathbb{R}_+ \\ \vdots \\ \mathbb{R}_{\leq+}^{n-2} \times \mathbb{R}_{\leq+}^0 \times \mathbb{R}_+ \end{array}$$

по их границам. Правило склеивания полностью совпадает с определенным в §4. В частности, фигурирующее в следующей теореме приклеивающее отображение  $\phi$  определено там же.

**Теорема 6.** *Имеет место гомеоморфизм*

$$\mathbb{R}^n(t) = \{\mathbb{R}_{\leq+}^{n-1} \cup_\phi (\mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}_+)\} \times \mathbb{R}.$$

При этом  $S_3^n(t) = / \text{su } S_2^{n-1}(t)$ .

**Доказательство.** Гомеоморфизм

$$\mathbb{R}^n(t) = \{\mathbb{R}_{\leq+}^{n-1} \cup_\phi (\mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}_+)\} \times \mathbb{R}$$

следует из инвариантности пространства полиномов над прямой относительно сдвига. При всех  $\tau$  сфера  $\mathbb{R}_\tau^{n-1}(t) \cup \infty(t)$  имеет клеточное разбиение  $S_2^{n-1}(t)$ , совпадающее при  $n \geq 2$  с надстройкой  $\text{su } S_1^{n-2}(t)$ . Еще раз используя инвариантность относительно сдвига, получаем желаемое равенство  $S_3^n(t) = / \text{su } S_2^{n-1}(t)$ . Факторизация  $/$  возникает из-за того, что евклидово пространство имеет только одну бесконечно удаленную точку. Теорема доказана. •

Соотношение  $S_3^n(t) = /su S_2^{n-1}(t)$  преобразует крупное разбиение  $S_2^{n-1}(t)$  в мелкое разбиение  $S_3^n(t)$ . В частности, это мелкое разбиение образовано из  $n$  клеток размерности  $n$ . Другие два очевидные мелкие разбиения образованы из  $1 + 2(n - 2)$  и  $1 + 2^{n-2}$  клеток размерности  $n$  соответственно. Крупное разбиение  $S_3^n(t)$  получается соединением клеток мелкого разбиения  $S_3^n(t)$ . Перечислим  $1 + [n/2]$  клетки размерности  $n$ . Первой клеткой является  $\text{Int } \mathbb{R}_{\leq +}^{n-1} \times \mathbb{R}$ . Остальными  $[n/2]$  клетками при  $k = n - 2, n - 4, \dots, n - 2[n/2]$  являются  $\text{Int}\{\bigcup \mathbb{R}^{n-1}(\delta)\} \times \mathbb{R}$ , где объединение берется по всем  $\delta$  таким, что  $k - 1 \leq \text{alt } \delta \leq k$  и  $\delta_{n-1} = 1$ .

§6. Клеточные гомеоморфизмы

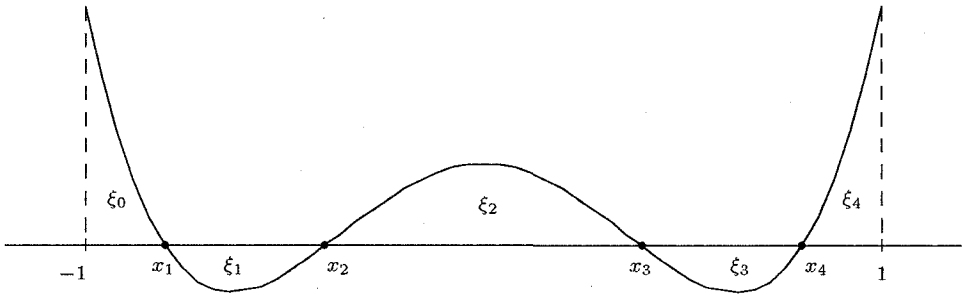
Пусть  $x \in \nabla^n$ . Зададим

$$\xi_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega_n(t, x) dt,$$

где  $i = 0, 1, \dots, n$ . Здесь для единообразия  $x_0 = -1$  и  $x_{n+1} = 1$ . отображение

$$x \mapsto \xi$$

понятно из рисунка



Зададим симплекс альтернированных векторов

$$\Delta_{\pm}^n = \text{conv}\{(-1)^{n+1} E_1^{n+1}, (-1)^n E_2^{n+1}, \dots, E_{n+1}^{n+1}\}.$$

Положим

$$\mathcal{L}_{\nabla}(x) = \frac{\xi}{|\xi|}.$$

Очевидно, что  $\mathcal{L}_\nabla(x) \in \Delta_\pm^n$ . Легко видеть, что отображение

$$\mathcal{L}_\nabla: \nabla^n \longrightarrow \Delta_\pm^n$$

является клеточным.

Пусть  $\lambda \in Q^n \setminus 0$ . Возьмем такое  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ , что  $\lambda \in Q^n(\delta) \setminus 0$ . Пусть  $k = \text{alt}(\delta)$  и  $r = |\lambda|^{-1}\delta_n$ . Используя определенное в §3 отображение

$$T_\delta: \Delta^{n-1}(\delta) \longrightarrow \nabla^k \times \nabla^{n-1-k},$$

зададим  $x \times y = T_\delta(|\lambda|^{-1}\lambda)$ .

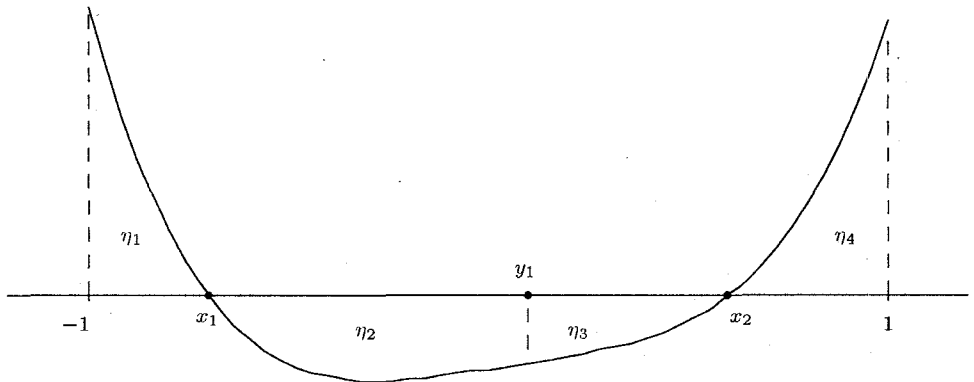
Положим  $z = (x, y)_\leq$ . Напомним, что оператор  $(\cdot)_\leq$  располагает координаты вектора в порядке возрастания. Зададим

$$\eta_i = \int_{z_{i-1}}^{z_i} \omega_k(t, x) \mu_{n-k}(t, y, r) dt,$$

где  $i = 1, \dots, n$ . Здесь для единообразия  $z_0 = -1$  и  $z_n = 1$ . Отображение

$$\lambda \longmapsto \eta$$

понятно из рисунка



Положим

$$\mathcal{L}_Q(\lambda) = \frac{1}{|r|} \frac{\eta}{|\eta|}.$$

Очевидно, что  $\mathcal{L}_Q(\lambda) \in Q^n(\delta) \setminus 0$ . При  $\lambda = 0$  положим  $\mathcal{L}_Q(0) = 0$ . Легко видеть, что отображение

$$\mathcal{L}_Q: Q^n \longrightarrow Q^n.$$

является клеточным.

**Теорема 7. Отображения**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\nabla: \nabla^n &\longrightarrow \Delta_{\pm}^n, \\ \mathcal{L}_Q: Q^n &\longrightarrow Q^n \end{aligned}$$

являются клеточными гомеоморфизмами.

**Доказательство.** Поскольку оба отображения являются клеточными, достаточно проверить, что оба отображения являются биекциями. Эта проверка осуществляется индукцией по размерности клеток. Для нульмерных клеток утверждение очевидно. Пусть для остова размерности  $k - 1$  биективность доказана. Каждую клетку размерности  $k$  можно рассматривать как открытое подмножество пространства  $\mathbb{R}^k$ . Оба отображения являются бесконечно дифференцируемыми в клетках размерности  $k$ . Далее, будет доказано, что оба отображения являются невырожденными в клетках размерности  $k$ . Очевидно, каждая замкнутая  $k$ -мерная клетка гомеоморфна  $k$ -мерному шару  $D^k$ . Теперь по индукции биективность на остове размерности  $k$  вытекает из следующего утверждения. Пусть задано непрерывное отображение

$$F: D^k \longrightarrow D^k$$

такое, что  $F(S^{k-1}) \subset S^{k-1}$  и  $F(\text{Int } D^k) \subset \text{Int } D^k$ . Если сужение  $F|_{S^{k-1}}$  является гомеоморфизмом, а сужение  $F|_{\text{Int } D^k}$  является локальным гомеоморфизмом, то отображение  $F$  является гомеоморфизмом. Действительно, при сделанных предположениях сужение

$$F|_{\text{Int } D^k}: \text{Int } D^k \longrightarrow \text{Int } D^k$$

является универсальным накрытием, поэтому это сужение является гомеоморфизмом. •

**Замечание.** Доказательство невырожденности отображений  $\mathcal{L}_\nabla$  и  $\mathcal{L}_Q$  во всех точках  $k$ -мерных клеток составляет вычислительную часть сформулированной теоремы, исключительно громоздко и дано в приложении.

Обозначим через  $\Psi_{\nabla}$  сквозное отображение

$$\Psi_{\nabla}: \Delta_{\pm}^n \xrightarrow{\mathcal{L}_{\nabla}^{-1}} \nabla^n \xrightarrow{\Phi_{\nabla}} S^n(t),$$

а через  $\Psi_Q$  — сквозное отображение

$$\Psi_Q: Q^n \xrightarrow{\mathcal{L}_Q^{-1}} Q^n \xrightarrow{\Phi_Q} S^n(t),$$

где отображения  $\Phi_{\nabla}$  и  $\Phi_Q$  определены в доказательстве теоремы 4. Равенство

$$\Psi_{\nabla}(\partial\Delta_{\pm}^n) = \Psi_Q(\partial Q^n)$$

позволяет определить сквозное отображение

$$\psi: \partial Q^n \longrightarrow \partial\Delta_{\pm}^n$$

по правилу

$$\psi(\lambda) = \Psi_{\nabla}^{-1} \circ \Psi_Q(\lambda).$$

Пусть для точек  $\mu \in \partial Q^n$  и  $\lambda \in \partial\Delta_{\pm}^n$  выполнено равенство  $\lambda = \psi(\mu)$ . В этом случае точки  $\mu$  и  $\lambda$  мы называем эквивалентными.

Отображение  $\psi$  является симплициальным и переводит вершины октаэдра  $Q^n$  на вершины симплекса  $\Delta_{\pm}^n$  при четном  $n$  по правилу

$$\begin{aligned} +E_1^n & \longmapsto +E_1^{n+1} \\ -E_2^n, -E_1^n & \longmapsto -E_2^{n+1} \\ +E_3^n, +E_2^n & \longmapsto +E_3^{n+1} \\ & \vdots \\ -E_n^n, -E_{n-1}^n & \longmapsto -E_n^{n+1} \\ +E_n^n & \longmapsto +E_{n+1}^{n+1} \end{aligned}$$

а при нечетном  $n$  по правилу

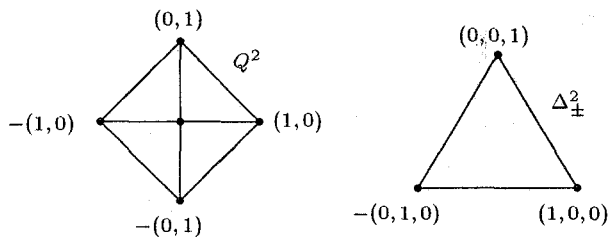
$$\begin{aligned}
 -E_1^n &\longmapsto -E_1^{n+1} \\
 +E_2^n, +E_1^n &\longmapsto +E_2^{n+1} \\
 -E_3^n, -E_2^n &\longmapsto -E_3^{n+1} \\
 &\vdots \\
 -E_n^n, -E_{n-1}^n &\longmapsto -E_n^{n+1} \\
 +E_n^n &\longmapsto +E_{n+1}^{n+1}
 \end{aligned}$$

В результате мы приходим к еще одной реализации

$$S_1^n(t) = \Delta_{\pm}^n \cup_{\psi} Q^n$$

клеточного разбиения  $S_1^n(t)$ .

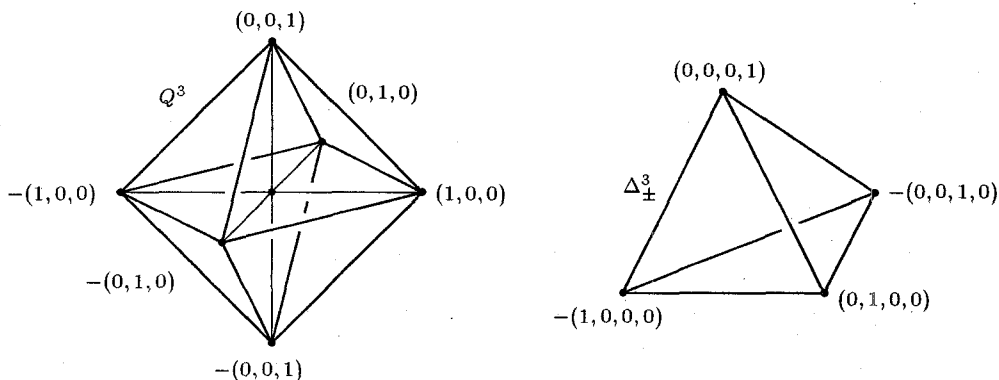
Клеточное разбиение  $S_1^2(t)$  получается в результате приклеивания квадрата к треугольнику



посредством симплициального отображения

$$\begin{aligned}
 (1,0) &\longmapsto (1,0,0) \\
 -(1,0) &\longmapsto -(0,1,0) \\
 -(0,1) &\longmapsto -(0,1,0) \\
 (0,1) &\longmapsto (0,0,1)
 \end{aligned}$$

Клеточное разбиение  $S_1^3(t)$  получается в результате приклеивания октаэдра к тетраэдру

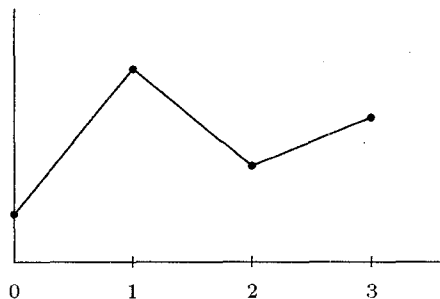
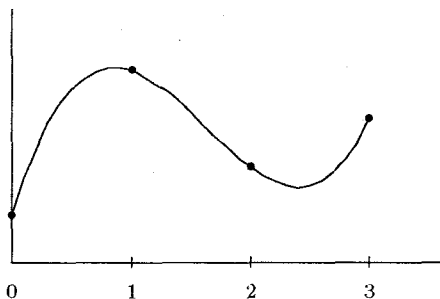


посредством симплициального отображения

$$\begin{aligned}
 -(1,0,0) &\mapsto -(1,0,0,0) \\
 (1,0,0) &\mapsto (0,1,0,0) \\
 (0,1,0) &\mapsto (0,1,0,0) \\
 -(0,1,0) &\mapsto -(0,0,1,0) \\
 -(0,0,1) &\mapsto -(0,0,1,0) \\
 (0,0,1) &\mapsto (0,0,0,1)
 \end{aligned}$$

### §7. Линеаризация полиномов

Под линеаризацией полиномов мы подразумеваем превращение полинома в ломаную. Естественно, ломаная должна непрерывно зависеть от полинома и разным полиномам должны соответствовать разные ломаные. Простейшая линеаризация возникает, когда мы полиному степени  $n$  ставим в соответствие  $n$ -звенную ломаную с узлами в точках  $0, 1, \dots, n$ .





Связь этой линеаризации с интерполяцией Лагранжа очевидна.

Во многих задачах интерес представляют только экстремальные значения полинома. Более того, во многих задачах интерес представляет только относительное расположение этих экстремальных значений. Экстремальные значения полинома сложно зависят от его коэффициентов. Поэтому возникает желание заменить полином на более простую функцию, имеющую такие же минимальные и максимальные значения или имеющую такое же их относительное расположение. Наиболее удобной оказывается кусочно-линейная функция с единичным шагом по оси абсцисс. При этом основная проблема заключается в том, что полином может иметь слишком мало экстремальных точек. Поясним решение задачи линеаризации на примере полиномов третьей степени.

**Пример.** Рассмотрим пространство полиномов

$$F(t) = \frac{1}{3}t^3 + a_1t^2 + a_2t + a_3,$$

нормированных условием

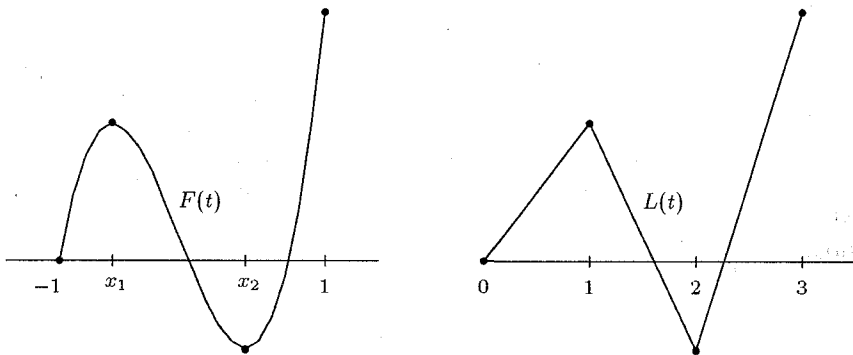
$$F(-1) = 0.$$

Обозначим через  $k$  число корней производной  $f(t) = F'(t)$  на отрезке  $[-1, 1]$ .

В случае  $k = 2$  производная имеет вид

$$f(t) = (t - x_1)(t - x_2).$$

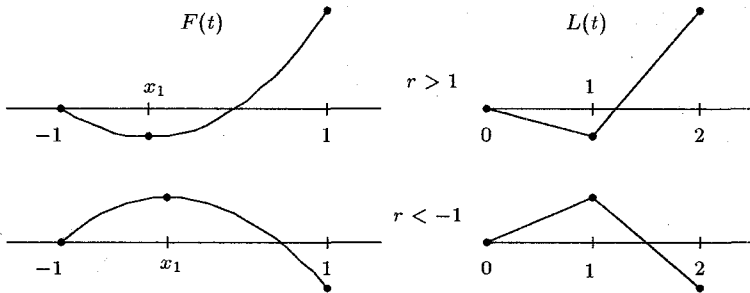
Линеаризация полинома  $F(t)$  показана на рисунке



В случае  $k = 1$  производная имеет вид

$$f(t) = (t - x_1)(t + r).$$

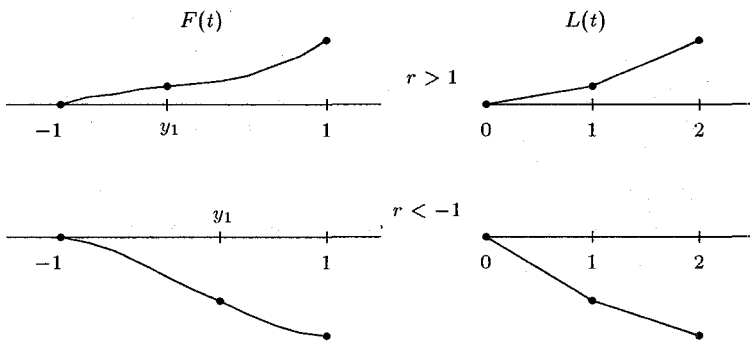
Линеаризация полинома  $F(t)$  показана на рисунке



В случае  $k = 0$  производная имеет вид

$$f(t) = \frac{r+1}{2}(t - y_1)^2 + \frac{r-1}{2}(1-t^2).$$

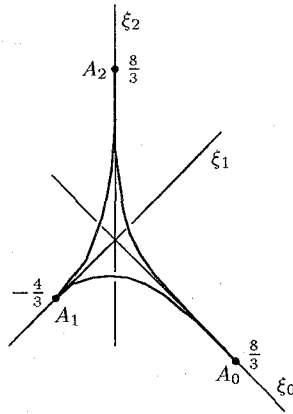
Линеаризация полинома  $F(t)$  показана на рисунке



Итак, что при  $k = 2$  полином  $F(t)$  линеаризуется трехзвенной ломаной, а при  $0 \leq k \leq 1$  полином  $F(t)$  линеаризуется двухзвенной ломаной. Поясним расположение этих ломаных в пространствах  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}^2$ . Сопоставим при  $k = 2$  полиному  $F(t)$  вектор

$$\xi = \begin{bmatrix} L(1) - L(0) \\ L(2) - L(1) \\ L(3) - L(2) \end{bmatrix}.$$

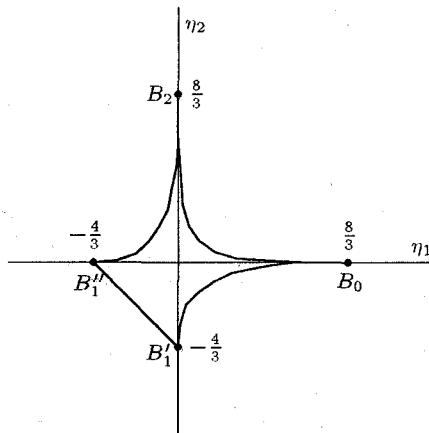
В пространстве  $\mathbb{R}^3$  векторы  $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2)$  заполняют криволинейный треугольник



Сопоставим при  $0 \leq k \leq 1$  полиному  $F(t)$  вектор

$$\eta = \begin{bmatrix} L(1) - L(0) \\ L(2) - L(1) \end{bmatrix}$$

На плоскости  $\mathbb{R}^2$  векторы  $\eta = (\eta_1, \eta_2)$  заполняют внешность криволинейного четырехугольника



Граница криволинейного четырехугольника этой внешности не принадлежит. Если к внешности добавить границу, то окажется, что некоторым полиномам будут одновременно соответствовать трехзвенные и двухзвенные

ломанные. Естественно, такие ломанные необходимо отождествить. Геометрически это отождествление выражается в приклеивании внешности криволинейного четырехугольника к криволинейному треугольнику. При этом кривые  $[B_0, B'_1]$ ,  $[B''_1, B_2]$ ,  $[B_2, B_0]$  приклеиваются к геометрически идентичным кривым  $[A_0, A_1]$ ,  $[A_1, A_2]$ ,  $[A_2, A_0]$ , а отрезок  $[B'_1, B''_1]$  стягивается в точку  $A_1$ .

Теперь мы изложим процедуру линеаризации полиномов для произвольного  $n$ . При этом мы отдельно рассматриваем тетраэдр  $\Delta_{\pm}^n$  и октаэдр  $Q^n$ .

Пусть  $\lambda \in \Delta_{\pm}^n$ . Зададим

$$z = \mathcal{L}_{\nabla}^{-1}(\lambda)$$

и сопоставим точке  $\lambda$  полином

$$F_{\lambda}(t) = \int_{-1}^t \omega_n(\tau, z) d\tau.$$

Одновременно точке  $\lambda$  сопоставим  $(n+1)$ -звенную ломаную  $L_{\lambda}(t)$ , принимающую в узлах  $0, 1, \dots, n+1$  значения

$$\begin{aligned} L_{\lambda}(0) &= 0, \\ L_{\lambda}(1) &= \lambda_0, \\ L_{\lambda}(2) &= \lambda_0 + \lambda_1, \\ &\vdots \\ L_{\lambda}(n+1) &= \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1}. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$F_{\lambda}(z_i) = \rho L_{\lambda}(i)$$

при всех  $i = 0, 1, \dots, n+1$ , где

$$\rho = \int_{-1}^1 |f_{\lambda}(t)| dt.$$

Здесь для единообразия  $z_0 = -1$  и  $z_{n+1} = 1$ . Точки  $z_0, z_1, \dots, z_{n+1}$  назовем узловыми точками полинома  $F_{\lambda}(t)$ , соответствующими точке  $\lambda \in \Delta_{\pm}^n$ .

Пусть  $\lambda \in Q^n \setminus 0$ . Зададим

$$\gamma = \mathcal{L}_Q^{-1}(\lambda)$$

и сопоставим точке  $\lambda$  полином

$$F_\lambda(t) = \int_{-1}^t \omega_k(\tau, x) \mu_{n-k}(\tau, y, r) d\tau,$$

где  $\gamma \in Q^n(\delta)$ ,  $k = \text{alt}(\delta)$ ,  $x \times y = T_\delta(|\gamma|^{-1}\gamma)$  и  $r = |\gamma|^{-1}\delta_n$ . Одновременно точке  $\lambda$  сопоставим  $n$ -звенную ломаную  $L_\lambda(t)$ , принимающую в узлах  $0, 1, \dots, n$  значения

$$\begin{aligned} L_\lambda(0) &= 0, \\ L_\lambda(1) &= \lambda_1, \\ L_\lambda(2) &= \lambda_1 + \lambda_2, \\ &\vdots \\ L_\lambda(n) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n. \end{aligned}$$

Положим  $z = (x, y)_{\leq}$ . Очевидно, что

$$F_\lambda(z_i) = \rho L_\lambda(i),$$

при всех  $i = 0, 1, \dots, n$ , где

$$\rho = |r| \int_{-1}^1 |f_\lambda(t)| dt.$$

Здесь для единообразия  $z_0 = -1$  и  $z_n = 1$ . Точки  $z_0, z_1, \dots, z_n$  назовем узловыми точками полинома  $F_\lambda(t)$ , соответствующими точке  $\lambda \in Q^n \setminus 0$ . Точке  $\lambda = 0$  сопоставим бесконечно удаленный полином  $F_0(t) = \infty(t)$  и нулевую ломаную  $L_0(t) = 0$ .

Итак, каждому ненулевому  $\lambda \in \Delta_{\pm}^n \sqcup Q^n$  мы сопоставили полином

$$F_\lambda(t) = \frac{1}{n+1} t^{n+1} + \dots,$$

нормированный условием  $F_\lambda(-1) = 0$ , и ломаную  $L_\lambda(t)$ , нормированную условием  $L_\lambda(0) = 0$ . В случае эквивалентных точек  $\mu \in \partial Q^n$  и  $\lambda \in \partial \Delta_\pm^n$  имеет место равенство полиномов

$$F_\mu(t) = F_\lambda(t).$$

Поэтому для эквивалентных точек  $\mu$  и  $\lambda$  мы отождествляем ломаные  $L_\mu(t)$  и  $L_\lambda(t)$ .

По построению для любого ненулевого  $\lambda \in \Delta_\pm^n \sqcup Q^n$  существует такое  $\rho > 0$ , что последовательность максимальных и минимальных значений ломаной  $\rho L_\lambda(t)$  совпадает с последовательностью максимальных и минимальных значений полинома  $F_\lambda(t)$  на отрезке  $[-1, 1]$ . Здесь кратности, с которыми функции  $L_\lambda(t)$  и  $F_\lambda(t)$  принимают свои экстремальные значения, не учитываются. Отметим, что без учета кратностей эквивалентные ломаные имеют одинаковые последовательности максимальных и минимальных значений.

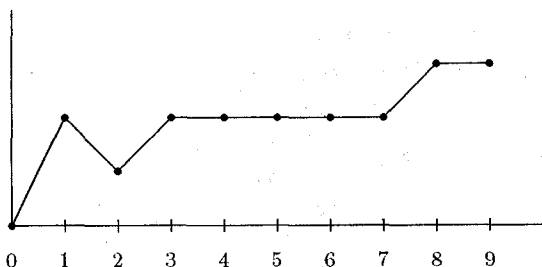
В дальнейшем нам потребуется вычислять кратности узловых точек полинома  $F_\lambda(t)$  через кратности узловых точек ломаной  $L_\lambda(t)$ .

В случае полинома  $F(t)$  кратностью  $\text{mul}(F, z)$  точки  $z$  будем называть кратность  $z$  как корня  $F'(t)$ . Если точка  $z$  не является корнем  $F'(t)$ , то ее кратность считается нулевой.

Определим кратность узловой точки  $k$  ломаной  $L(t)$ . Подберем такое минимальное  $i \leq k$  и такое максимальное  $j \geq k$ , что

$$L(i) = \dots = L(k) = \dots = L(j).$$

Кратностью  $\text{mul}(L, k)$  узловой точки  $k$  ломаной  $L(t)$  назовем число  $j - i + 1$ . Например, у ломаной



Кратности точек 0, 1, 2 равны единице, кратности точек 3, 4, 5, 6, 7 равны пяти, а кратности точек 8, 9 равны двум.

Пусть  $\lambda \in \Delta_{\pm}^n \sqcup \text{Int } Q^n$  и  $\lambda \neq 0$ . Следующие соотношения легко проверяются. Если узловая точка  $z_k \in (-1, 1)$  не является экстремальной точкой полинома  $F_{\lambda}(t)$ , то

$$\text{mul}(F_{\lambda}, z_k) = 2 \left\lceil \frac{\text{mul}(L_{\lambda}, k)}{2} \right\rceil.$$

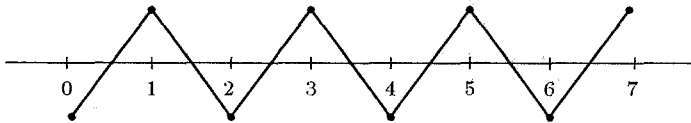
Если узловая точка  $z_k \in (-1, 1)$  является экстремальной точкой полинома  $F_{\lambda}(t)$ , то

$$\text{mul}(F_{\lambda}, z_k) = 2 \left\lceil \frac{\text{mul}(L_{\lambda}, k) - 1}{2} \right\rceil + 1.$$

Если  $z_k = \pm 1$ , то  $\text{mul}(F_{\lambda}, z_k) = \text{mul}(L_{\lambda}, k) - 1$ .

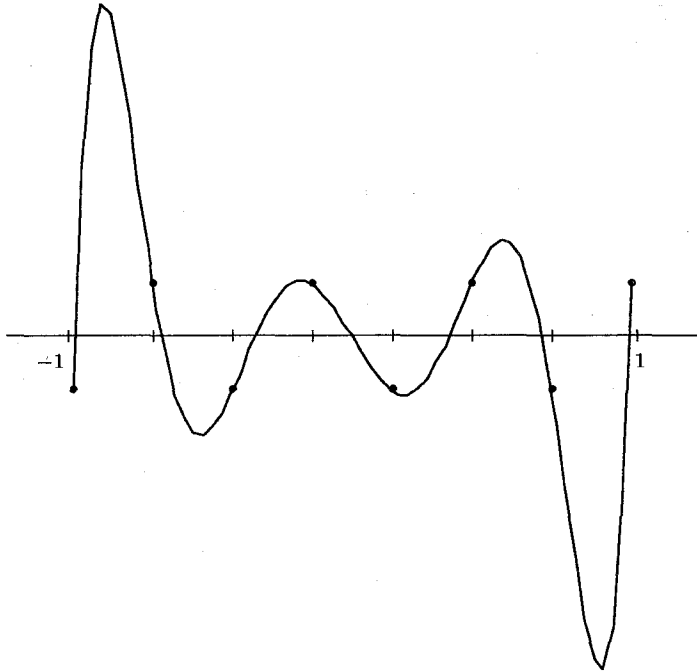
### §8. Интерполяция без осцилляции

Интерполяция Лагранжа с равномерным шагом обладает существенным недостатком. Для большого числа данных интерполяционный полином сильно осциллирует. Осцилляция интерполяционного полинома Лагранжа, изображенного на рисунке в начале предыдущего параграфа, еще не заметна. Однако для данных

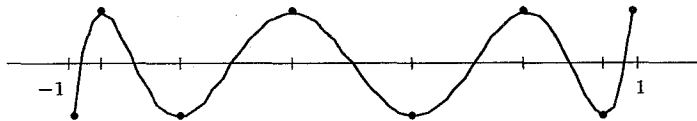


интерполяционный полином Лагранжа уже осциллирует на концах проме-

жугка.



Для взятых нами пилообразных данных осцилляцию интерполяционного полинома Лагранжа легко устраняет полином Чебышева.



Разумеется, при этом шаг интерполяции перестает быть равномерным.

Будем данные  $L_0, L_1, \dots, L_{n+1}$  называть альтернированными, если

$$(L_{i+1} - L_i)(L_i - L_{i-1}) < 0$$

при всех  $i = 1, \dots, n$ .



**Теорема 8.** Для любых альтернированных данных  $L_0, L_1, \dots, L_{n+1}$  существует единственный полином

$$F(t) = a_0 t^{n+1} + a_1 t^n + \dots + a_{n+1}$$

с критическими точками  $-1 < x_1 < \dots < x_n < 1$  такой, что

$$F(x_i) = L_i$$

при всех  $i = 0, 1, \dots, n + 1$ . Здесь  $x_0 = -1$  и  $x_{n+1} = 1$ .

**Доказательство.** Сопоставим альтернированным данным  $L_0, L_1, \dots, L_{n+1}$  точку

$$\lambda = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} L_1 - L_0 \\ L_2 - L_1 \\ \vdots \\ L_{n+1} - L_n \end{bmatrix},$$

где

$$\rho = L_{n+1} - L_n + L_{n-1} - \dots - (-1)^n L_0.$$

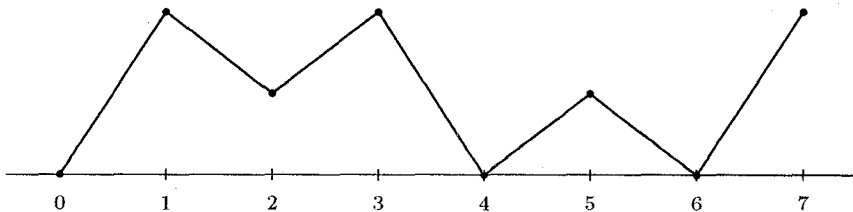
Очевидно, что  $\lambda \in \text{Int } \Delta_{\pm}^n$ . Сопоставим точке  $\lambda$  полином  $F_\lambda(t)$ . Тогда искомый полином  $F(t)$  представим в виде

$$F(t) = L_0 + \rho F_\lambda(t).$$

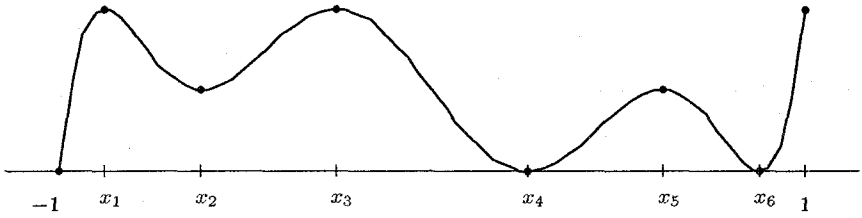
Единственность полинома  $F(t)$  очевидна. •

**Замечание.** Построенный в доказательстве теоремы полином служит естественным обобщением полинома Чебышева. Каждой точке внутренности  $\text{Int } \Delta_{\pm}^n$  однозначным образом сопоставляется такой обобщенный полином. При этом барицентру  $\Delta_{\pm}^n$  сопоставляется классический полином.

**Пример.** Для альтернированных данных



обобщенный полином Чебышева имеет вид



### §9. Корни и экстремумы

Рассмотрим полиномы вида

$$f(t) = (t - a_1) \dots (t - a_m)(t - x_1) \dots (t - x_n).$$

Корни  $a_1 < a_2 < \dots < a_m$  фиксированы. Корни  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  свободны. Нас интересует зависимость экстремумов полинома  $f(t)$  от его свободных корней  $x_1, \dots, x_n$ . Тривиальные случаи  $m = 0$  и  $m = 1$  интереса не представляют, поэтому далее  $m \geq 2$ .

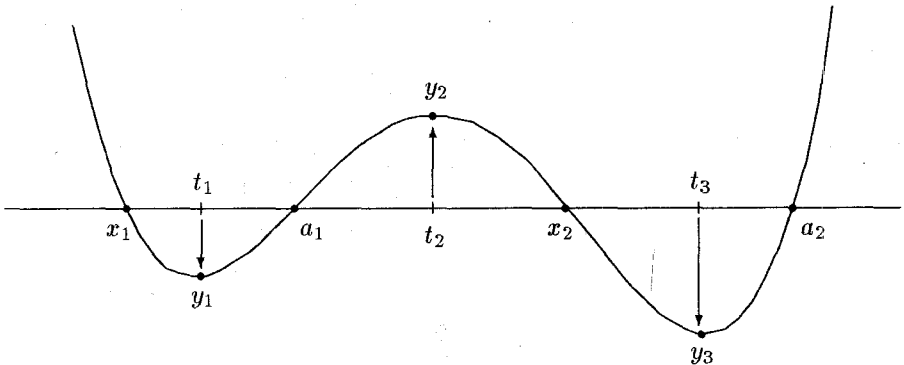
Расположим  $n + m - 1$  корней производной  $f'(t)$  в порядке возрастания

$$t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n+m-1}$$

и зададим

$$y_k = (-1)^{n+m-k} f(t_k),$$

где  $1 \leq k \leq n + m - 1$ . Отметим, что  $y_k \geq 0$  при всех  $1 \leq k \leq n + m - 1$ . На рисунке изображен случай  $m = n = 2$ .



Зададим отображение

$$F: \mathbb{R}_{\leq}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+^{n+m-1}$$

по правилу

$$F: (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (y_1, \dots, y_{n+m-1}).$$

По своей природе множество  $F(\mathbb{R}_{\leq}^n)$  является алгебраическим многообразием. Функции

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n+m-1} (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_k} y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_k},$$

где  $1 \leq k \leq n+m-1$ , симметричны относительно корней  $t_1, t_2, \dots, t_{n+m-1}$  полинома  $f'(t)$ , а коэффициенты полинома  $f'(t)$  рационально выражаются через корни  $x_1, \dots, x_n$ . Это приводит к системе алгебраических уравнений

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n+m-1} (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_k} y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_k} = H_k(x_1, \dots, x_n),$$

где  $1 \leq k \leq n+m-1$ . После исключения  $x_1, \dots, x_n$  остаются алгебраические уравнения

$$\left. \begin{aligned} G_1(y_1, \dots, y_{n+m-1}) &= 0, \\ &\vdots \\ G_{m-1}(y_1, \dots, y_{n+m-1}) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

которым удовлетворяют  $y_1, \dots, y_{n+m-1}$ . В пространстве  $\mathbb{R}^{n+m-1}$  эти уравнения задают алгебраическое многообразие. Мы изучаем часть  $F(\mathbb{R}_{\leq}^n)$  этого многообразия, которая лежит в положительном конусе  $\mathbb{R}_+^{n+m-1}$ .

**Пример.** Рассмотрим полиномы

$$f(t) = (t^2 - 1)(t - x).$$

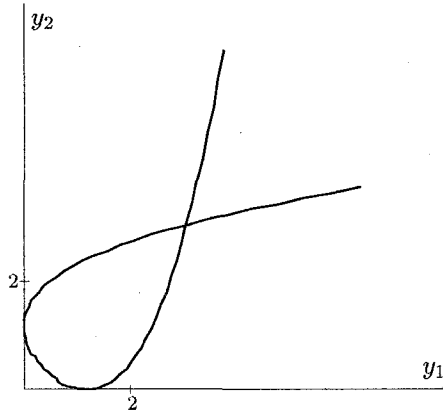
В этом случае кривая  $F(\mathbb{R})$  задается уравнением

$$G(y_1, y_2) = 0,$$

где

$$G(y_1, y_2) = 78732y_1^3y_2^3 - 531441(y_1^4 + y_2^4) - 236196y_1y_2(y_1^2 + y_2^2) + 30618y_1^2y_2^2 + 1492992(y_1^2 + y_2^2) + 4313088y_1y_2 - 1048576.$$

В положительном квадранте кривая  $F(\mathbb{R})$  имеет вид



В частности, кривая  $F(\mathbb{R})$  содержит вложенную окружность. Любопытно отметить, что замена

$$\begin{aligned} X &= y_1y_2, \\ Y &= y_1^2 + y_2^2 \end{aligned}$$

приводит к сингулярной кубической кривой

$$78732X^3 + 1093500X^2 + 4313088X - 236196XY - 531441Y^2 + 1492992Y - 1048576 = 0$$

с двойной точкой

$$X = \frac{2^8}{3^3}, \quad Y = \frac{2^9}{3^3}.$$

В старших размерностях система алгебраических уравнений, связывающая экстремумы  $y_1, \dots, y_{n+m-1}$ , исключительно громоздка. Топология многообразия  $F(\mathbb{R}_+^n)$  выявляется переходом к кусочно-линейным объектам.

Зададим отображение

$$\Lambda: \mathbb{R}_+^n \longrightarrow \mathbb{R}_+^{n+m-1}$$

по правилу

$$\Lambda: x \mapsto \Delta\{(a, x)_{\leq}\},$$

где через  $\Delta$  обозначена операция взятия первых разностей

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}).$$

**Теорема 9.** *Имеет место гомеоморфизм  $F(\mathbb{R}_{\leq}^n) = \Lambda(\mathbb{R}_{\leq}^n)$ .*

**Доказательство.** Пусть  $x \in \mathbb{R}_{\leq}^n$ . Зададим

$$\begin{aligned} \alpha &= \min\{a_1, \dots, a_m, x_1, \dots, x_n\}, \\ \beta &= \max\{a_1, \dots, a_m, x_1, \dots, x_n\}. \end{aligned}$$

При помощи замены переменной

$$t \mapsto \frac{\beta + \alpha}{2} + \frac{\beta - \alpha}{2}t$$

преобразуем полином

$$f(t) = (t - a_1) \dots (t - a_m)(t - x_1) \dots (t - x_n)$$

в полином

$$g(t) = \left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)^{n+m} (t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_{n+m}),$$

где

$$-1 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n+m-1} \leq \lambda_{n+m} = 1.$$

Далее, определим

$$-1 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_{n+m-1} \leq 1$$

из условия

$$(t - \tau_1) \dots (t - \tau_{n+m-1}) = \frac{1}{n+m} \frac{d}{dt} [(t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_{n+m})].$$

В результате мы получаем отображения  $x \mapsto \lambda$  и  $x \mapsto \tau$ .

Пусть  $x^0, x^1 \in \mathbb{R}_{\leq}^n$ . Докажем, что равенства

$$\begin{aligned} F(x^0) &= F(x^1), \\ \Lambda(x^0) &= \Lambda(x^1) \end{aligned}$$

эквивалентны.

Пусть  $F(x^0) = F(x^1)$ . Тогда  $\mathcal{L}_{\nabla}(\tau^0) = \mathcal{L}_{\nabla}(\tau^1)$ , где точка  $\tau^0$  соответствует  $x^0$ , а точка  $\tau^1$  соответствует  $x^1$ . По Теореме 7 имеем  $\tau^0 = \tau^1$ . Отсюда  $\lambda^0 = \lambda^1$ , где точка  $\lambda^0$  соответствует  $x^0$ , а точка  $\lambda^1$  соответствует  $x^1$ . Поэтому  $\beta^0 - \alpha^0 = \beta^1 - \alpha^1$ . Это приводит к равенству  $\Lambda(x^1) = \Lambda(x^0)$ .

Пусть  $\Lambda(x^0) = \Lambda(x^1)$ . Зададим  $z^0 = (a, x^0)_{\leq}$  и  $z^1 = (a, x^1)_{\leq}$ . Очевидно, существует такая постоянная  $r$ , что  $z_k^1 = z_k^0 + r$  при всех  $k = 1, \dots, n + m$ . Поэтому  $F(x^1) = F(x^0)$ .

Легко доказать, что отображения

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}_{\leq}^n &\longrightarrow F(\mathbb{R}_{\leq}^n), \\ \Lambda: \mathbb{R}_{\leq}^n &\longrightarrow \Lambda(\mathbb{R}_{\leq}^n) \end{aligned}$$

замкнуты. Поэтому имеют место гомеоморфизмы

$$\begin{aligned} F(\mathbb{R}_{\leq}^n) &= \mathbb{R}_{\leq}^n / F, \\ \Lambda(\mathbb{R}_{\leq}^n) &= \mathbb{R}_{\leq}^n / L. \end{aligned}$$

Однако  $F^{-1}\{F(x)\} = \Lambda^{-1}\{\Lambda(x)\}$  при всех  $x \in \mathbb{R}_{\leq}^n$ . Поэтому  $\mathbb{R}_{\leq}^n / F = \mathbb{R}_{\leq}^n / \Lambda$ . Отсюда  $F(\mathbb{R}_{\leq}^n)$  гомеоморфно  $\Lambda(\mathbb{R}_{\leq}^n)$ . •

Опишем множество  $\Lambda(\mathbb{R}_{\leq}^n)$ . Сопоставим набору  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n + m$  плоскость

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_{2-1}} &= a_2 - a_1, \\ &\vdots \\ \lambda_{i_{m-1}} + \dots + \lambda_{i_m-1} &= a_m - a_{m-1} \end{aligned} \right\}$$

Множество  $\Lambda(\mathbb{R}_{\leq}^n)$  получается в результате пересечения с конусом  $\mathbb{R}_+^{n+m-1}$  объединения всех таких плоскостей. В частности, множество  $\Lambda(\mathbb{R}_{\leq}^n)$  представимо в виде объединения конечного числа выпуклых многогранников. Это позволяет выяснить топологию многообразия  $F(\mathbb{R}_{\leq}^n)$ . В качестве приложения докажем следующее любопытное утверждение.

**Теорема 10.** При  $m = 2$  многообразии  $F(\mathbb{R}_{\leq}^n)$  содержится сфера размерности  $n$ .

**Доказательство.** Действительно, с помощью линейной замены переменной  $t$  задача сводится к полиномам вида

$$f(t) = t(t-1)(t-x_1)\dots(t-x_n).$$

Для данных полиномов отображение

$$\Lambda: \mathbb{R}_{\leq}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+^{n+1}$$

имеет вид

$$\Lambda(x_1, \dots, x_n) = \Delta\{(0, 1, x_1, \dots, x_n)_{\leq}\}.$$

В множестве  $\Lambda(\mathbb{R}_{\leq}^n)$  искомой сферой является граница выпуклого многогранника с гранями

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 1, \\ \lambda_2 &= 1, \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= 1, \\ \lambda_3 &= 1, \\ &\vdots \\ \lambda_n + \lambda_{n+1} &= 1, \\ \lambda_{n+1} &= 1. \end{aligned}$$

Теорема доказана. •

### §10. Сфера альтернирующих полиномов

Назовем непрерывную на отрезке  $[a, b]$  функцию  $f(t)$  альтернирующей, если

$$\min_{a \leq t \leq b} f(t) = - \max_{a \leq t \leq b} f(t).$$

Для произвольной непрерывной на отрезке  $[a, b]$  функции  $f(t)$  зададим

$$f^{\text{alt}}(t) = f(t) - \frac{1}{2} \left( \min_{a \leq t \leq b} f(t) + \max_{a \leq t \leq b} f(t) \right).$$

Очевидно, что функция  $f^{\text{alt}}(t)$  является альтернирующей. Для альтернирующей функции  $f(t)$  обозначим через  $\text{alt } f$  максимальное число перемен знака между точками максимума и минимума. Очевидно, что  $\text{alt } f \geq 1$ .

В этом параграфе мы изучим клеточную структуру сферы

$$S_{\text{alt}}^{n-1} = \{F \in S^n(t) : \min_{-1 \leq t \leq 1} F(t) = - \max_{-1 \leq t \leq 1} F(t)\}$$

полиномов, альтернирующих на отрезке  $[-1, 1]$ . Условимся бесконечно удаленный полином считать альтернирующим по определению.

В параграфе 7 каждой точке  $\lambda \in \Delta_{\pm}^{n-1} \sqcup Q^{n-1}$  был сопоставлен полином

$$F_{\lambda}(t) = \frac{1}{n}t^n + a_1t^{n-1} + \dots + a_n,$$

нормированный условием  $F_{\lambda}(-1) = 0$ , и ломаная  $L_{\lambda}(t)$ , нормированная условием  $L_{\lambda}(0) = 0$ . При этом ломаная  $L_{\lambda}(t)$  имеет такое же относительное расположение максимумов и минимумов, что и полином  $F_{\lambda}(t)$  на отрезке  $[-1, 1]$ .

Легко видеть, что естественным образом определяемое отображение

$$\lambda \longmapsto nF_{\lambda}^{\text{alt}}(t)$$

является гомеоморфизмом сферы  $\Delta_{\pm}^{n-1} \cup_{\psi} Q^{n-1}$  на сферу  $S_{\text{alt}}^{n-1}$ . Это позволяет при построении клеточного разбиения сферы  $S_{\text{alt}}^{n-1}$  вместо альтернирующих полиномов  $F_{\lambda}^{\text{alt}}(t)$  использовать альтернирующие ломаные  $L_{\lambda}^{\text{alt}}(t)$ .

Рассмотрим  $k$ -звенную ненулевую альтернирующую ломаную  $L(t)$  с узловыми точками  $0, 1, \dots, k$ . Зададим

$$\mu = \max_{0 \leq i \leq k} L(i).$$

Представим множество

$$I = \{0 \leq i \leq k : |L(i)| = \mu\}$$

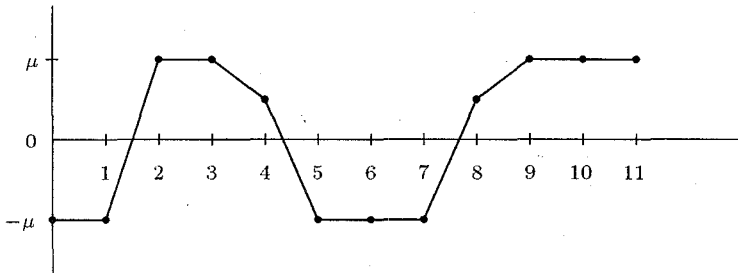
в виде объединения  $I = I_0 \cup \dots \cup I_p$ , таких максимально длинных целочисленных отрезков  $I_0, \dots, I_p$ , что для каждого отрезка  $I_{\nu} = \{i_{\nu}, i_{\nu} + 1, \dots, j_{\nu}\}$  выполнено соотношение

$$L(i_{\nu}) = L(i_{\nu} + 1) = \dots = L(j_{\nu}).$$



Семейство целочисленных отрезков  $I_0, \dots, I_p$  назовем сегментацией ломаной  $L(t)$ . Полезно заметить, что  $\text{mul}(L, i) = j_\nu - i_\nu + 1$  при всех  $i \in I_\nu$ .

Например, ломаная



имеет сегментацию  $I_0 = \{0, 1\}$ ,  $I_1 = \{2, 3\}$ ,  $I_2 = \{5, 6, 7\}$ ,  $I_3 = \{9, 10, 11\}$ .

Мы построим клеточные разбиения  $\Delta_{\pm}^k$  и  $Q^k$  такие, что на каждой клетке  $e$  сегментация ломаной  $L_{\lambda}^{\text{alt}}$ , где  $\lambda \in e$ , постоянна. В этом случае величина  $\text{alt } L_{\lambda}^{\text{alt}}$ , где  $\lambda \in e$ , также постоянна. Эту величину мы обозначаем через  $\text{alt } e$ .

**Клеточное разбиение  $\Delta_{\pm}^k$ .** Клеточное разбиение  $\Delta_{\pm}^{-1} = \emptyset$  пусто. Клеточное разбиение  $\Delta_{\pm}^0 = 1$  образовано из одной нульмерной клетки  $e = 1$ . Клетка  $e$  имеет сегментацию  $\{0\} \cup \{1\}$ . При этом  $\text{alt } e = 1$ .

Пусть  $k \geq 1$ . Предположим, что клеточные разбиения симплексов  $\Delta_{\pm}^{k-2}$  и  $\Delta_{\pm}^{k-1}$  построены. Построим клеточное разбиение симплекса  $\Delta_{\pm}^k$ .

Через  $\Delta_{\pm}^k(i)$  мы обозначаем грань  $\lambda_i = 0$ , а через  $\Delta_{\pm}^k(i, i+1)$ , мы обозначаем грань  $\lambda_i = \lambda_{i+1} = 0$ . Отображение

$$\phi_0: (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}) \mapsto (0, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1})$$

отождествляет  $\Delta_{\pm}^{k-1}$  с  $\Delta_{\pm}^k(0)$ . Отображение

$$\phi_k: (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}) \mapsto -(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, 0)$$

отождествляет  $\Delta_{\pm}^{k-1}$  с  $\Delta_{\pm}^k(k)$ . При  $0 \leq i \leq k-1$  отображение

$$\varphi_i: (\lambda_0, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i, \dots, \lambda_{k-2}) \mapsto (\lambda_0, \dots, \lambda_{i-1}, 0, 0, \lambda_i, \dots, \lambda_{k-2})$$

отождествляет  $\Delta_{\pm}^{k-2}$  с  $\Delta_{\pm}^k(i, i+1)$ . При помощи отображений  $\phi_0$  и  $\phi_k$  перенесем клеточное разбиение  $\Delta_{\pm}^{k-1}$  на грани  $\Delta_{\pm}^k(0)$  и  $\Delta_{\pm}^k(k)$ , а при помощи

отображения  $\varphi_i$  перенесем клеточное разбиение  $\Delta_{\pm}^{k-2}$  на грань  $\Delta_{\pm}^k(i, i+1)$ , где  $0 \leq i \leq k-1$ .

Рассмотрим грань  $\Delta_{\pm}^k(0)$ . Пусть клетка  $e$  разбиения  $\Delta_{\pm}^{k-1}$  имеет сегментацию  $I_0, \dots, I_p$ . Сегментация клетки  $E = \phi_0(e)$  получается так. Все числа в множествах  $I_0, \dots, I_p$  увеличиваются на 1. Если в новом множестве  $I_0$  появляется 1, то в это множество добавляется 0.

Рассмотрим грань  $\Delta_{\pm}^k(k)$ . Пусть клетка  $e$  разбиения  $\Delta_{\pm}^{k-1}$  имеет сегментацию  $I_0, \dots, I_p$ . Сегментация клетки  $E = \phi_k(e)$  получается так. Множества  $I_0, \dots, I_{p-1}$  остаются без изменения. Если в множестве  $I_p$  есть  $k$ , то в это множество добавляется  $k+1$ .

Рассмотрим грань  $\Delta_{\pm}^k(i, i+1)$ . Пусть клетка  $e$  разбиения  $\Delta_{\pm}^{k-2}$  имеет сегментацию  $I_0, \dots, I_p$ . Сегментация клетки  $E = \varphi_i(e)$  получается так. Все числа  $j \in I_0 \cup \dots \cup I_p$  такие, что  $j \geq i+1$  увеличиваются на 2. Если при некотором  $0 \leq \nu \leq p$  имеет место включение  $i \in I_{\nu}$ , то в множество  $I_{\nu}$  добавляются  $i+1$  и  $i+2$ .

Рассмотрим грань  $\Delta_{\pm}^k(i)$ , где  $1 \leq i \leq k-1$ . Возьмем клетку  $e$  разбиения  $\Delta_{\pm}^{k-2}$ . Сопоставим клетке  $e$  клетку  $E$  грани  $\Delta_{\pm}^k(i)$  по следующему правилу. Клетка  $E$  образована из точек вида

$$\tau\varphi_{i-1}(\lambda) + (1-\tau)\varphi_i(\lambda),$$

где  $0 < \tau < 1$  и  $\lambda \in e$ . Пусть клетка  $e$  имеет сегментацию  $I_0, \dots, I_p$ . Сегментация  $E$  получается так. Все числа  $j \in I_0 \cup \dots \cup I_p$  такие, что  $j \geq i$  увеличиваются на 2. Если при некотором  $0 \leq \nu \leq p$  имеет место включение  $\{i-1, i\} \in I_{\nu}$ , то в множество  $I_{\nu}$  добавляется  $i+1$ .

Теперь построим клеточное разбиение всего симплекса  $\Delta_{\pm}^k$ . Обозначим через  $\text{bar } \Delta_{\pm}^k$  барицентр  $\Delta_{\pm}^k$ . Возьмем клетку  $e$  клеточного разбиения границы  $\partial\Delta_{\pm}^k$ . Сопоставим клетке  $e$  клетку  $E$  симплекса  $\Delta_{\pm}^k$  по следующему правилу. Клетка  $E$  образована из точек вида

$$\tau\lambda + (1-\tau)\text{bar } \Delta_{\pm}^k,$$

где  $0 < \tau < 1$  и  $\lambda \in e$ . Пусть клетка  $e$  имеет сегментацию  $I_0, \dots, I_p$ , где

$$I_{\nu} = \{i_{\nu}, i_{\nu} + 1, i_{\nu} + 2, i_{\nu} + 3, \dots, j_{\nu}\}.$$

Сегментация  $E$  получается так. При  $i_0 = 0$  сегмент  $I_0$  заменяется на сегменты

$$\{j_0 - 2[j_0/2]\}, \dots, \{j_0 - 4\}, \{j_0 - 2\}, \{j_0\}.$$

При  $0 < i_\nu$  и  $j_\nu < k + 1$  числа  $i_\nu$  и  $j_\nu$  имеют одинаковую четность и сегмент  $I_\nu$  заменяется на сегменты

$$\{i_\nu\}, \{i_\nu + 2\}, \{i_\nu + 4\}, \dots, \{j_\nu\}.$$

При  $j_p = k + 1$  сегмент  $I_p$  заменяется на сегменты

$$\{i_p\}, \{i_p + 2\}, \{i_p + 4\}, \dots, \{i_p + 2[(k + 1 - i_p)/2]\}.$$

Отметим, что  $\text{alt } E = \text{alt } e$  во всех рассмотренных выше случаях.

Добавим к построенным клеткам еще одну нульмерную клетку  $\text{bar } \Delta_{\pm}^k$ . Клетка  $\text{bar } \Delta_{\pm}^k$  имеет очевидную сегментацию

$$I = \{0\} \cup \{1\} \cup \dots \cup \{k + 1\}.$$

При этом  $\text{alt bar } \Delta_{\pm}^k = k + 1$ . Требуемое клеточное разбиение симплекса  $\Delta_{\pm}^k$  построено.

**Клеточное разбиение  $Q^k$ .** Построим клеточное разбиение границы  $\partial Q^k$ . Зададим вектор  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_k)$  с координатами  $\pm 1$ . Поясним, как на клетки разбивается внутренность симплекса  $\Delta^{k-1}(\delta)$ . Внутренности симплексов триангуляции  $\partial Q^k$  меньших размерностей разбиваются аналогично. Пусть

$$\delta = (\underbrace{\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_0}_{q_0}, \underbrace{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_1}_{q_1}, \dots, \underbrace{\varepsilon_l, \dots, \varepsilon_l}_{q_l}),$$

где  $\varepsilon_{i-1}\varepsilon_i = -1$  при всех  $i = 1, \dots, l$ . Зададим отображение

$$\varphi: \Delta^{k-1}(\delta) \longrightarrow \Delta_{\pm}^l$$

по следующему правилу. Отображение  $\varphi$  вектор

$$(\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0q_0}, \lambda_{11}, \dots, \lambda_{1q_1}, \dots, \lambda_{l1}, \dots, \lambda_{lq_l})$$

переводит в вектор

$$\varepsilon_l(\lambda_{01} + \dots + \lambda_{0q_0}, \lambda_{11} + \dots + \lambda_{1q_1}, \dots, \lambda_{l1} + \dots + \lambda_{lq_l}).$$

Пусть клетка  $e$  разбиения  $\Delta_{\pm}^l$  принадлежит  $\text{Int } \Delta_{\pm}^l$  и имеет сегментацию  $I_0, \dots, I_p$ . Сопоставим клетке  $e$  клетку

$$E = \text{Int } \Delta^k(\delta) \cap \varphi^{-1}(e).$$

Сегментация  $E$  получается так. В множествах  $I_0, \dots, I_p$  число  $i \geq 1$  заменяется на число  $q_0 + \dots + q_{i-1}$ .

В результате мы получаем клеточное разбиение  $\partial Q^k$ , при котором приклеивающее отображение

$$\psi: \partial Q^k \longrightarrow \partial \Delta_{\pm}^k$$

является клеточным.

Построим клеточное разбиение всего октаэдра  $Q^k$ . Возьмем клетку  $e$  клеточного разбиения границы  $\partial Q^k$ . Сопоставим клетке  $e$  клетку  $E$  октаэдра  $Q^k$  по следующему правилу. Клетка  $E$  образована из точек вида  $\tau\lambda$ , где  $0 < \tau < 1$  и  $\lambda \in e$ . Легко видеть, что клетки  $e$  и  $E$  имеют одинаковые сегментации. Добавим к построенным клеткам еще одну нульмерную клетку  $0$ . Удобно считать, что  $\text{alt } 0 = \infty$ . Требуемое клеточное разбиение октаэдра  $Q^k$  построено.

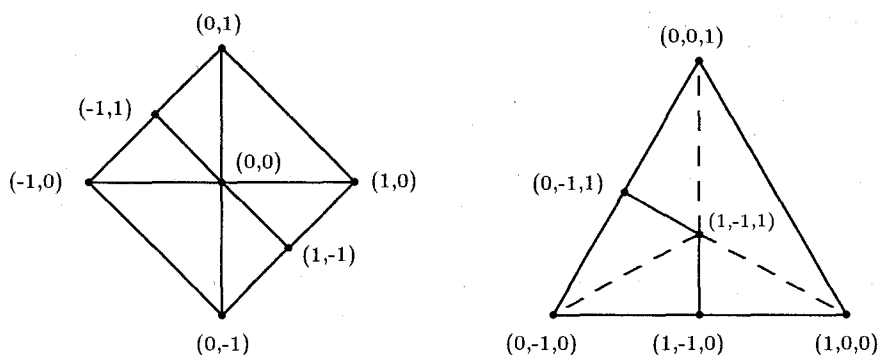
Условимся точки симплекса  $\Delta_{\pm}^k$  и границы октаэдра  $Q^k$  записывать в однородных координатах. При таком соглашении барицентры граней симплекса  $\Delta_{\pm}^k$  и границы октаэдра  $Q^k$  удастся записать с помощью чисел  $-1, 0, 1$ . Например,  $\text{bar } \Delta_{\pm}^2 = (1, -1, 1)$ .

**Случай  $n = 1$ .** Клеточные разбиения  $\Delta_{\pm}^1$  и  $Q^1$  изображены на рисунке



На барицентре  $(-1, 1)$  функция  $\text{alt}$  равна 2. На всех остальных клетках, за исключением клетки  $0$ , функция  $\text{alt}$  равна 1.

Случай  $n = 2$ . Клеточные разбиения  $\Delta_{\pm}^2$  и  $Q^2$  изображены на рисунке



На барицентре  $(1, -1, 1)$  функция alt равна 3, на нульмерных клетках  $(1, -1, 0)$  и  $(0, -1, 1)$  и на одномерных клетках, соединяющих нульмерные клетки  $(1, -1, 0)$  и  $(0, -1, 1)$  с барицентром  $(1, -1, 1)$ , функция alt равна 2. На всех остальных клетках симплекса  $\Delta_{\pm}^2$  функция alt равна 1. На нульмерных клетках  $(1, -1)$  и  $(-1, 1)$  и на одномерных клетках, соединяющих нульмерные клетки  $(1, -1)$  и  $(-1, 1)$  с началом координат  $(0, 0)$ , функция alt равна 2. На всех остальных клетках октаэдра  $Q^2$ , за исключением клетки  $(0, 0)$ , функция alt равна 1.

### §11. Топологическая классификация уравнений Абеля

В задаче чебышевской аппроксимации с  $m$  фиксированными коэффициентами рассматриваются полиномы вида

$$F(t) = t^n + x_1 t^{n-1} + \dots + x_m t^{n-m} + y_1 t^{n-m-1} + \dots + y_{n-m}.$$

Требуется для фиксированных коэффициентов  $x_1, \dots, x_m$  подобрать свободные коэффициенты  $y_1, \dots, y_{n-m}$  так, чтобы величина

$$R = \max_{-1 \leq t \leq 1} |F(t)|$$

приняла минимальное значение. При  $m = 0, 1, 2$  задача решена Чебышевым [9], Золотаревым [10] и Ахиезером [11].

Из теоремы Чебышева следует, что для любых  $x_1, \dots, x_m$  существуют и единственны  $y_1, \dots, y_{n-m}$ , дающие решение указанной задачи минимизации. Возникающее непрерывное отображение

$$x \mapsto y$$

пространства  $\mathbb{R}^m$  в пространство  $\mathbb{R}^{n-m}$  является кусочно-аналитическим. Пространство  $\mathbb{R}^m$  разбивается на клетки размерностей  $0, 1, \dots, m$ , на каждой из которых  $y$  аналитично зависит от  $x$ .

Пусть на отрезке  $[-1, 1]$  задан альтернирующий полином

$$F(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$$

и  $k = \text{alt } F$ . Очевидно, что  $1 \leq k \leq n$ . Положим  $m = n - k$ . Легко видеть, что полином  $F(t)$  является решением задачи чебышевской аппроксимации с  $m$  фиксированными коэффициентами  $x_1 = a_1, \dots, x_m = a_m$ . При этом  $y_1 = a_{m+1}, \dots, y_{n-m} = a_n$ . Положим

$$R = \max_{-1 \leq t \leq 1} |F(t)|.$$

Тогда для  $F(t)$  и  $R$  справедливо уравнение Абеля

$$F^2(t) - R^2 = (t+1)^\alpha (t-1)^\beta G(t) H^2(t).$$

В этом уравнении все корни полинома  $H(t)$  лежат в отрезке  $(-1, 1)$ , а полином  $G(t)$  степени  $\gamma$  не имеет корней в отрезке  $[-1, 1]$ :

Целые  $\alpha, \beta, \gamma$  через альтернирующий полином  $F \in S_{\text{alt}}^{n-1}$  определяют однозначно. Это приводит к отображению

$$F \mapsto (\alpha, \beta, \gamma).$$

В §10 мы получили клеточное разбиение сферы альтернирующих полиномов  $S_{\text{alt}}^{n-1}$ . Убедимся, что построенное отображение постоянно на клетках этого разбиения.

Пусть  $\lambda \in \Delta_{\pm}^{n-1} \cup \text{Int } Q^{n-1}$ . Зададим альтернирующий полином  $F(t) = nF_{\lambda}^{\text{alt}}(t)$  и альтернирующую ломаную  $L(t) = L_{\lambda}^{\text{alt}}(t)$ . Полином  $F(t)$  достигает свои максимальные и минимальные значения на отрезке  $[-1, 1]$  в узловых

точках полинома  $F_\lambda(t)$ . Пусть такими будут  $x_0 < x_1 < \dots < x_p$ . Легко видеть, что

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{при } -1 < x_0, \\ \text{mul}(F, -1) + 1 & \text{при } -1 = x_0, \end{cases}$$

и

$$\beta = \begin{cases} 0 & \text{при } +1 > x_p, \\ \text{mul}(F, +1) + 1 & \text{при } +1 = x_p. \end{cases}$$

Аналогичным образом

$$\deg H = \frac{1}{2} \sum_{|x_\nu| < 1} \{\text{mul}(F, x_\nu) + 1\}.$$

Поэтому

$$\gamma = 2n - \alpha - \beta - \sum_{|x_\nu| < 1} \{\text{mul}(F, x_\nu) + 1\}.$$

Пусть ломаная  $L(t)$  имеет сегментацию  $I_0, \dots, I_p$ . Отметим, что ломаная  $L(t)$  имеем  $N = n$  звеньев при  $\lambda \in \Delta_{\pm}^{n-1}$  и  $N = n - 1$  звеньев при  $\lambda \in \text{Int } Q^{n-1}$ . Используя полученные в §7 выражения кратностей узловых точек полинома  $F_\lambda(t)$  через кратности соответствующих узловых точек ломаной  $L_\lambda(t)$ , получаем

$$\begin{aligned} \alpha &= \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \notin I_0, \\ j_0 - 0 + 1 & \text{при } 0 \in I_0, \end{cases} \\ \beta &= \begin{cases} 0 & \text{при } N \notin I_p, \\ N - i_p + 1 & \text{при } N \in I_p, \end{cases} \\ \gamma &= 2n - \alpha - \beta - 2 \sum_{\nu} \left( \left[ \frac{j_\nu - i_\nu}{2} \right] + 1 \right), \end{aligned}$$

где суммирование осуществляется по таким  $\nu = 0, 1, \dots, p$ , что  $0 \notin I_\nu$  и  $N \notin I_\nu$ .

Отсюда следует, что отображение

$$F \mapsto (\alpha, \beta, \gamma)$$

постоянно на клетках разбиения  $S_{\text{alt}}^{n-1}$ .

При любом  $n$  сегментации ломаных  $L_\lambda^{\text{alt}}(t)$ , где  $\lambda \in \Delta_{\pm}^{n-1} \cup \text{Int } Q^{n-1}$ , строятся за конечное число шагов. Целые  $\alpha, \beta, \gamma$  выражаются через сегментации, а уравнения Абеля выражаются через целые  $\alpha, \beta, \gamma$ . Поэтому построение всех

сегментаций дает классификацию уравнений Абеля. Дополнительную информацию об уравнениях Абеля-Пелля читатель может получить в обзорах [12] и [13].

Чтобы выделить случай  $m$  фиксированных коэффициентов, зададим сферу

$$S_{\text{alt}}^{n-1}(m) = \{F \in S_{\text{alt}}^{n-1} : \text{alt } F \geq n - m\}.$$

Легко видеть, что сфера  $S_{\text{alt}}^{n-1}(m)$  образована из решений задач чебышевской аппроксимации с  $m$  фиксированными коэффициентами  $(a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ . Сфера  $S_{\text{alt}}^{n-1}(m)$  гомеоморфна  $S^m$  и имеет естественное клеточное разбиение, индуцированное клеточным разбиением сферы  $S_{\text{alt}}^{n-1}$ . В частности, каждой клетке сферы  $S_{\text{alt}}^{n-1}(m)$  соответствует уравнение Абеля, возникающих в задаче чебышевской аппроксимации с  $m$  фиксированными коэффициентами.

**Случай Чебышева**  $m = 0$ . Легко видеть, что

$$S_{\text{alt}}^{n-1}(0) = \{0, \text{bar } \Delta_{\pm}^{n-1}\}.$$

Клетка 0 интереса не представляет. Клетка  $\text{bar } \Delta_{\pm}^{n-1}$  имеет сегментацию

$$\{0\} \cup \{1\} \cup \dots \cup \{n-1\} \cup \{n\}.$$

Для этой сегментации  $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0$ . Поэтому в случае  $m = 0$  возникает единственное уравнение Абеля

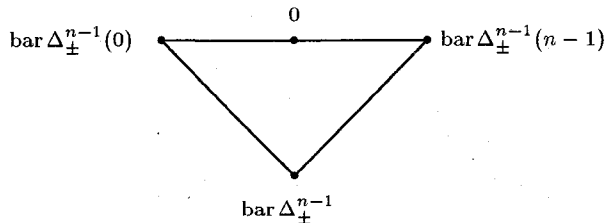
$$F^2(t) - R^2 = (t^2 - 1)H^2(t).$$

Решением  $F(t)$  этого уравнения является классический полином Чебышева  $T_n(t)$ .

**Случай Золотарева**  $m = 1$ . Сфера  $S_{\text{alt}}^{n-1}(1)$  имеет четыре нульмерные клетки

$$0, \text{bar } \Delta_{\pm}^{n-1}(0), \text{bar } \Delta_{\pm}^{n-1}, \text{bar } \Delta_{\pm}^{n-1}(n-1)$$

и четыре одномерные клетки, соединяющие данные нульмерные.





Клетка 0 интереса не представляет. Остальные три нульмерные клетки имеют сегментации

$$\begin{aligned} & \{0\} \cup \{1\} \cup \dots \cup \{n-1\} \cup \{n\}, \\ & \{0, 1\} \cup \{2\} \cup \dots \cup \{n-1\} \cup \{n\}, \\ & \{0\} \cup \{1\} \cup \dots \cup \{n-2\} \cup \{n-1, n\}. \end{aligned}$$

Две одномерные клетки, принадлежащие  $\Delta_{\pm}^{n-1}$ , имеют сегментации

$$\begin{aligned} & \{1\} \cup \{2\} \cup \dots \cup \{n-1\} \cup \{n\}, \\ & \{0\} \cup \{1\} \cup \dots \cup \{n-2\} \cup \{n-1\}. \end{aligned}$$

Две одномерные клетки, принадлежащие  $\text{Int } Q^{n-1}$ , имеют одинаковые сегментации

$$\{0\} \cup \{1\} \cup \dots \cup \{n-2\} \cup \{n-1\}.$$

Поэтому в случае  $m = 1$  имеется шесть уравнений Абеля

$$\begin{aligned} F^2(t) - R^2 &= (t^2 - 1)H^2(t), \\ F^2(t) - R^2 &= (t + 1)^2(t - 1)(t + p)H^2(t), \\ F^2(t) - R^2 &= (t + 1)(t - 1)^2(t + p)H^2(t), \\ F^2(t) - R^2 &= (t - 1)(t + p)H^2(t), \\ F^2(t) - R^2 &= (t + 1)(t + p)H^2(t), \\ F^2(t) - R^2 &= (t^2 - 1)(t^2 + pt + q)H^2(t). \end{aligned}$$

### §12. Приложение

Через  $e(A_0, A_1, \dots, A_k)$  мы обозначаем открытый симплекс с вершинами  $A_0, A_1, \dots, A_k$ . При  $k = 0$  мы считаем, что  $e(A_0) = A_0$ .

**Теорема 11.** *Клеточное отображение*

$$\mathcal{L}_{\nabla} : \nabla^n \longrightarrow \Delta_{\pm}^n$$

*не имеет особых точек в клетках положительных размерностей.*

**Доказательство.** Обозначим вершины симплексов  $\nabla^n$  и  $\Delta_{\pm}^n$  через

$$A_m = (\underbrace{-1, \dots, -1}_m, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-m})$$

и

$$B_m = (-1)^{n-m} \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{m+1},$$

где  $m = 0, 1, \dots, n$ .

Пусть  $1 \leq l \leq n$  и  $0 \leq m_0 < m_1 < \dots < m_l \leq n$ . Из определения отображения  $\mathcal{L}_\nabla$  следует включение

$$\mathcal{L}_\nabla\{e(A_{m_0}, \dots, A_{m_l})\} \subset e(B_{m_0}, \dots, B_{m_l}).$$

Проверим, что отображение  $\mathcal{L}_\nabla$  переводит  $e(A_{m_0}, \dots, A_{m_l})$  на  $e(B_{m_0}, \dots, B_{m_l})$  без особых точек.

Зададим  $k_i = m_i - m_{i-1}$ , где  $i = 0, 1, \dots, l+1$ . Здесь  $m_{-1} = 0$  и  $m_{l+1} = n$ . Отметим, что клетка  $e(A_{m_0}, \dots, A_{m_l})$  образована из точек вида

$$x = \underbrace{(-1, \dots, -1)}_{k_0}, \underbrace{u_1, \dots, u_1}_{k_1}, \dots, \underbrace{u_l, \dots, u_l}_{k_l}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k_{l+1}},$$

где  $u \in \text{Int } \nabla^l$ .

Положим

$$\omega(t, u) = (t+1)^{k_0} \prod_{i=1}^l (t-u_i)^{k_i} (t-1)^{k_{l+1}}.$$

При  $u \in \text{Int } \nabla^l$  полином  $\omega(t, u)$  имеет  $n$  корней на отрезке  $[-1, 1]$ , причем внутренние корни  $u_1, \dots, u_l$  имеют кратности  $k_1 \geq 1, \dots, k_l \geq 1$ .

Зададим при  $i = 0, 1, \dots, l$  многочлены

$$F_i(u) = (-1)^{n-m_i} \int_{u_i}^{u_{i+1}} \omega(t, u) dt$$

от переменных  $u_1, \dots, u_l$ . Здесь для единообразия  $u_0 = -1$  и  $u_{l+1} = 1$ . Очевидно, что  $F_i(u) > 0$  при  $u \in \text{Int } \nabla^l$ . Пусть

$$S(u) = \sum_{i=0}^l F_i(u).$$

Тогда

$$\mathcal{L}_{\nabla}(x) = \frac{1}{S(u)} \sum_{i=0}^l F_i(u) B_{m_i},$$

где векторы  $x \in e(A_{m_0}, \dots, A_{m_l})$  и  $u \in \text{Int } \nabla^l$  связаны указанным выше образом. Зададим отображение

$$H(u) = \frac{1}{S(u)} \begin{bmatrix} F_1(u) \\ \vdots \\ F_l(u) \end{bmatrix}.$$

Достаточно доказать, что отображение  $H(u)$  не имеет особых точек.

Введем в рассмотрение отображение

$$F(u) = \begin{bmatrix} F_0(u) \\ F_1(u) \\ \vdots \\ F_l(u) \end{bmatrix}.$$

Через

$$\partial_u F(u) = \left\{ \frac{\partial F_i(u)}{\partial u_j} \right\}_{i=0, j=1}^l$$

мы обозначаем матрицу частных производных.

Докажем, что определитель

$$D(u) = \det[F(u), \partial_u F(u)]$$

невырожден для всех  $u \in \text{Int } \nabla^l$ .

Действительно,

$$\frac{\partial F_i(u)}{\partial u_j} = \pm k_j \int_{u_i}^{u_i+1} \frac{\omega(t, u)}{t - u_j} dt,$$

где  $0 \leq i \leq l$  и  $1 \leq j \leq l$ . Зададим  $(l+1) \times (l+1)$ -матрицу

$$A(\tau, u) = \begin{bmatrix} 1 & (\tau_0 - u_1)^{-1} & \cdots & (\tau_0 - u_l)^{-1} \\ 1 & (\tau_1 - u_1)^{-1} & \cdots & (\tau_1 - u_l)^{-1} \\ & & \vdots & \\ 1 & (\tau_l - u_1)^{-1} & \cdots & (\tau_l - u_l)^{-1} \end{bmatrix}.$$

легко доказать, что

$$\det A(\tau, u) = (-1)^l \prod_{0 \leq i < j \leq l} (\tau_j - \tau_i) \prod_{1 \leq i < j \leq l} (u_i - u_j) \prod_{i=0}^l \prod_{j=1}^l (\tau_i - u_j)^{-1}.$$

Мы видим, что

$$D(u) = \pm \prod_{i=1}^l k_i \int_{u_0}^{u_1} \int_{u_1}^{u_2} \cdots \int_{u_l}^{u_{l+1}} \det A(\tau, u) \prod_{i=0}^l \omega(\tau_i, u) d\tau_0 d\tau_1 \dots d\tau_l.$$

Однако при

$$u_0 < \tau_0 < u_1 < \tau_1 < u_2 < \cdots < u_l < \tau_l < u_{l+1}$$

подинтегральное выражение

$$\det A(\tau, u) \prod_{i=0}^l \omega(\tau_i, u)$$

сохраняет знак. Поэтому  $D(u) \neq 0$ .

Легко видеть, что

$$\frac{\partial H_i(u)}{\partial u_j} = \frac{1}{S(u)} \left( \frac{\partial F_i(u)}{\partial u_j} - \frac{F_i(u)}{S(u)} \frac{\partial S(u)}{\partial u_j} \right).$$

Поэтому

$$\det \partial_u H(u) = \frac{1}{S^{l+1}(u)} \det[F(u), \partial_u F(u)] \neq 0$$

для любого  $u \in \text{Int } \nabla^l$ . Отсюда следует, что отображение

$$\mathcal{L}_\nabla: e(A_{m_0}, \dots, A_{m_l}) \longrightarrow e(B_{m_0}, \dots, B_{m_l})$$

не имеет особых точек. •

**Теорема 12.** *Клеточное отображение*

$$\mathcal{L}_Q: Q^n \longrightarrow Q^n$$

не имеет особых точек в клетках положительных размерностей.

**Доказательство.** Пусть при  $1 \leq p \leq n$  для индексов  $1 \leq m_1 < \dots < m_p \leq n$  заданы величины  $\delta_{m_1}, \dots, \delta_{m_p}$ , равные  $\pm 1$ . Клетками октаэдра  $Q^n$  являются  $p$ -мерные открытые симплексы  $e(0, \delta_{m_1} E_{m_1}^n, \dots, \delta_{m_p} E_{m_p}^n)$ , расположенные в его внутренности, и  $(p-1)$ -мерные открытые симплексы  $e(\delta_{m_1} E_{m_1}^n, \dots, \delta_{m_p} E_{m_p}^n)$ , расположенные на его границе. Из определения отображения  $\mathcal{L}_Q$  следуют включения

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Q\{e(0, \delta_{m_1} E_{m_1}^n, \dots, \delta_{m_p} E_{m_p}^n)\} &\subset e(0, \delta_{m_1} E_{m_1}^n, \dots, \delta_{m_p} E_{m_p}^n), \\ \mathcal{L}_Q\{e(\delta_{m_1} E_{m_1}^n, \dots, \delta_{m_p} E_{m_p}^n)\} &\subset e(\delta_{m_1} E_{m_1}^n, \dots, \delta_{m_p} E_{m_p}^n). \end{aligned}$$

Отображение  $\mathcal{L}_Q$  тождественно на клетках  $e(0, \delta_m E_m^n)$  и  $e(\delta_m E_m^n)$ . Поэтому далее отображение  $\mathcal{L}_Q$  рассматривается на клетках

$$e(0, \delta_{m_1} E_{m_1}^n, \dots, \delta_{m_{p+1}} E_{m_{p+1}}^n)$$

и

$$e(\delta_{m_1} E_{m_1}^n, \dots, \delta_{m_{p+1}} E_{m_{p+1}}^n)$$

при  $1 \leq p \leq n-1$ .

Доопределим величины  $\delta_i$  значениями  $\pm 1$  при индексах  $1 \leq i \leq n$ , отличных от  $m_1, \dots, m_{p+1}$ , так, чтобы величина  $k = \text{alt } \delta$  приняла максимальное значение. Ясно, что

$$e(0, \delta_{m_1} E_{m_1}^n, \dots, \delta_{m_{p+1}} E_{m_{p+1}}^n) \subset Q^n(\delta)$$

и

$$e(\delta_{m_1} E_{m_1}^n, \dots, \delta_{m_{p+1}} E_{m_{p+1}}^n) \subset \Delta^{n-1}(\delta).$$

Рассмотрим отображение  $\mathcal{L}_Q$  на  $e(0, \delta_{m_1} E_{m_1}^n, \dots, \delta_{m_{p+1}} E_{m_{p+1}}^n)$ . Введем более удобную систему координат. Запишем точку  $\lambda \in e(0, \delta_{m_1} E_{m_1}^n, \dots, \delta_{m_{p+1}} E_{m_{p+1}}^n)$  в виде

$$\lambda = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_{m_i} \delta_{m_i} E_{m_i}^n$$

и представим координаты  $\lambda_{m_1}, \dots, \lambda_{m_{p+1}}$  в виде

$$\begin{aligned}\lambda_{m_1} &= \rho\gamma_1, \\ &\vdots \\ \lambda_{m_p} &= \rho\gamma_p, \\ \lambda_{m_{p+1}} &= \rho(1 - \gamma_1 - \dots - \gamma_p),\end{aligned}$$

где  $0 < \rho < 1$  и  $(\gamma_1, \dots, \gamma_{p+1}) \in \text{Int } \Delta^p$ . Полезно заметить, что  $\rho = |\lambda|$ . Зададим координаты

$$\begin{aligned}u_1 &= \gamma_1, \\ u_2 &= \gamma_1 + \gamma_2, \\ &\vdots \\ u_p &= \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_p, \\ r &= \rho^{-1}\delta_n,\end{aligned}$$

где  $|r| > 1$  и  $(u_1, \dots, u_p) \in \text{Int } \nabla^p$ . Ясно, что замена переменных

$$(\lambda_{m_1}, \dots, \lambda_{m_{p+1}}) \mapsto (r, u_1, \dots, u_p)$$

невырождена. Далее, вычисления будем проводить в координатах  $r, u_1, \dots, u_p$ .

Зададим точку  $x \times y = T_\delta(|\lambda|^{-1}\lambda)$ . Обозначим через  $z$  вектор, образованный из координат векторов  $x$  и  $y$ , расположенных в порядке возрастания. Ясно, что в последовательности  $z_1, \dots, z_{n-1}$  имеет ровно  $p$  различных точек и этими точками являются  $u_1, \dots, u_p$ .

Последовательность равенств и строгих неравенств между точками  $z_1, \dots, z_{n-1}$  не зависит от выбора точки  $\lambda \in e(0, \delta_{m_1} E_{m_1}^n, \dots, \delta_{m_{p+1}} E_{m_{p+1}}^n)$ . Это означает, что при некотором  $0 \leq l \leq k$  имеются два строго возрастающие отображения

$$\begin{aligned}\nu: \{1, 2, \dots, l\} &\longrightarrow \{1, 2, \dots, p\}, \\ \sigma: \{1, 2, \dots, n - k - 1\} &\longrightarrow \{1, 2, \dots, p\},\end{aligned}$$

удовлетворяющие равенству

$$\text{Im } \nu \cup \text{Im } \sigma = \{1, \dots, p\},$$

и целые

$$k_0 \geq 0, k_{\nu(1)} \geq 1, \dots, k_{\nu(l)} \geq 1, k_{p+1} \geq 0,$$

удовлетворяющие равенству

$$k_0 + k_{\nu(1)} + \dots + k_{\nu(l)} + k_{p+1} = k,$$

такие, что

$$x = (\underbrace{-1, \dots, -1}_{k_0}, \underbrace{u_{\nu(1)}, \dots, u_{\nu(1)}}_{k_{\nu(1)}}, \dots, \underbrace{u_{\nu(l)}, \dots, u_{\nu(l)}}_{k_{\nu(l)}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k_{p+1}})$$

и

$$y = (u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(n-k-1)}).$$

В случае  $l = 0$  отображение  $\nu$  не существует, и предполагается, что  $\text{Im } \nu = \emptyset$ .

Положим

$$\omega(t, u) = (t + 1)^{k_0} \prod_{i=1}^l (t - u_{\nu(i)})^{k_{\nu(i)}} (t - 1)^{k_{p+1}}.$$

При  $n - k = 2m$  положим

$$f(t, u) = \prod_{i=1}^m (t - u_{\sigma(2i-1)})^2,$$

$$g(t, u) = (1 - t^2) \prod_{i=1}^{m-1} (t - u_{\sigma(2i)})^2$$

и при  $n - k = 2m + 1$  положим

$$f(t, u) = (1 + t) \prod_{i=1}^m (t - u_{\sigma(2i)})^2,$$

$$g(t, u) = (1 - t) \prod_{i=1}^m (t - u_{\sigma(2i-1)})^2.$$

Пусть

$$\Omega(t, u, r) = \frac{r+1}{2} \omega(t, u) f(t, u) + \frac{r-1}{2} \omega(t, u) g(t, u).$$

Зададим при  $i = 0, \dots, p$  многочлены

$$F_i(u, r) = \int_{u_i}^{u_{i+1}} \Omega(t, u, r) dt$$

от переменных  $r, u_1, \dots, u_p$ . Здесь для единообразия  $u_0 = -1$  и  $u_{p+1} = 1$ .

Введем в рассмотрение отображение

$$F(u, r) = \begin{bmatrix} F_0(u, r) \\ F_1(u, r) \\ \vdots \\ F_p(u, r) \end{bmatrix}.$$

Докажем, что определитель

$$D(u, r) = \det[F(u, r), \partial_u F(u, r)]$$

невырожден для всех  $(u, r) \in R^p \times R$  таких, что  $-1 < u_1 < \dots < u_p < 1$  и  $|r| > 1$ .

Пусть для определенности  $r > 1$ . При  $r < -1$  доказательство аналогично. Положим

$$\alpha = \frac{r+1}{2} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{r-1}{2}.$$

Отметим, что  $\alpha > 1$  и  $\beta > 0$ .

Зададим  $J_0 = \text{Im } \sigma \setminus \text{Im } \nu$ . При  $n - k = 2m$  зададим

$$J_1 = \sigma\{1, 3, \dots, 2m-1\} \setminus \text{Im } \nu,$$

$$J_2 = \sigma\{2, 4, \dots, 2m-2\} \setminus \text{Im } \nu,$$

а при  $n - k = 2m + 1$  зададим

$$J_1 = \sigma\{2, 4, \dots, 2m\} \setminus \text{Im } \nu,$$

$$J_2 = \sigma\{1, 3, \dots, 2m-1\} \setminus \text{Im } \nu.$$

Будем строки и столбцы матриц порядка  $(p+1) \times (p+1)$  номеровать индексами  $i, j = 0, 1, \dots, p$ . В случае матриц других порядков мы будем использовать другие способы нумерации.



Представим исследуемую матрицу в виде суммы

$$[F(u, r), \partial_u F(u, r)] = A(u, r) + B(u, r).$$

Матрица  $A(u, r)$  возникает в результате дифференцирования под знаком интеграла. Ее элементы имеют вид

$$A_{i,0} = \int_{u_i}^{u_{i+1}} \Omega(t, u, r) dt$$

при  $0 \leq i \leq p$  и

$$A_{i,j} = \int_{u_i}^{u_{i+1}} \frac{\partial \Omega(t, u, r)}{\partial u_j} dt$$

при  $0 \leq i \leq p$  и  $1 \leq j \leq p$ . Матрица  $B(u, r)$  возникает в результате дифференцирования по нижнему и верхнему пределам интегрирования. Все ее элементы равны нулю, за исключением наддиагональных и диагональных элементов

$$\begin{aligned} B_{i-1,i} &= \Omega(u_i, u, r), \\ B_{i,i} &= -\Omega(u_i, u, r) \end{aligned}$$

при  $i \in J_0$ . Появление внеинтегральной матрицы  $B(u, r)$  делает проверку невырожденности определителя  $D(u, r)$  достаточно громоздкой.

Пусть  $J \subset J_0$ . Обозначим через  $A_J(u, r)$  матрицу, которая получается из матрицы  $A(u, r)$  в результате замены ее столбцов с номерами  $j \in J$  на соответствующие столбцы матрицы  $B(u, r)$ . Из формулы для определителя от суммы двух матриц следует, что

$$D(u, r) = \sum_{J \subset J_0} \det A_J(u, r).$$

Мы докажем, что при  $-1 < u_1 < \dots < u_p < 1$  и  $r > 1$  все определители  $\det A_J(u, r)$  имеют одинаковый знак.

Зададим строку

$$W(t, u, r) = \frac{1}{\omega(t, u)} [\Omega(t, u, r), -\partial_u \Omega(t, u, r)].$$

Строка  $W(t, u, r)$  имеет длину  $p + 1$  и образована из элементов вида

$$W_0 = \alpha f(t, u) + \beta g(t, u),$$

$$W_j = \begin{cases} \frac{k'_j \alpha f(t, u) + k''_j \beta g(t, u)}{t - u_j} & \text{при } j \in \text{Im } \nu, \\ \frac{2\alpha f(t, u)}{t - u_j} & \text{при } j \in J_1, \\ \frac{2\beta g(t, u)}{t - u_j} & \text{при } j \in J_2. \end{cases}$$

Здесь  $k'_j, k''_j \geq k_j$ .

Пусть множество  $J \subset J_0$  состоит из  $p - q$  элементов. Обозначим через  $W_J(t, u, r)$  строку длины  $q + 1$ , получаемую выкидыванием из строки  $W(t, u, r)$  элементов с номерами  $j \in J$ .

Зададим  $(q + 1) \times (q + 1)$ -матрицу

$$a_J(\tau, u, r) = \begin{bmatrix} W_J(\tau_0, u, r) \\ W_J(\tau_1, u, r) \\ \vdots \\ W_J(\tau_q, u, r) \end{bmatrix},$$

где  $\tau = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_q)$ . Удобно в матрице  $a_J(\tau, u, r)$  строки нумеровать индексами  $i = 0, 1, \dots, q$ , а столбцы нумеровать индексами  $j$  из множества  $\{0, 1, \dots, p\} \setminus J$ .

Обозначим через  $v = (v_1, \dots, v_q)$  вектор, получаемый выкидыванием из вектора  $u$  элементов с номерами  $j \in J$ . Для единообразия положим  $v_0 = -1$  и  $v_{q+1} = 1$ .

Представим множество  $J$  в виде объединения  $\kappa$  отрезков натуральных чисел

$$J = \bigcup_{s=1}^{\kappa} \{j_s^1, j_s^1 + 1, \dots, j_s^2 - 1, j_s^2\}.$$

Здесь предполагается, что  $j_s^2 + 1 < j_{s+1}^1$  при всех  $s = 1, \dots, \kappa - 1$ . Тогда вектор  $v$  образован из координат

$$(v_1, \dots, v_q) = (\dots, u_{j_1^1-1}, u_{j_1^2+1}, \dots, u_{j_2^1-1}, u_{j_2^2+1}, \dots, u_{j_\kappa^1-1}, u_{j_\kappa^2+1}, \dots).$$

Покажем, что

$$\det A_J(u, r) = (-1)^p \prod_{i \in J} \Omega(u_i, u, r) \int_{v_0}^{v_1} \int_{v_1}^{v_2} \dots \int_{v_q}^{v_{q+1}} \prod_{i=1}^q \omega(\tau_i, u) \det a_J(\tau, u, r) d\tau.$$

Чтобы установить это равенство, избавимся в матрице  $A_J(u, r)$  от наддиагональных элементов в столбцах с номерами  $j \in J$ . С этой целью при каждом  $s = 1, \dots, \kappa$  последовательно прибавляем  $j_s^2$ -ю строку к  $(j_s^2 - 1)$ -й строке,  $(j_s^2 - 1)$ -ю строку к  $(j_s^2 - 2)$ -й строке и так далее. Процесс заканчивается прибавлением  $j_s^1$ -й строки к  $(j_s^1 - 1)$ -й строке. После такого преобразования интегралы выносятся за знак определителя соответствующего диагонального минора.

Докажем, что  $\det a_J(\tau, u, r) \neq 0$  при всех  $\tau$  таких, что

$$v_0 < \tau_0 < v_1 < \tau_1 < v_2 < \dots < v_q < \tau_q < v_{q+1}$$

и

$$\tau_i \notin \bigcup_{j \in J} u_j,$$

где  $0 \leq i \leq q$ .

Возьмем  $\tau$  из указанного множества и предположим, что  $\det a_J(\tau, u, r) = 0$ . Тогда из линейной зависимости столбцов матрицы  $a_J(\tau, u, r)$  следует существование такого нетривиального набора  $C_j$ , где  $j \in \{0, 1, \dots, p\} \setminus J$ , что функция

$$\Phi(t) = R(t)\alpha f(t, u) + Q(t)\beta g(t, u),$$

где

$$R(t) = C_0 + \sum_{j \in \text{Im } \nu} C_j \frac{k'_j}{t - u_j} + \sum_{j \in J_1 \setminus J} C_j \frac{2}{t - u_j}$$

и

$$Q(t) = C_0 + \sum_{j \in \text{Im } \nu} C_j \frac{k''_j}{t - u_j} + \sum_{j \in J_2 \setminus J} C_j \frac{2}{t - u_j},$$

обращается в нуль в  $q + 1$  точке  $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_q$ . Мы видим, что  $\alpha f(\tau_i, u) > 0$  и  $\beta g(\tau_i, u) > 0$  при всех  $i = 0, 1, \dots, q$ . Поэтому из равенства  $\Phi(\tau_i) = 0$  следует, что  $R(\tau_i)Q(\tau_i) < 0$  при всех  $i = 0, 1, \dots, q$ . Раскладывая дробно-рациональную функцию  $R(t)Q(t)$  на простейшие, мы получаем соотношение

$$R(t)Q(t) = C_0^2 + \sum_{j=1}^q \frac{\zeta_j}{t - v_j} + \sum_{j \in \text{Im } \nu} C_j^2 \frac{k'_j k''_j}{(t - u_j)^2}$$

при некоторых  $\zeta_1, \dots, \zeta_q$ . Отсюда дробно-рациональная функция

$$H(t) = \sum_{j=1}^q \frac{\zeta_j}{t - v_j}$$

удовлетворяет неравенствам  $H(\tau_i) < 0$  при всех  $i = 0, 1, \dots, q$ . Представим функцию  $H(t)$  в виде

$$H(t) = \frac{h(t)}{(t - v_1) \dots (t - v_q)},$$

где полином  $h(t)$  имеет степень  $\leq q - 1$ . Мы видим, что  $h(\tau_{i-1})h(\tau_i) < 0$  при всех  $i = 1, \dots, q$ . Поэтому полином  $h(t)$  степени  $\leq q - 1$  имеет  $q$  корней. Это противоречит тому, что полином  $h(t)$  отличен от тождественного нуля. Полученное противоречие доказывает неравенство  $\det a_J(\tau, u, r) \neq 0$ .

Докажем, что при указанных  $\tau$  имеет место неравенство  $\det a_J(\tau, u, r) > 0$ . Этот факт устанавливается в результате нескольких преобразований, сводящих общий к частному случаю, который сейчас будет рассмотрен.

Пусть  $p = n - 1$  и  $k = 0$ . В этом частном случае отображение  $\nu$  не существует, а отображение

$$\sigma: \{1, 2, \dots, n - 1\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n - 1\}$$

является тождественным. Докажем, что при

$$-1 = u_0 < \tau_0 < u_1 < \tau_1 < u_2 < \tau_2 < \dots < u_{n-1} < \tau_{n-1} < u_n = 1$$

имеет место неравенство  $\det a_{\emptyset}(\tau, u, r) \neq 0$ .

Действительно, выполним последовательно по  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  следующие преобразования, сохраняющие знак определителя  $\det a_{\emptyset}(\tau, u, r) \neq 0$ . Устремим  $\tau_i$  к  $u_{i+1}$  слева, разделим  $i$ -ю строку на  $u_{i+1} - u_i$  и устремим  $u_i$  к  $u_{i+1}$  слева. В результате все элементы  $i$ -й строки окажутся нулевыми, за исключением строго положительного элемента, стоящего в  $i$ -ом столбце. Отсюда по непрерывности следует положительность определителя  $\det a_{\emptyset}(\tau, u, r)$ .

Вернемся теперь к рассмотрению общего случая. Пусть  $1 \leq s \leq \kappa$ . Возьмем тот номер  $i$ , при котором выполнено неравенство  $u_{j_s^1 - 1} < \tau_i < u_{j_s^2 + 1}$ . Тогда

$$u_{j_s^1 - 1} < u_{j_s^1} < \dots < u_{i_s} < \tau_i < u_{i_s + 1} < \dots < u_{j_s^2} < u_{j_s^2 + 1}$$

при некотором  $i_s$ . Устремим точки  $u_{j_s^1}, \dots, u_{i_s}$  к  $u_{j_s^1-1} + 0$ , а точки  $u_{i_s+1}, \dots, u_{j_s^2}$  к  $u_{j_s^2+1} - 0$ . С помощью аналогичной проверки легко доказывается, что соотношение  $\det a_J(\tau, u, r) \neq 0$  остается справедливым после предельного перехода. Поэтому неравенство  $\det a_J(\tau, u, r) > 0$  достаточно проверить для векторов  $u$ , удовлетворяющих равенствам

$$u_{j_s^1} = \dots = u_{i_s} = u_{j_s^1-1}$$

и

$$u_{i_s+1} = \dots = u_{j_s^2} = u_{j_s^2+1}$$

при всех  $s = 1, \dots, \kappa$ . Возьмем такой вектор  $u$  и обозначим через  $\varphi(t, u)$  наибольший общий делитель многочленов  $f(t, u)$  и  $g(t, u)$  по переменной  $t$ . Разделим  $i$ -ю строку матрицы  $a_J(\tau, u, r)$  на  $\varphi(\tau_i, u)$  и обозначим полученную матрицу через  $b(\tau, u, r)$ . Очевидно, что

$$\text{sign det } a_J(\tau, u, r) = \text{sign det } b(\tau, u, r).$$

Такое сокращение сводит задачу к случаю  $J = \emptyset$ . При этом в качестве многочленов  $f(t, u)$  и  $g(t, u)$  выступают

$$f_0(t, u) = \frac{f(t, u)}{\varphi(t, u)}$$

и

$$g_0(t, u) = \frac{g(t, u)}{\varphi(t, u)}.$$

Возвращаясь к исходным обозначениям, убедимся, что  $\det a_{\emptyset}(\tau, u, r) > 0$ . В рассматриваемом случае строки и столбцы матрицы  $a_{\emptyset}(\tau, u, r)$  имеют естественную нумерацию индексами  $i, j = 0, 1, \dots, p$ .

Обозначим через  $c(\tau, u, r)$  матрицу, получаемую из матрицы  $a_{\emptyset}(\tau, u, r)$  вычеркиванием строк и столбцов с номерами  $i, j \in \text{Im } \nu$ . Ясно, что  $\det c(\tau, u, r) \neq 0$ .

Пусть  $i \in \text{Im } \nu$ . Тогда  $i$ -ый диагональный элемент матрицы  $a_{\emptyset}(\tau, u, r)$  имеет вид

$$\frac{k_i' \alpha f(\tau_i, u) + k_i'' \beta g(\tau_i, u)}{\tau_i - u_i},$$

причем числитель не обращается в нуль при  $\tau_i = u_i$ . Умножим  $i$ -ую строку матрицы  $a_{\mathcal{O}}(\tau, u, r)$  на

$$\frac{\tau_i - u_i}{k_i' \alpha f(\tau_i, u) + k_i'' \beta g(\tau_i, u)}$$

и устремим  $\tau_i$  к значению  $u_i + 0$ . В пределе мы получаем матрицу  $b(\tau, u, r)$ , у которой в строках с номерами  $i \in \text{Im } \nu$  на диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю. Очевидно, что

$$\det b(\tau, u, r) = \det c(\tau, u, r).$$

Поэтому из соображений непрерывности

$$\text{sign det } a_{\mathcal{O}}(\tau, u, r) = \text{sign det } c(\tau, u, r).$$

С точностью до обозначений матрица  $c(\tau, u, r)$  совпадает с матрицей в рассмотренном выше частном случае. Поэтому  $\det c(\tau, u, r) > 0$ .

Итак, при всех  $v_0 < \tau_0 < v_1 < \tau_1 < v_2 < \dots < v_q < \tau_q < v_{q+1}$  таких, что

$$\tau_i \notin \bigcup_{j \in J} u_j,$$

где  $0 \leq i \leq q$ , имеет место неравенство  $\det a_J(\tau, u, r) > 0$ . Отсюда следует, что знак определителя  $\det A_J(u, r)$  не зависит от выбора множества  $J \subset J_0$ . Действительно, в силу равенства

$$\text{sign} \left\{ \prod_{i \in J} \Omega(u_i, u, r) \prod_{i=1}^q \omega(\tau_i, u) \right\} = \text{sign} \prod_{i=0}^p \omega \left( \frac{u_i + u_{i+1}}{2}, u \right)$$

все определители  $\det A_J(u, r)$  невырождены и имеют одинаковый знак. Поэтому  $D(u, r) \neq 0$ .

Проверим, что отображение

$$\mathcal{L}_Q : e(0, \delta_{m_1} E_{m_1}^n, \dots, \delta_{m_{p+1}} E_{m_{p+1}}^n) \longrightarrow e(0, \delta_{m_1} E_{m_1}^n, \dots, \delta_{m_{p+1}} E_{m_{p+1}}^n)$$

не имеет особых точек. С этой целью зададим отображение

$$H(u, r) = \frac{1}{r} \frac{F(u, r)}{S(u, r)},$$

где

$$S(u, r) = \sum_{i=1}^{p+1} \delta_{m_i} F_{i-1}(u, r)$$

и докажем, что

$$\det \partial_{(r,u)} H(u, r) \neq 0$$

при  $-1 < u_1 < \dots < u_p < 1$  и  $r > 1$ .

Действительно, выполняя дифференцирования, имеем

$$\partial_{(r,u)} H = \left[ -\frac{1}{r^2} \frac{F}{S} + \frac{1}{rS} \left( \partial_r F - \frac{F}{S} \partial_r S \right), \frac{1}{rS} \left( \partial_u F - \frac{F}{S} \partial_u S \right) \right].$$

В данной матрице запятой выделен нулевой столбец. Поскольку

$$\det \left[ \partial_r F - \frac{F}{S} \partial_r S, \partial_u F - \frac{F}{S} \partial_u S \right] = \det \begin{bmatrix} 1 & \partial_r S & \partial_u S \\ \frac{F}{S} & \partial_r F & \partial_u F \end{bmatrix} = 0,$$

имеет место равенство

$$\det \partial_{(r,u)} H(u, r) = -\frac{1}{r^{p+2} S^{p+1}} \det \left[ F, \partial_u F - \frac{F}{S} \partial_u S \right].$$

Остается заметить, что

$$\det \left[ F, \partial_u F - \frac{F}{S} \partial_u S \right] = \det [F, \partial_u F] \neq 0.$$

Рассмотрим отображение  $\mathcal{L}_Q$  на клетке  $e(\delta_{m_1} E_{m_1}^n, \dots, \delta_{m_{p+1}} E_{m_{p+1}}^n)$ . Запишем точку  $\lambda \in e(\delta_{m_1} E_{m_1}^n, \dots, \delta_{m_{p+1}} E_{m_{p+1}}^n)$  в виде

$$\lambda = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_{m_i} \delta_{m_i} E_{m_i}^n$$

и зададим более удобные координаты

$$\begin{aligned} u_1 &= \lambda_{m_1}, \\ u_2 &= \lambda_{m_1} + \lambda_{m_2}, \\ &\vdots \\ u_p &= \lambda_{m_1} + \lambda_{m_2} + \dots + \lambda_{m_p}. \end{aligned}$$

Ясно, что замена переменных

$$(\lambda_{m_1}, \dots, \lambda_{m_{p+1}}) \mapsto (u_1, \dots, u_p)$$

невырождена.

Используя ранее введенные обозначения, зададим многочлены

$$F_i(u) = \int_{u_i}^{u_{i+1}} \Omega(t, u, \delta_n) dt$$

от переменных  $u_1, \dots, u_p$ . Отметим, что

$$\Omega(t, u, \delta_n) = \begin{cases} \omega(t, u)f(t, u) & \text{при } \delta_n = 1, \\ -\omega(t, u)g(t, u) & \text{при } \delta_n = -1. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение отображение

$$F(u) = \begin{bmatrix} F_0(u) \\ F_1(u) \\ \vdots \\ F_p(u) \end{bmatrix}.$$

Из доказательства предыдущей теоремы следует, что определитель

$$D(u) = \det[F(u), \partial_u F(u)]$$

невырожден при всех  $u \in \text{Int } \nabla^p$ .

Зададим отображение

$$H(u) = \frac{1}{S(u)} \begin{bmatrix} F_1(u) \\ \vdots \\ F_p(u) \end{bmatrix},$$

где

$$S(u) = \sum_{i=1}^{p+1} \delta_{m_i} F_{i-1}(u).$$



Можно легко доказать, что

$$\det \partial_u H(u) \neq 0$$

при всех  $u \in \text{Int } \nabla^p$ . Поэтому отображение

$$\mathcal{L}_Q: e(\delta_{m_1} E_{m_1}^n, \dots, \delta_{m_{p+1}} E_{m_{p+1}}^n) \longrightarrow e(\delta_{m_1} E_{m_1}^n, \dots, \delta_{m_{p+1}} E_{m_{p+1}}^n)$$

не имеет особых точек. •

#### Список литературы

- [1] Рохлин В. А., Фукс Д. Б., *Начальный курс топологии. Геометрические главы*, Наука, М., 1977.
- [2] Поля Г., Сере Г., *Задачи и теоремы из анализа*. Ч. 2, Наука, М., 1978.
- [3] Karlin S., Shapley L., *Geometry of moment spaces*, Mem. Amer. Math. Soc., No. 12, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1953.
- [4] Карлин С., Стадден В., *Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике*, Наука, М., 1976.
- [5] Виденский В. С., *Об оценках производных многочлена*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **15** (1951), №5, 401–420.
- [6] Сере Г., *Ортогональные многочлены*, Физматгиз, М., 1962.
- [7] Марков А. А., *Лекции о функциях, наименее уклоняющихся от нуля*, Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля, ГИТТЛ, М.-Л., 1948, сс. 244–291.
- [8] Ахиезер Н. И., *Лекции по теории аппроксимации*, Наука, М., 1965.
- [9] Чебышев П. Л., *Теория механизмов, известных под названием параллелограмов*, Избранные труды, АН СССР, М., 1955, сс. 611–648.
- [10] Золотарев Е. И., *Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля*, Полное собрание сочинений. Вып. 2, АН СССР, Л., 1932, сс. 1–59; Зап. С.-Петербург. АН **30** (1877), №5.
- [11] Ахиезер Н. И., *Über einige Funktionen die in gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen*, Изв. Казан. физ.-мат. о-ва **3** (1928), 1–69.
- [12] Седин М. Л., Юдицкий П. М., *Функции, наименее уклоняющиеся от нуля на замкнутых подмножествах вещественной оси*, Алгебра и анализ **4** (1992), №2, 1–61.
- [13] Малышев В. А., *Уравнение Абеля*, Алгебра и анализ **13** (2001), №6, 1–55.

Рыбинская государственная  
авиационная технологическая академия

Поступило 18 января 2002 г.

E-mail: wmal@ryb.adm.yar.ru