Функциональный анализ и его приложения
1993, т. 27, вып. 1, с. 46–59

УДК 517.95

Особенности римановых инвариантов

© 1993. А. Х. Рахимов

§1. Основные результаты

Рассмотрим 2×2-систему квазилинейных уравнений на плоскости вида

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U, x, t)\,\frac{\partial U}{\partial x} = F(U, x, t), \tag{1}$$

где $U = (u, v)$, а $A(U, x, t)$ есть 2×2-матрица коэффициентов, собственные числа которой вещественны и различны.

К системам этого вида приводят многие содержательные модели газовой динамики, теории нелинейных волн и т.д. [6, 7]. Одно из интересных свойств этих уравнений состоит в том, что при выполнении некоторых условий нелинейности (указанных ниже) их решения перестраиваются по времени: даже будучи однозначным в начальный момент, через некоторое конечное время решение может стать многозначным, произойдет градиентная катастрофа [6]. Это явление связывают с возникновением разрывов, ударных волн.

В то же время решение продолжается и за точку опрокидывания, пусть даже и многозначным образом. Вопрос о том, как при этом оно устроено, поднимается, например, в [8]. В этой работе мы приведем классификацию типичных особенностей для проектирований графиков решений на плоскость независимых переменных.

Систему (1) можно привести к диагональному виду, сделав замену зависимых переменных этой системы на ее римановы инварианты $w = w(U, x, t)$, $z = z(U, x, t)$:

$$w_t + \lambda(w, z, x, t)\,w_x = g(w, z, x, t), \quad z_t + \mu(w, z, x, t)\,z_x = h(w, z, x, t), \tag{2}$$

где λ, μ — собственные числа матрицы A.

Определение [9]. Система (2) называется *сильно нелинейной*, если выполняется следующее условие на производные собственных чисел по направлениям римановых инвариантов:

$$\lambda_w \mu_z \neq 0\,. \tag{3}$$

Мы будем требовать выполнения более жесткого условия на собственные числа:

$$\lambda_w \lambda_z \mu_w \mu_z \neq 0\,. \tag{4}$$

Теорема. *Пусть для системы* (2) *с вещественно-аналитическими коэффициентами выполнено условие нелинейности* (4). *Типичные особенности проектирования графиков ее решений на плоскость независимых переменных исчерпываются списком табл.* 1.

Каждое отображение $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ из этой таблицы определяет проектирование на плоскость некоторой двумерной поверхности (рис. 1):

$$f^{-1}(0) \hookrightarrow \mathbb{R}^4 \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^2\,, \qquad \pi\colon (y, x) \mapsto (x)\,. \tag{5}$$

Таблица 1

	$f(x\,,\,y)$
A_1	$x_1+y_1\,,\;\; x_2+y_2$
A_2	$x_1+y_1^2\,,\;\; x_2+y_2$
A_3	$x_1+y_1^3+y_1y_2\,,\;\; x_2+y_2$
$C_{2,2}$	$y_1^2+x_1+x_2y_2\,,\;\; y_2^2+x_2+x_1y_1$

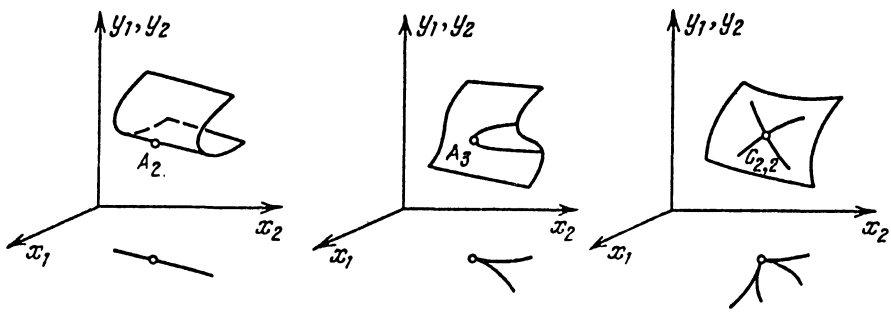

Рис. 1

Проектирование подмногообразия $L \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ — графика решения общего положения — приводится к одной из нормальных форм диаграммы (5) расслоенной заменой координат на $\mathbb{R}^4$.

Замечание. Условие аналитичности коэффициентов уравнений используется там, где речь идет о существовании ростка решения с данной струей. Все остальные рассуждения справедливы и в гладкой ситуации.

Хотелось бы также отметить, что мы будем использовать несколько видоизмененное определение устойчивости диаграмм (5): в качестве шевелений поверхности L рассматриваются лишь близкие решения. Именно поэтому в списке устойчивых появляется нормальная форма $C_{2,2}$. В классификации проектирований двумерных поверхностей на двумерную базу эта особенность является простой [4] (т.е. нормальная форма не содержит модулей), а в нашей ситуации она становится неустранимой за счет сужения пространства деформаций и, следовательно, устойчивой.

Более детальное представление о типичных особенностях решения дает пара графиков его римановых инвариантов.

Устойчивые нормальные формы инвариантов приведены в табл. 2. *Их графики* (а также графики в точке типа $C_{2,2}$, в которой они имеют модули) *изображены на рис.* 2.

В табл. 2 $\Phi(t) = t^4 + x_2t^2 + x_1t + w$ и res — это результант двух многочленов. Каждая из функций в этой таблице определяет поверхность $f(w, x) = 0$ на пространстве расслоения

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad (w, x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2).$$

Конечно же, исследовать многозначные решения можно, и оставаясь в рамках координатного подхода, например, сделав преобразование годографа (при

Таблица 2

$f(w, x_1, x_2)$	название	рис.
$x_1 + w$		
$x_1 + w^2$	складка	1а, 3а
$x_1^3 + w^2$	цилиндр над полукубикой	1б
$x_1 + w^3 + x_2 w$	сборка	2а
$\mathrm{res}(\Phi, \Phi_t)$	ласточкин хвост	2б
$x_1^3 x_2^3 + w^2$	сложенный зонтик Уитни	3б

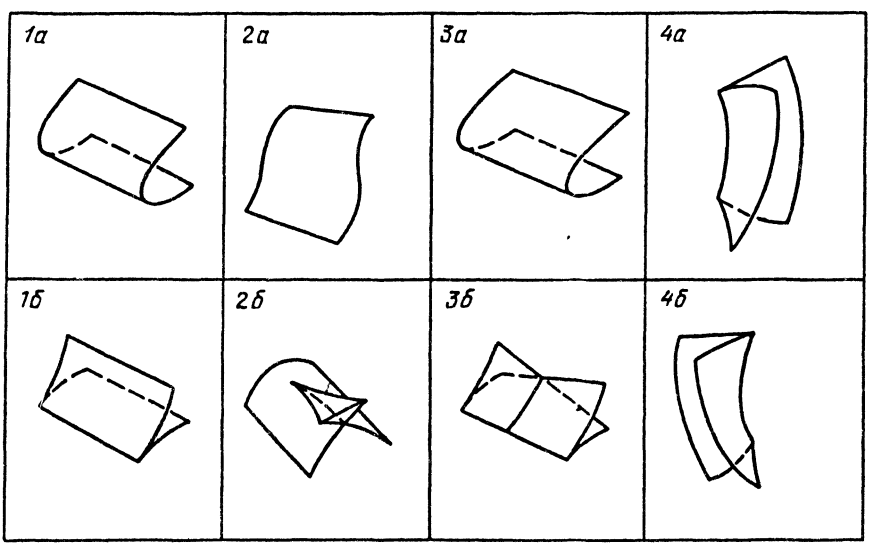

Рис. 2

котором зависимые и независимые переменные меняются ролями; см. п. 7.2). Но все-таки более естествен язык дифференциальных форм: системе (1) можно сопоставить пару 2-форм на $\mathbb{R}^4$ (а точнее, множество их линейных комбинаций с функциями в качестве коэффициентов)

$$dU \wedge dx - A(U, x, t)\, dU \wedge dt - F(U, x, t)\, dt \wedge dx, \quad \text{где } U = (u, v).$$

Теория систем дифференциальных 2-форм излагается в § 2. Возможен и другой способ задания 2×2-систем, а именно парой трансверсальных двумерных распределений V_j на $\mathbb{R}^4$: в каждой точке $m \in \mathbb{R}^4$ грассманиан системы, т.е. множество касательных к решениям плоскостей, состоит из плоскостей, пересекающих одновременно обе $V_j(m)$.

В этих терминах свойства (3), (4) нелинейности представляют собой некоторые геометрические условия на пару распределений V_j и грассманиан системы:

см. § 2. В частности, имеет место следующее свойство регулярности решений:

Пусть $L \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^4 \overset{\pi}{\to} \mathbb{R}^2$, $\pi\colon (u,v,x,t) \mapsto (x,t)$ — *проектирование на базу графика произвольного решения системы* (1).

Если система (1) *сильно нелинейна, то кривая*

$$\Sigma^1(\pi \circ i) = \{n \in L,\ \dim \operatorname{Ker}(\pi \circ i)_*(n) = 1\}$$

не имеет особенностей.

Доказательство этих результатов проведено в § 5, 6, 7. § 6 носит вспомогательный характер: в нем доказана теорема трансверсальности для решений системы.

Автор благодарен В. И. Арнольду за помощь в работе и И. А. Богаевскому за полезные обсуждения.

§ 2. Геометрические конструкции, связанные с 2×2-системами казилинейных уравнений

2.1. Пусть V^4 — четырехмерное линейное пространство, σ — заданный на нем пучок внешних 2-форм, т.е. прямая из $P\Lambda^2(V^4)$.

Определения. Пучок σ называется *строго гиперболическим*, если его пересечение с конусом вырожденных 2-форм состоит из пары различных, определенных с точностью до умножения на константу форм ранга 2. Их ядра — это его *собственные подпространства.*

Пример. Вырожденные 2-формы $dx_1 \wedge dx_2$ и $dx_3 \wedge dx_4$ определяют пучок

$$\sigma = \alpha\, dx_1 \wedge dx_2 + \beta\, dx_3 \wedge dx_4, \qquad (\alpha : \beta) \in \mathbb{R}P^1. \tag{6}$$

Строго гиперболический пучок на $\mathbb{R}^4$ восстанавливается по паре V_1, V_2 собственных двумерных плоскостей: достаточно их перевести в подпространства $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = x_4 = 0$ и воспользоваться предыдущим примером.

Определение. Двумерная плоскость $\tau \subset V^4$ называется *σ-интегральной*, если любая 2-форма из σ обращается на ней в нуль.

Множество интегральных плоскостей пучка, его *грассманиан*, обозначим через G_σ:

$$G_\sigma = \{\tau^2 \subset V^4 \mid \forall\, \beta \in \sigma : \beta|_\tau = 0\}.$$

Представление о том, как он устроен, дает

Лемма 1 [5]. *Грассманиан G_σ интегральных плоскостей строго гиперболического пучка диффеоморфен тору $S^1 \times S^1$.*

Доказательство. Собственные подпространства пучка определяют две скрещивающиеся прямые в $\mathbb{R}P^3$. В силу формулы (6) G_σ состоит из прямых, пересекающих эту пару, и, следовательно, диффеоморфен тору. □

2.2. Линейные конструкции п. 2.1 непосредственно переносятся на случай, когда вместо пучка внешних форм рассматривается гиперболическая система (пучок) дифференциальных 2-форм на пространстве расслоения $\pi\colon N^4 \to B^2$, или, что эквивалентно, пара двумерных распределений V_j, $j = 1, 2$.

Определение. Система σ, заданная на N^4, называется *квазилинейной*, если в каждой точке $n \in N^4$ касательная плоскость к слою лежит в грассманиане $G_\sigma(n)$.

Если строго гиперболическая система квазилинейна, то ее собственные подпространства высекают на касательных плоскостях к слоям расслоения пару прямых в каждой точке и, следовательно, определяют два поля направлений: ξ_1 и ξ_2. Их интегральные кривые называют *характеристиками.* Координаты w, z в

слоях расслоения

$$\pi\colon N^4 \to B^2, \qquad (w, z, x, t) \mapsto (x, t),$$

в которых выпрямляются поля ξ_1 и ξ_2, называются *римановыми инвариантами* системы.

Конечно, эти координаты определены неоднозначно, остается еще некоторый произвол: диффеоморфизм

$$w = \varphi(w, x, t), \quad z = \psi(z, x, t), \quad (x, t) = \tau(x, t)$$

переводит характеристические поля направлений $\xi_1 = \partial_z$ и $\xi_2 = \partial_w$ в себя.

Если мы перешли к римановым инвариантам системы, то в этих координатах распределения V_j и отвечающие им 2-формы σ_j (для которых $\operatorname{Ker}\sigma_j = V_j$) приобретают следующий вид: в качестве базисов распределений V_1 и V_2 можно выбрать поля

$$\partial_z,\ \partial_t + \lambda\partial_x + g\partial_w \quad \text{и} \quad \partial_w,\ \partial_t + \mu\partial_x + h\partial_z\,.$$

При этом

$$\sigma_1 = dw \wedge (dx - \lambda\, dt) + g\, dx \wedge dt, \qquad \sigma_2 = dz \wedge (dx - \mu\, dt) + h\, dx \wedge dt\,. \tag{7}$$

Определение. Двумерное подмногообразие $L \overset{i}{\hookrightarrow} N^4$ называется *σ-интегральным*, если $i_L^*\beta = 0$ для любой 2-формы β из σ.

Замечание. Если σ-интегральное подмногообразие L является графиком сечения расслоения π, то уравнения (2) представляют собой координатную запись условий $i_L^*\sigma_j = 0$, $j = 1, 2$. В этом случае L — график некоторого решения (2).

2.3. О грассманиане системы и условиях ее нелинейности. Наличие на N^4 структуры расслоения приводит к стратификации грассманиана системы:

$$G_\sigma = \bigcup_{j=0}^{2} G^j_{\mathrm{sing}},$$

где $G^j_{\mathrm{sing}}(n) = \{\tau \in G_\sigma(n),\ \dim\operatorname{Ker}\pi_*\tau = j\}$. Согласно лемме 1, G^1_{sing} представляет собой пару гиперповерхностей, образованных интегральными плоскостями, которые касаются только одной из характеристик. Поверхность $G^2_{\mathrm{sing}} \subset G_\sigma$ имеет коразмерность 2 и состоит из плоскостей, касательных к слоям расслоения π.

Условия нелинейности (4), о которых шла речь во введении, удобно сформулировать в терминах свойств стратов G^k_{sing} и распределений V_j. Определим трехмерные распределения $\widetilde{V}_j$, плоскости которых в каждой точке натянуты на касательное пространство к слою расслоения π и соответствующие V_j. Мы будем рассматривать системы, для которых выполнено одно из следующих условий:

НЛ-1. Произвольное сечение расслоения $G^1_{\mathrm{sing}} \to N^4$ — неинтегрируемое распределение.

НЛ-2. Распределения $\widetilde{V}_j$ (сильно) неинтегрируемы, в том смысле, что для любой пары образующих $\widetilde{V}_j$, одна из которых не вертикальна, коммутатор не принадлежит $\widetilde{V}_j$.

Предложение 1. *Пусть σ — квазилинейная строго гиперболическая система на $\mathbb{R}^4$, заданная парой форм* (7).

1) *Условие* НЛ-1 *эквивалентно сильной нелинейности системы.*

2) *Условие* НЛ-2 *эквивалентно условию* (4).

Его доказательство дано в § 7.

§3. Особенности проектирований σ-интегральных подмногообразий

Нелинейность системы, как показано в этом параграфе, накладывает некоторые ограничения на топологию решений (теорема 1) и обеспечивает для их проектирований более богатый набор особенностей общего положения.

3.1. Пусть $L \overset{i}{\hookrightarrow} N^4 \overset{\pi}{\to} B^2$ — проектирование решения системы σ вдоль слоев расслоения π. Через $\Sigma(\rho)$ обозначим множество критических точек проекции $\rho = \pi \circ i\colon L \to B^2$, а через $\Sigma^j(\rho)$ — множество

$$\Sigma^j(\rho) = \{n \in L,\ \dim \operatorname{Ker} \rho_*(n) = j\}.$$

Теорема 1. *Пусть квазилинейная система σ на N^4 строго гиперболическая, и для нее выполнено условие сильной нелинейности.*

Тогда для произвольного σ-интегрального подмногообразия L отображение

$$\tilde{i}\colon L \to G_\sigma, \qquad n \mapsto (n, T_n L),$$

трансверсально гиперповерхности G^1_{sing}.

Из соотношения $\Sigma^1(\rho) = \tilde{i}^{-1}(G^1_{\mathrm{sing}})$ получаем

Следствие. *В предположениях теоремы 1 кривая $\Sigma^1(\rho)$ не имеет особых точек.*

Таким образом, свойство (3) гарантирует регулярность множеств $\Sigma^1(\rho)$ одновременно для всех решений системы.

Доказательство теоремы — в § 5.

3.2. Классификация особенностей проектирований.

Определение. Тройка $M^k \overset{i}{\hookrightarrow} N^n \overset{\pi}{\to} B^m$, где $N \overset{\pi}{\to} B$ — расслоение, а M — поверхность в N, может быть с особенностями, называется *проектированием* M. Проектирования $M_j \hookrightarrow N_j \to B_j$, $j = 1, 2$, *эквивалентны*, если имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} M_1 & \hookrightarrow & N_1 & \longrightarrow & B_1 \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow \\ M_2 & \hookrightarrow & N_2 & \longrightarrow & B_2 \end{array} \tag{8}$$

Поверхности в N^4, проектирования которых мы рассматриваем, являются интегральными подмногообразиями некоторой системы форм. Поэтому будем использовать несколько видоизмененное определение устойчивости, допуская шевеления поверхности только в классе решений: росток в точке $n \in N^4$ проектирования $L \hookrightarrow N^4 \to B^2$ решения системы σ называется *σ-устойчивым*, если для любого σ-интегрального подмногообразия $\widetilde{L}$, достаточно близкого к L, существует близкая к $n \in N^4$ точка $\widetilde{n}$, росток $(\widetilde{L}, \widetilde{n}) \hookrightarrow N^4 \to B^2$ в которой эквивалентен диаграмме $(L, n) \hookrightarrow N^4 \to B^2$.

Перечислим особенности общего положения для многозначных решений.

Теорема 2. *Пусть для системы σ на N^4 выполнено условие нелинейности* НЛ-2.

1) *Росток в точке $n \in N^4$ проектирования*

$$(L, n) \hookrightarrow N^4 \to B^2$$

интегрального подмногообразия L является σ-устойчивым, если и только если он эквивалентен ростку в нуле проектирования

$$f^{-1}(0) \hookrightarrow \mathbb{R}^4 \overset{\pi}{\to} \mathbb{R}^2,$$

где $\pi\colon (y,x)\mapsto(x)$ *и* $f\colon \mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$ *задано одной из формул табл.* 1.

2) *Типичные особенности проектирований решений исчерпываются устойчивыми.*

Замечание. Стандартный список устойчивых особенностей проектирований двумерных поверхностей на плоскость короче: он включает в себя только уитнеевские особенности A_1, A_2, A_3. Нормальная форма $C_{2,2}$ — первая из списка простых, не являющаяся устойчивой в стандартном контексте.

§4. Графики римановых инвариантов решения как фронты лежандровых отображений

4.1. Напомним, что *римановыми инвариантами системы* называются координаты в слоях π, в которых выпрямляются семейства ее характеристик. Рассмотрим проекции вдоль этих семейств:

$$\pi^w\colon N^4\to W^3,\qquad (w,z,x,t)\mapsto(w,x,t),$$
$$\pi^z\colon N^4\to Z^3,\qquad (w,z,x,t)\mapsto(z,x,t).$$

Графики инвариантов решения (вообще говоря, многозначные) — его образы при этих проекциях. Пусть $\rho^w=\pi^w|_L$, $\rho^z=\pi^z|_L$ и $\Sigma(\rho^w)$, $\Sigma(\rho^z)$ — множества критических точек этих отображений. В точках множества $\Sigma(\rho)$ ядро $\operatorname{Ker}\rho_*$ касается одной из характеристик; поэтому

$$\Sigma(\rho)=\Sigma(\rho^w)\cup\Sigma(\rho^z). \tag{9}$$

Из (9) следует, что критические точки по крайней мере одной из проекций ρ^w, ρ^z неизолированы. В то же время отображения $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ общего положения могут иметь лишь изолированные критические точки. Объяснением этому служит доказанная в теореме 3* лежандровость ρ^w, ρ^z: типичные особенности в классе всех отображений и в классе лежандровых различны [1].

В следующем утверждении выясняется природа особенностей римановых инвариантов.

Теорема 3. *Пусть* σ *— строго гиперболическая система в* N^4. *Проекцию* $\pi^w\colon N^4\to W^3$ *вдоль семейства ее характеристик можно поднять до отображения*

$$\widetilde{\pi}^w\colon G_\sigma\to PT^*W^3,$$

так что для любого σ*-интегрального подмногообразия имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & G_\sigma \arrow[r, "\widetilde{\pi}^w"] \arrow[d] & PT^*W^3 \arrow[d] \\ L \arrow[ur, "\widetilde{i}"] \arrow[r, "i"'] & N^4 \arrow[r, "\pi^w"'] & W^3 \end{tikzcd}$$

где $\widetilde{i}\colon L\to G_\sigma$, $n\mapsto(n,T_nL)$.

Следствие. *Поле касательных гиперплоскостей к графику риманова инварианта продолжается в особые точки этой гиперповерхности.*

Доказательство теоремы 3. Можно считать, что система σ записана в римановых инвариантах. Для распределений V_j в качестве базисов были выбраны поля

$$E_1=\partial_z,\quad E_3=\partial_t+\lambda\partial_x+g\partial_w;\quad E_2=\partial_w,\quad E_4=\partial_t+\mu\partial_x+h\partial_z.$$

Определим проекцию $\widetilde{\pi}^w\colon G_\sigma \to PT^*W^3$. Если $\varphi_n\colon \mathbb{R}^2 \to G_\sigma(n)$ — локальная параметризация грассманиана в точке $n \in N^4$,

$$\varphi_n\colon (a_1, a_2) \mapsto \langle E_1 + a_1E_3, E_2 + a_2E_4\rangle(n),$$

то

$$\widetilde{\pi}^w\colon (n, \tau) \mapsto (\pi^w(n), \langle \pi^w_* E_3, \pi^w_*(E_2 + a_2E_4)\rangle). \quad \square$$

Теорему 3 удобно переформулировать на языке лежандровых отображений.

Теорема 3*. *Отображение $\rho^w\colon L \to W^3$ является лежандровым: его можно представить как проекцию лежандрова подмногообразия $\widetilde{\rho}^w(L) = \widetilde{\pi}^w \circ \widetilde{i}(L)$ вдоль слоев расслоения $PT^*W^3 \to W^3$.*

Следствие. *График инварианта является фронтом.*

Подмногообразие $\widetilde{\rho}^w(L)$ лежандрово, так как оно образовано касательными к $\rho^w(L)$ плоскостями. Кроме того, оно может иметь особенности.

Предложение 2. *Пусть $x = x(w, z)$, $t = t(w, z)$ — запись интегрального подмногообразия L в римановых инвариантах. Тогда множество $\Sigma(\widetilde{\rho}^w)$ критических точек погружения $\widetilde{\rho}^w\colon L \to PT^*\mathbb{R}^3$ определяется уравнениями*

$$t_z = \begin{vmatrix} 0 & D_z\lambda & D_zg \\ 1 & \lambda & g \\ t_w & \mu t_w & 1 - ht_z \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

Укажем пример лежандрова подмногообразия с особенностями [3]. Пусть $S \hookrightarrow J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^1)$ задано производящей функцией

$$\Phi(y, q) = \int_0^y q_2(\xi^2 + q_1)\,d\xi :$$
$$S = \{(p, q, z) \mid \exists\, y,\ \Phi_y = 0,\ z = \Phi(y, q),\ p = \Phi_q\}. \tag{11}$$

Компонента подмногообразия S, отвечающая уравнению $y^2 + q_1 = 0$, называется *раскрытым зонтиком Уитни.* Это лежандрово подмногообразие имеет особенность в нуле — там, где ранг его параметризации

$$q_1 = -y^2, \quad p_1 = yq_2, \quad p_2 = -2y^3/3, \quad z = -2q_2y^3/3 \tag{12}$$

падает на единицу. На рис. 2.3.б изображен его график —

$$\{(z, q_1, q_2) \mid \exists y,\ \Phi_y = 0,\ z = \Phi(y, q)\}.$$

4.2. Список устойчивых особенностей графиков инвариантов дается следующим утверждением (см. табл. 2, рис. 2).

Теорема 4. *Пусть для системы σ на N^4 выполнено условие нелинейности* НЛ-2.

Для решения системы σ росток проектирования инварианта $\rho^w L \hookrightarrow W^3 \to B^2$ является σ-устойчивым, если и только если он эквивалентен одной из нормальных форм диаграммы

$$f^{-1}(0) \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^2, \qquad \pi\colon (w, x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2),$$

приведенных в табл. 2.

В силу теоремы 3* задача перечисления нормальных форм для проектирований римановых инвариантов сводится к изучению особенностей диаграмм отображений

$$M^2 \xrightarrow{\delta} PT^*\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\beta} \mathbb{R}^2, \tag{13}$$

где $\beta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(w, x, t) \mapsto (x, t)$ — расслоение над двумерной базой, $\delta(M)$ — лежандрово подмногообразие (может быть, с особенностями).

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ вертикальное поле направлений $r = \overline{\partial_w}$, $r(m) \in PT_m\mathbb{R}^3$. Диаграмма (13) означает, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ имеется следующая пара: волновой фронт $\alpha \circ \delta(M)$ и поле направлений r. Задача ее приведения к нормальной форме (другими словами, выпрямление поля направлений при сохранении волнового фронта) изучалась, например, в [2, 4]. Список нормальных форм в этой задаче получается прибавлением к табл. 2 пары (H, r), где $r = \overline{\partial_w}$ и

$$H = \{(x_1, x_2, w) \mid \exists\, y : \Phi_y = 0,\ x_2 = \Phi(y, x_1, w)\}, \tag{14}$$

$\Phi(y, x_1, w) = y^3 + x_1 y^2 + wy$.

В нуле слой проекции $\beta\colon (w, x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2)$ лежит в касательной плоскости к ребру возврата этой поверхности, но при этом не касается самого ребра (рис. 3). Эта особенность не реализуется для гиперболической системы.

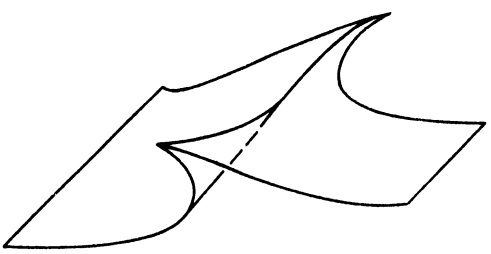

Рис. 3

Предложение 3. *Пусть $m = \rho^w(n)$ — точка на ребре возврата графика инварианта ($n \in \Sigma(\rho)$). Касательная плоскость к графику в этой точке вертикальна, если и только если* $\dim \operatorname{Ker} \rho_*(n) = 2$.

В точке на ребре возврата графика риманова инварианта, отвечающей $\Sigma^2(\rho)$, слой проекции $W^3 \to B^2$ касается самого ребра, что доказывает нереализуемость особенности (14).

С помощью этих результатов мы получаем список нормальных форм для проектирований $\rho^w L \hookrightarrow W^3 \to B^2$. Доказательство реализуемости особенностей проводится, как и в теореме 2.

§5. Доказательство теоремы 1

5.1. Доказательство предложения 1. Рассмотрим коммутатор образующих двумерного распределения

$$\Xi_a = \langle E_1, aE_2 + E_4 \rangle, \qquad \Xi_a \in \Gamma(G^1_{\mathrm{sing}}),$$

где $a\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ — произвольная функция:

$$[E_1, aE_2 + E_4] = a_z \partial_w + \mu_z \partial_x + h_z \partial_z.$$

Условие $[E_1, aE_2 + E_4] \notin \Xi_a$ его неинтегрируемости эквивалентно условию $a_z \partial_w + \mu_z \partial_x \neq 0$. Таким образом, распределения из семейства Ξ_a неинтегрируемы, если и только если $\mu_z \neq 0$.

5.2. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим росток проектирования $(L, n^0) \hookrightarrow \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ σ-интегрального подмногообразия L в критической точке

проекции $\rho = \pi \circ i$. Предположим, что $\dim \operatorname{Ker} \rho_*(n^0) = 1$ и в ядре лежит вектор $E_1 = \partial_z$.

Касательные плоскости к L натянуты на векторные поля $E_j + a_j E_{j+2}$, где $a_j \colon L \to \mathbb{R}$, причем $a_1(n^0) = 0$.

Теорема будет доказана, если мы покажем, что $da_1(n^0) \neq 0$.

Поле касательных к L плоскостей продолжим до распределения на $\mathbb{R}^4$, имеющего следующий вид:

$$\Xi = \langle E_1 + a_1 E_3 \,, E_2 + a_2 E_4 \rangle \,.$$

В точках $n \in L$ коммутатор его образующих лежит в $T_n L$:

$$[E_1 + a_1 E_3 \,, E_2 + a_2 E_4] = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 (E_2 + a_2 E_4) \tag{15}$$

для некоторых α_j. В n^0 это соотношение перепишем в виде

$$[E_1 \,, E_2 + a_2 E_4] = da_1 (E_2 + a_2 E_4) E_3 + \alpha_1 E_1 + \alpha_2 (E_2 + a_2 E_4) \,. \tag{16}$$

Распределение $\langle E_1 \,, E_2 + a_2 E_4 \rangle$ представляет собой сечение расслоения $G^1_{\text{sing}} \to \mathbb{R}^4$. По условию НЛ-1 оно неинтегрируемо, поэтому коммутатор $[E_1 \,, E_2 + a_2 E_4](n^0)$ не лежит в плоскости $T_{n^0} L$, и

$$da_1 (E_2 + a_2 E_4)(n^0) \neq 0. \quad \square$$

В следующем параграфе собраны результаты, необходимые для доказательства теоремы 2: доказана теорема трансверсальности для решений системы дифференциальных уравнений, приведены сведения о структуре пространства $J^k(N, s)$ k-струй s-мерных подмногообразий в N.

§6. Теорема трансверсальности для решений системы

6.1. Как показывает переход от системы (1) к пучку форм, (1) можно понимать как дифференциальное уравнение на поверхности в $\mathbb{R}^4$, а не на графики сечений расслоения π, т.е. забыть про структуру расслоения. Именно такой точки зрения мы и придерживаемся в этом параграфе:

поверхность E в пространстве $J^k(N, s)$ k-струй s-мерных подмногообразий в N будем называть *дифференциальным уравнением* порядка k;

подмногообразие M^s есть *решение* этого уравнения, если его k-струйное расширение $M^{(k)}$ принадлежит E.

Любое подмногообразие M естественным образом поднимается в пространство k-струй:

$$j^k \colon M \to J^k(N, s), \qquad n \mapsto [M]^k_n \,.$$

$[M]^k_n$ есть k-струя в точке n, $M^{(k)}$ — образ M при отображении j^k.

Рассмотрим росток $(M^s, n) \hookrightarrow N$ подмногообразия M в N, являющегося решением уравнения E. Выбор окрестностей, U для точки n, $n \in U \subset N$, и $\widetilde{U}$ для r-струйного расширения $j^r(M \cap U) \subset J^r(N, s)$, определяет окрестность $\Omega^r_E(M^s, n)$ ростка (M^s, n) в пространстве ростков решений уравнения:

$$(\widetilde{M}, \widetilde{n}) \in \Omega^r_E(M^s, n),$$

если $\widetilde{n} \in U$ и $j^r(\widetilde{M} \cap U) \subset \widetilde{U}$. Эта окрестность состоит из ростков, для которых близки r-струйные расширения их представителей.

Определение. *r-м продолжением уравнения E* называется подмногообразие $E^{(r)} \hookrightarrow J^{k+r}(N, s)$, образованное $(k+r)$-струями подмногообразий M в точках $n \in N$, для которых $M^{(k)}$ касается E в точке $[M]^k_n$, причем порядок касания $\geqslant r$.

Определение. Дифференциальное уравнение E *формально интегрируемо*, если все его продолжения — гладкие многообразия, а проекции $E^{(r+1)} \to E^{(r)}$ — гладкие расслоения.

6.2. Теорема трансверсальности. *Пусть $E \subset J^k(N, s)$ — аналитическая формально интегрируемая система дифференциальных уравнений и $C \hookrightarrow E^{(r)}$ — некоторая гладкая поверхность в ее r-м продолжении.*

Тогда для любого ростка $(M^s, n) \hookrightarrow N$ решения M существует такая его окрестность $\Omega_E^{k+r}(M, U)$ в пространстве ростков решений, что поверхности $j^{(k+r)}(\widetilde{M} \cap U)$ трансверсальны C для почти всех $(\widetilde{M}, \widetilde{n}) \in \Omega_E^{k+r}(M, U)$.

Доказательство теоремы трансверсальности. Пусть $(M^s, n) \hookrightarrow N$ — росток решения и $\overline{e} = j^{k+r}(n)$ — образ n при поднятии M в $E^{(r)}$.

В качестве пространства параметров Y выберем окрестность $\Omega_{\overline{e}} \subset E^{(r)}$ точки $\overline{e}$. Из теоремы Картана–Кэлера о существовании решения с данной r-струей вытекает существование ростка семейства $M(e)$, $e \in \Omega_{\overline{e}}$, решений системы, таких что $(k+r)$-струя ростка, отвечающего параметру $e \in \Omega_{\overline{e}}$, равна e.

Рассмотрим семейство $M^{(k+r)}(e)$ $(k+r)$-струй решений. Из самой его конструкции следует, что проекция его графика на $E^{(r)}$ является сюръекцией. Поэтому почти для всех $e \in \Omega_{\overline{e}}$ поверхности $M^{(k+r)}(e)$ трансверсальны C [1]. $\square$

§7. Доказательство теоремы 2

7.1. Грассманиан системы G_σ удобно рассматривать как поверхность в пространстве $J^1(N^4, 2)$ 1-струй двумерных подмногообразий в N^4. Его k-е продолжение обозначим через $G_\sigma^{(k)}$ $(G_\sigma^{(0)} = G_\sigma)$.

Одновременно, зафиксировав систему координат в слое расслоения $\pi\colon N^4 \to B^2$, отождествим интегральные подмногообразия с графиками отображений плоскости переменных слоя на базу.

Далее будет показано, что для рассматриваемых систем классификация ростков проектирований интегральных подмногообразий по классам Боардмана $\Sigma^I \subset J^k(m, s)$ (см. [1]), т.е. по рангам первого дифференциала проекции и ее сужений на подмногообразия особенностей, является исчерпывающей.

Системы уравнений, которые мы рассматриваем, формально интегрируемы. Поэтому можно воспользоваться теоремой трансверсальности из предыдущего параграфа. Она позволяет ограничиться изучением тех классов Σ^I, $I = (i_1, \dots, i_{k+1})$, для которых $\operatorname{codim}(\Sigma^I \cap G_\sigma^{(k)}) \leqslant 2$: от особенностей более высокой коразмерности можно избавиться малым шевелением ростка в классе интегральных подмногообразий. В тех же точках, которые отвечают неустранимым особенностям, ростки проектирований приводятся к одной из указанных в теореме 2 нормальных форм.

Теорему можно получить из следующей серии утверждений.

Предложение 4. *Пусть система σ строго гиперболическая.*

А) *Классы $\Sigma_\sigma^I = \Sigma^I \cap G_\sigma^{(k)}$ коразмерности не выше двух исчерпываются списком*

$$\Sigma_\sigma^1 \subset G_\sigma, \quad \Sigma_\sigma^2 \subset G_\sigma, \quad \Sigma_\sigma^{1,1} \subset G_\sigma^{(1)}. \tag{17}$$

Б) *Все эти множества — гладкие подмногообразия.*

Множество ростков проектирований интегральных подмногообразий $(L, n) \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^4 \overset{\pi}{\to} \mathbb{R}^2$, имеющих особенность Σ_σ^I и таких, что $L^{(k+1)}$ трансверсально Σ_σ^I, обозначим через $\widetilde{\Sigma}_\sigma^I$.

Предложение 5. *Пусть система σ удовлетворяет условию* НЛ-1 *и класс Σ_σ^I содержится в списке* (17). *Тогда множество $\widetilde{\Sigma}_\sigma^I$ непусто.*

Предложение 6. *Пусть система σ удовлетворяет условию* НЛ-2. *Тогда ростки проектирований, имеющих одну из особенностей списка $\widetilde{\Sigma}_\sigma^1$, $\widetilde{\Sigma}_\sigma^2$, $\widetilde{\Sigma}_\sigma^{1,1}$, эквивалентны нормальным формам A_2, $C_{2,2}$, A_3 соответственно.*

Доказательство теоремы 2. По теореме трансверсальности в ситуации общего положения встречаются проектирования решений, которые отвечают классам Σ_σ^I Боардмана коразмерности не выше двух. Их список дается предложением 4. В силу предложения 5 существуют ростки решений, для которых соответствующее струйное продолжение отображения $\rho\colon L \to B$ трансверсально классам Σ_σ^I из списка (17). Приведение этих ростков к нормальным формам гарантируется предложением 6. $\square$

7.2. Доказательство предложений 4–6. Приведем координатную запись уравнений $i_L^*\sigma_j = 0$ для форм σ_j на $\mathbb{R}^4$, заданных формулами (7), при условии что в качестве локальных координат на L выбраны римановы инварианты w, z системы. В этом случае уравнения $i_L^*\sigma_j = 0$ имеют вид

$$x_z - \lambda t_z + g(x_w t_z - x_z t_w) = 0, \quad x_w - \mu t_w - h(x_w t_z - x_z t_w) = 0\,. \tag{18}$$

Система (18) называется *преобразованием годографа* системы (2) (под его действием зависимые и независимые переменные меняются ролями).

В форме, разрешенной относительно x_w, x_z, она имеет вид

$$\begin{aligned} x_w &= t_w\left(\mu + \frac{\lambda-\mu}{gt_w + ht_z - 1}\,ht_z\right) = At_w\,,\\ x_z &= t_z\left(\lambda + \frac{\mu-\lambda}{gt_w + ht_z - 1}\,gt_w\right) = Bt_z\,. \end{aligned} \tag{19}$$

Лемма 2. А) *В качестве координат в слоях расслоения $G_\sigma^{(1)} \to G_\sigma$ над множеством $\Sigma_\sigma^1 \cup \Sigma_\sigma^2$ можно выбрать t_{ww}, t_{zz}.*

Б) *В качестве координат в слоях расслоения $G_\sigma^{(2)} \to G_\sigma^{(1)}$ над множеством $\Sigma_\sigma^{1,1}$ можно выбрать t_{www}, t_{zzz}.*

Доказательство леммы 2. А) Рассматривая 1-продолжение системы (19), т.е. $G_\sigma^{(1)}$, мы приходим к следующему уравнению на функцию $t(w,z)$:

$$\frac{\lambda-\mu}{gt_w + ht_z - 1}\,t_{wz} + t_w D_z A - t_z D_w B = 0\,. \tag{20}$$

В точках множества $\Sigma_\sigma^1 \cup \Sigma_\sigma^2$, где $t_w t_z = 0$, его можно разрешить относительно t_{wz} и смотреть на t_{ww}, t_{zz} как на независимые переменные на поверхности $G_\sigma^{(1)}$, параметризующие слой расслоения $G_\sigma^{(1)} \to G$. Пункт б) доказывается аналогично. $\square$

Доказательство предложения 4. В силу леммы 2 плоскости $t_w = t_{ww} = 0$, $t_z = t_{zz} = 0$ пересекают поверхность, заданную уравнением (20), трансверсально: коэффициенты t_w, t_{ww}, t_z, t_{zz} можно выбрать в качестве параметров на $G_\sigma^{(1)}$, откуда и вытекает гладкость многообразия $\Sigma_\sigma^{1,1}$. Гладкость множеств Σ_σ^1, Σ_σ^2 была доказана в п. 2.3. $\square$

Доказательство предложения 5. А) Из п. а) леммы 2 следует, что в качестве решений системы мы можем выбрать отображения

$$f_j\colon (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0), \qquad j = 1, 2,$$

со следующими наборами тейлоровских коэффициентов в нуле:

а) $t^0_z = 0$, $t^0_w \neq 0$, $t^0_{zz} \neq 0$,

б) $t^0_z = t^0_w = 0$, $t^0_{ww} \neq 0$, $t^0_{zz} \neq 0$.

2-струи этих ростков трансверсальны Σ^1_σ, Σ^2_σ соответственно.

Б) Построим росток с особенностью $\widetilde{\Sigma}^{1,1}_\sigma$. Пусть для $f\colon (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ выполняется условие $t^0_z = t^0_{zz} = 0$. По теореме 1, если f — решение системы уравнений (18), то его 1-продолжение $j^{(1)}f$ пересекает $\Sigma^1_\sigma \subset G_\sigma$ трансверсально, т.е. $t^0_{wz} \neq 0$. Параметр t^0_{zzz} можно выбрать не равным нулю. Совокупность условий $t^0_z = t^0_{zz} = 0$, $t^0_{wz} \neq 0$, $t^0_{zzz} \neq 0$ означает, что росток f — из класса $\widetilde{\Sigma}^{1,1}_\sigma$. □

Доказательство предложения 6. 1. Тот факт, что ростки проектирований с особенностями $\widetilde{\Sigma}^1_\sigma$, $\widetilde{\Sigma}^{1,1}_\sigma$ приводятся к нормальным формам A_2, A_3, следует из теоремы Уитни [1].

2. Рассмотрим теперь особенность $\widetilde{\Sigma}^2_\sigma$, но прежде сделаем небольшое отступление.

Если для отображения $f\colon (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ выполняется условие $j^1_0 f = 0$ и $j^1 f$ трансверсально Σ^2, то его 2-струя приводится к одной из нормальных форм $x_1 = y_1^2 \pm y_2^2$, $x_2 = y_1 y_2$ (гиперболической и эллиптической соответственно). В гиперболическом случае иногда удобнее иная формула: $x_1 = y_1^2$, $x_2 = y_2^2$.

Лемма 3. *Пусть форма σ строго гиперболическая. Если в особой точке $n \in \Sigma^2(\rho)$ 1-струя проекции интегрального подмногообразия на базу трансверсальна Σ^2_σ, то ее 2-струя приводится к гиперболической нормальной форме.*

Доказательство леммы 3. 2-струя проекции $\rho\colon (L, 0) \to \mathbb{R}^2$ в точке $0 \in \Sigma^2(L)$ имеет следующий вид:

$$t = t^0_{ww} w^2/2 + t^0_{zz} z^2/2, \qquad x = \lambda^0 t^0_{ww} w^2/2 + \mu^0 t^0_{zz} z^2/2\,.$$

Из условия трансверсальности множеству Σ^2_σ вытекает, что $t^0_{ww} \neq 0$, $t^0_{zz} \neq 0$. □

Окончание доказательства предложения 6. Отображение $f\colon (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$, 2-струя которого приведена к форме $t = w^2$, $x = z^2$, имеет особенность $C_{2,2}$, если и только если $t = w^2 + az^3 + \dots$, $x = z^2 + bw^3 + \dots$, где $t^0_{zzz} \neq 0$, $x^0_{www} \neq 0$ [4]. Проследим за этими коэффициентами в 3-струе решения. В координатах $T = x - \lambda^0 t$, $X = x - \mu^0 t$ она принимает следующий вид:

$$T = (\mu^0 - \lambda^0) t^0_{zz} z^2/2 + \mu^0_w t^0_{ww} w^3/3 + \dots\,,$$
$$X = -(\mu^0 - \lambda^0) t^0_{ww} w^2/2 + \lambda^0_z t^0_{zz} z^3/3 + \dots\,.$$

При этом $\mu_w \lambda_z \neq 0$, так как система удовлетворяет условию НЛ-2. □

7.3. Доказательство предложения 3. Пусть в критической точке $n^0 \in L$ ядро проекции ρ одномерно и порождено вектором ∂_z. Касательная плоскость к $\rho^w L$ натянута на

$$\rho^w_*(E_2 + a_2 E_4) = a_2 \partial_t + a_2 \mu \partial_x + \partial_w \quad \text{и} \quad \rho^w_* E_3 = \partial_t + \lambda \partial_x + g \partial_w\,.$$

Предположим, что она вертикальна:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ a_2 & a_2(\mu) \end{vmatrix} = a_2(\lambda - \mu) = 0\,.$$

Но $a_2(n^0) \neq 0$, так как критическая точка n^0 лежит в $\Sigma^1(\rho)$; $\lambda \neq \mu$ в силу строгой гиперболичности системы. □

7.4. Доказательство предложения 2. В локальных координатах отображение $\widetilde{\rho}^w\colon L \to PT^*W^3$ записывается в виде $(w, z) \mapsto (w, x(w, z), t(w, z), \overline{R})$, где

$R = (\partial_t + \lambda\partial_x + g\partial_w) \wedge (a_2\partial_t + a_2\mu\partial_x + \partial_w)$ — бивектор и $\overline{R} \in P\Lambda_2(W^3)$ — его проективный представитель.

Формула (12), условие вырожденности этого отображения, вытекает из приведенных далее лемм 4, 5.

Пусть $h = \gamma \circ \delta$ — композиция отображения $\delta\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n \setminus 0$ и канонической проекции $\gamma\colon \mathbb{R}^n \setminus 0 \to \mathbb{R}P^{n-1}$, $z \mapsto \overline{z}$.

Лемма 4. *Вектор $v \in T_z(\mathbb{R}^n \setminus 0)$ лежит в ядре отображения γ_*, если и только если $v = \mu z$ для некоторого числа μ.*

Поэтому ядро отображения $\gamma \circ \delta(m)$ образовано векторами $v \in T_m\mathbb{R}^k$, для которых $d\delta(m)v = \mu\delta(x)$ для некоторого μ.

Лемма 5. *В точке $n^0 \in \Sigma(\rho^w)$ имеет место равенство*

$$D_z(e_3 \wedge \pi_*^w(e_2 + a_2e_4)) = -\pi_*^w(e_2 + a_2e_4) \wedge D_ze_3 + \alpha e_3 \wedge \pi_*^w(e_2 + a_2e_4)$$

для некоторого α.

Доказательство леммы 5. Воспользуемся соотношением (13). В точке $n^0 \in \Sigma(\rho^w)$ его левая часть равна $D_z(e_2 + a_2e_4)$, откуда и следует формула. $\square$

Окончание доказательства предложения 2. Ядро отображения $\widetilde{\rho}^w\colon L \to PT^*W^3$ натянуто на вектор ∂_z. Поэтому продифференцируем бивектор $e_3 \wedge \pi_*^w(e_2 + a_2e_4)$ по z. В критической точке $n^0 \in \Sigma(\widetilde{\rho}^w)$ бивекторы

$$e_3 \wedge \pi_*^w(e_2 + a_2e_4) \quad \text{и} \quad \pi_*^w(e_2 + a_2e_4) \wedge \partial_z e_1$$

пропорциональны (леммы 4, 5), т.е. линейно зависимы $\partial_z e_3 = D_z\lambda\partial_x + D_zg\partial_w$, $e_3 = \partial_t + \lambda\partial_x + g\partial_w$ и $\pi_*^w(e_2 + a_2e_4) = a_2\partial_t + a_2\mu\partial_x + \partial_w$, к чему и сводится (12), если воспользоваться явным видом коэффициентов

$$a_1(w, z) = t_z(1 - gt_w)^{-1}, \qquad a_2(w, z) = t_w(1 - ht_z)^{-1}.$$

Эти формулы нетрудно получить, рассмотрев в качестве базиса на касательных плоскостях к решению пару

$$D_z = \partial_z + t_z\partial_t + x_z\partial_x \quad \text{и} \quad D_w = \partial_w + t_w\partial_t + x_w\partial_x. \quad \square$$

Литература

1. *Арнольд В. И., Варченко А. И., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений. Т. 1. – М.: Наука, 1982.
2. *Арнольд В. И.* Индексы особых точек 1-форм на многообразии с краем, сворачивание инвариантов групп, порожденных отображениями, и особые проекции гладких поверхностей // Успехи мат. наук. – 1979. – Т. 34, вып. 2. – С. 3–38.
3. *Гивенталь А. Б.* Особые лагранжевы многообразия и их лагранжевы отображения // ВИНИТИ, Совр. пробл. математики. Новейшие достижения. – 1988. – Т. 33. – С. 55–112.
4. *Горюнов В. В.* Особенности проектирования полных пересечений. – ВИНИТИ, Совр. пробл. математики. – 1983. – Т. 22. – С. 167–206.
5. *Лычагин В. В.* Геометрическая теория особенностей решений нелинейных дифференциальных уравнений // ВИНИТИ, Пробл. геометрии. – 1988. – Т. 20. – С. 207–247.
6. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. – М.: Наука, 1981.
7. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977.
8. *Cavalcante J., Mckean H. P.* The classical shallow water equations: symplectic geometry // Physica D – 1982. – V. 4. – P. 253–260.
9. *Lax P.* Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves. – Philadelphia: SIAM, 1973.

НИИ системного анализа

Поступило в редакцию
20 марта 1992 г.