В. Е. Федоров, Л. В. Борель, Разрешимость нагруженных линейных эволюционных уравнений с вырожденным оператором при производной, *Алгебра и анализ*, 2014, том 26, выпуск 3, 190–206

Алгебра и анализ
Том 26 (2014), №3

РАЗРЕШИМОСТЬ НАГРУЖЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ

© В. Е. ФЕДОРОВ, Л. В. БОРЕЛЬ

В работе методы теории вырожденных полугрупп операторов и теорема о сжимающем отображении использованы для получения условий однозначной разрешимости начальных задач с условием Коши и с обобщенным условием Шоуолтера для одного класса нагруженных линейных дифференциально-операторных уравнений первого порядка, имеющих вырожденный оператор при производной. Полученные общие результаты использованы при исследовании начально-краевых задач для нагруженных уравнений в частных производных, не разрешимых относительно производной по времени.

§1. Введение

Начально-краевые задачи для уравнений в частных производных, описывающих различные процессы в естественных и технических науках, часто удобно исследовать в рамках задачи Коши для эволюционных уравнений в банаховых пространствах [1–3]. Некоторые начально-краевые задачи редуцируются к уравнениям с вырожденным оператором при производной [4, 5]. При этом нередко встречаются так называемые нагруженные уравнения, содержащие помимо дифференциальной части некоторый функционал от искомой функции в виде, например, интеграла от решения по некоторому множеству [6–8]. Такие уравнения возникают при поиске приближенных решений дифференциальных уравнений [9], при математическом моделировании нелокальных [10], в том числе фрактальных процессов и явлений, например, в математической биологии [11], в теории тепломассопереноса в составных средах с фрактальной организацией [12], в экономике.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, уравнение соболевского типа, вырожденная полугруппа операторов.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского государственного университета (грант правительства РФ №14.Z50.31.0020).

Цель данной работы — установить условия разрешимости начальных задач для эволюционных уравнений с вырожденным оператором при производной (часто называемых уравнениями соболевского типа [5, 13, 14]), имеющих вид

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + \int_0^T \mathcal{K}(t,s)u(s)d\mu(s), \quad t \in [0,T],$$

где $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$ (линейный и непрерывный оператор, действующий из банахова пространства $\mathfrak{U}$ в банахово пространство $\mathfrak{V}$), $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$ (линейный, замкнутый, плотно определенный в $\mathfrak{U}$ оператор, действующий в $\mathfrak{V}$), $T > 0$, $\mathcal{K} : [0,T] \times [0,T] \to \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. Нагруженные уравнения такого вида ранее, по-видимому, не исследовались, поэтому тематика данной работы представляется актуальной.

При исследовании разрешимости нагруженных уравнений, не разрешимых относительно производной, использовались результаты теории вырожденных полугрупп операторов, в частности, вид решения уравнения

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + g(t), \tag{1.1}$$

где $g : [0,T] \to \mathfrak{V}$, полученные в [15], и теорема о сжимающем отображении. Такой подход позволил обойтись без ограничений на ядро или образ интегрального оператора, использованных при рассмотрении уравнений $L\dot{u}(t) = Mu(t) + Nu(t)$ в работе [16] по отношению к возмущающему оператору N.

Одной из первых работ, посвященных исследованию разрешимости уравнения (1.1) в бесконечномерном банаховом пространстве с использованием методов теории полугрупп операторов, является работа А. Г. Руткаса [17] (см. также работы [18, 19] о вырожденных уравнениях и библиографию там же). В ней помимо исследования этого уравнения методами преобразования Лапласа, а также в терминах диссипативных пар операторов в гильбертовых пространствах найдены условия корректности, равномерной нормальности, равномерной корректности задачи Коши для однородного уравнения (1.1) (т. е. в случае $g \equiv 0$) в терминах пучка пары операторов L, M. При этом обсуждаются вопросы существования и свойства (C_0)-непрерывной полугруппы такого уравнения, заданной на замыкании множества начальных значений решений задачи Коши на положительной полуоси. В более поздних работах A. Yagi и A. Favini [4], Г. А. Свиридюк и В. Е. Фёдоров [5, 15], И. В. Мельникова [20] исследуют вопросы существования вырожденных полугрупп различных классов гладкости, разрешающих однородное уравнение (1.1). Обзор этих результатов можно найти в [15].

В §2 работы коротко сформулированы некоторые результаты о вырожденных сильно непрерывных полугруппах операторов, используемые в основной части статьи. §3 содержит основные результаты данной работы. Здесь сформулированы задача Коши и обобщенная задача Шоуолтера для нагруженного уравнения соболевского типа и доказаны теоремы об однозначной разрешимости этих задач в случае пары операторов в основной части уравнения, порождающей вырожденную сильно непрерывную полугруппу. В §4 рассмотрено нагруженное псевдопараболическое уравнение, возникающее в теории фильтрации, с краевыми и различными начальными условиями, с различными интегральными операторами. Для всех рассмотренных задач установлены условия однозначной разрешимости с помощью абстрактных результатов предыдущего параграфа, а также продемонстрированы некоторые возможные улучшения общих результатов в частных случаях.

§2. Решение вырожденного неоднородного уравнения

Сформулируем некоторые условия на операторы, которые будут использованы в дальнейшем, и соответствующие им утверждения, которые доказаны ранее в [15].

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — банаховы пространства, оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{V}$ линеен и непрерывен (для краткости обозначим $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$), а оператор $M : \mathrm{dom} M \to \mathfrak{V}$ линеен, замкнут и плотно определен в $\mathfrak{U}$ (коротко, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$). Введем обозначения

$$\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}, \quad \overline{\mathbb{R}}_+ = \{0\} \cup \mathbb{R}_+,$$
$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V},\mathfrak{U})\},$$
$$R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1} L, \quad L^L_\mu = L(\mu L - M)^{-1}.$$

Определение 1. Пусть $p \in \mathbb{N}_0$. Оператор M называется *сильно* (L,p)*-радиальным*, если

(i) $\exists a \in \mathbb{R}\ (a, +\infty) \subset \rho^L(M)$;

(ii) $\exists K \in \mathbb{R}_+\ \forall \mu \in (a, +\infty)\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\max\{\|(R^L_\mu(M))^{n(p+1)}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \|(L^L_\mu(M))^{n(p+1)}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V})}\} \leqslant \frac{K}{(\mu - a)^{n(p+1)}};$$

(iii) существует плотный в $\mathfrak{V}$ линеал $\overset{\circ}{\mathfrak{V}}$ такой, что

$$\|M(\mu L - M)^{-1}(L^L_\mu(M))^{p+1} f\|_{\mathfrak{V}} \leqslant \frac{\mathrm{const}(f)}{(\mu - a)^{p+2}} \quad \forall f \in \overset{\circ}{\mathfrak{V}};$$

$$\|(R^L_\mu(M))^{p+1}(\mu L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})} \leqslant \frac{K}{(\mu - a)^{p+2}}$$

при любом $\mu \in (a, +\infty)$.

Замечание 1. Эквивалентность условий данного определения аналогичным более сложным условиям, использованным в работах [15, 16], доказана в [21].

Положим $\mathfrak{U}^0 = \ker(R^L_\mu(M))^{p+1}$, $\mathfrak{V}^0 = \ker(L^L_\mu(M))^{p+1}$; $\mathfrak{U}^1$ — замыкание образа оператора $\mathrm{im}(R^L_\mu(M))^{p+1}$ в пространстве $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}^1$ — замыкание образа $\mathrm{im}(L^L_\mu(M))^{p+1}$ в пространстве $\mathfrak{V}$. Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$ $(\mathrm{dom}M_k = \mathrm{dom}M \cap \mathfrak{U}^k)$, $k = 0, 1$.

Теорема 1 (см. [15]). *Пусть оператор M сильно (L, p)-радиален. Тогда*

(i) $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}^0 \oplus \mathfrak{V}^1$;

(ii) $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{V}^k)$, $M_k \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{V}^k)$, $k = 0, 1$;

(iii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^0; \mathfrak{U}^0)$ *и* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^1; \mathfrak{U}^1)$;

(iv) *оператор* $H = M_0^{-1}L_0$ *нильпотентен степени не больше* p;

(v) *если* $u_0 \in \mathrm{dom}M$, *а функция* $g \in C^1([0, T]; \mathfrak{V})$ *такова, что* $(I - Q)g \in C^{p+1}([0, T]; \mathfrak{V}^0)$ *и выполняется условие*

$$(I - P)u_0 = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I - Q)g)^{(k)}(0), \tag{2.1}$$

то существует единственное решение $u \in C^1([0, T]; \mathfrak{U}) \cap C([0, T]; \mathrm{dom}M)$ *задачи Коши* $u(0) = u_0$ *для уравнения*

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + g(t), \quad t \in [0, T], \tag{2.2}$$

при этом

$$u(t) = U(t)u_0 + \int_0^t U(s)L_1^{-1}Qg(t - s)ds - \sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I - Q)g)^{(k)}(t), \tag{2.3}$$

где P — проектор вдоль подпространства $\mathfrak{U}^0$ на $\mathfrak{U}^1$, Q — проектор вдоль $\mathfrak{V}^0$ на $\mathfrak{V}^1$, операторы вырожденной сильно непрерывной полугруппы $\{U(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ удовлетворяют условию

$$\forall t \in \overline{\mathbb{R}}_+ \quad \|U(t)\| \leqslant Ke^{at}$$

с константами a, K из определения 1;

(vi) *если* $u_0 \in \mathrm{dom} M_1$, *а функция* $g \in C^1([0,T];\mathfrak{V})$ *такова, что* $(I - Q)g \in C^{p+1}([0,T];\mathfrak{V}^0)$, *то задача* $Pu(0) = u_0$ *для уравнения* (2.2) *имеет единственное решение* $u \in C^1([0,T];\mathfrak{U}) \cap C([0,T];\mathrm{dom} M)$, *при этом оно имеет вид* (2.3).

Замечание 2. Проекторы могут быть вычислены по формулам

$$P = s\text{-}\lim_{\mu\to+\infty}(\mu R^L_\mu(M))^{p+1}, \quad Q = s\text{-}\lim_{\mu\to+\infty}(\mu L^L_\mu(M))^{p+1}.$$

Замечание 3. Вырожденность полугруппы, упомянутая в формулировке теоремы 1, означает, что ее единицей $U(0)$ является не тождественный оператор, а нетривиальный проектор, в данном случае $U(0) = P$ (более подробно см. в [15]).

§3. Линейное нагруженное уравнение соболевского типа

Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ — банаховы пространства, $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$, $M \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$. Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{3.1}$$

для линейного интегро-дифференциального уравнения

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + \int_0^T \mathcal{K}(t,s)u(s)d\mu(s), \quad t \in [0,T], \tag{3.2}$$

где $T > 0$, $\mathcal{K} : [0,T] \times [0,T] \to \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. *Решением* задачи (3.1), (3.2) называется функция $u \in C^1([0,T];\mathfrak{U})$, для которой при всех $t \in [0,T]$ $u(t) \in \mathrm{dom} M$ выполняется равенство (3.2) на отрезке $[0,T]$ и справедливо условие (3.1).

Частным случаем уравнения (3.2) является нагруженное уравнение

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + \sum_{l=1}^{l_0} C_l(t)u(t_l), \quad t \in [0,T],$$

где $l_0 \in \mathbb{N}$, $C_l(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$ при $t \in [0,T]$, $l = 1,\dots,l_0$, $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_{l_0} \leqslant T$.

Для сильно (L,p)-радиального оператора M, оператор-функции $\mathcal{K}$ из класса $C^{p+1,0}([0,T] \times [0,T];\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$ (непрерывной и имеющей непрерывные по обоим аргументам частные производные по первому аргументу до порядка $p+1$) и функции ограниченной вариации $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ обозначим при $T > 0$, $n = 0, 1, \ldots, p+1$

$$\frac{\partial^n \mathcal{K}}{\partial t^n} \equiv \mathcal{K}_t^{(n)}, \quad V_0^T(\mu) \max_{t,s\in[0,T]} \left\| \mathcal{K}_t^{(n)}(t,s) \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})} \equiv K_n(T),$$
$$V_0^T(\mu) \max_{t,s\in[0,T]} \left\{ s \left\| \mathcal{K}_t^{(n)}(t,s) \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})} \right\} \equiv K_{n,1}(T),$$
$$\|L_1^{-1}Q\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})} \equiv C_1, \quad \|H^k M_0^{-1}(I-Q)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})} \equiv h_k, \ \ k = 0, 1, \ldots, p,$$

$$F(T) = \max\Bigg\{ C_1 K(T) \sum_{n=0}^{p+1} K_{n,1}(T) + h_0 \sum_{n=0}^{p+1} K_n(T), h_1 \sum_{n=0}^{p+1} K_n(T), \ldots, h_p \sum_{n=0}^{p+1} K_n(T) \Bigg\}.$$

Здесь $V_0^T(\mu)$ — вариация функции μ на отрезке $[0,T]$,

$$K(T) = \max\{K, Ke^{aT}\} = \begin{cases} K, & a \leqslant 0; \\ Ke^{aT}, & a > 0, \end{cases}$$

K, a — константы из определения 1. В силу теоремы 1 (v) $\|U(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \leqslant K(T)$ при всех $t \in [0,T]$.

Теорема 2. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $u_0 \in \mathrm{dom} M \cap \mathfrak{U}^1$, $\mathcal{K} \in C^{p+1,0}([0,T] \times [0,T]; \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$,*

$$\mathcal{K}_t^{(n)}(0,s) \equiv 0, \quad n = 0, 1, \ldots, p, \tag{3.3}$$

$\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации, $F(T) < 1$. Тогда существует единственное решение $u \in C^1([0,T];\mathfrak{U})$ задачи (3.1), (3.2).

Доказательство. Согласно теореме 1 (v) для $g \in C^{p+1}([0,T];\mathfrak{V})$, удовлетворяющего условию (2.1) при заданном в (3.1) $u_0 \in \mathrm{dom} M$, решение $u \in C^1([0,T];\mathfrak{U})$ задачи (2.2), (3.1) существует, единственно и имеет вид (2.3) при $t \in [0,T]$. Используя этот вид решения при заданной функции g, определим оператор

$$
\begin{aligned}
[\Phi g](t) &= \int_0^T \mathcal{K}(t,s)u(s)d\mu(s) \\
&= \int_0^T \mathcal{K}(t,s)U(s)u_0 d\mu(s) + \int_0^T \mathcal{K}(t,s)\int_0^s U(\tau)L_1^{-1}Qg(s-\tau)d\tau d\mu(s) \\
&- \int_0^T \mathcal{K}(t,s)\sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1}(I-Q)g^{(k)}(s)d\mu(s).
\end{aligned}
$$

Покажем, что при $n = 0, 1, \dots, p$, $s \in [0,T]$

$$
\frac{\partial}{\partial t}\int_0^T \mathcal{K}_t^{(n)}(t,s)f(s)d\mu(s) = \int_0^T \mathcal{K}_t^{(n+1)}(t,s)f(s)d\mu(s),
$$

где $f \in C([0,T];\mathfrak{U})$. По теореме Лагранжа при некотором θ, лежащем между t и $t+\delta$,

$$
\begin{aligned}
&\left\| \frac{\mathcal{K}_t^{(n)}(t+\delta,s) - \mathcal{K}_t^{(n)}(t,s)}{\delta} f(s) - \mathcal{K}_t^{(n+1)}(t,s)f(s) \right\|_{\mathfrak{V}} \\
&\qquad \leqslant \left\| \mathcal{K}_t^{(n+1)}(\theta,s) - \mathcal{K}_t^{(n+1)}(t,s) \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})} \max_{\tau\in[0,T]} \|f(\tau)\|_{\mathfrak{U}} \to 0
\end{aligned}
$$

при $\delta \to 0$ равномерно по $s \in [0,T]$, поскольку оператор-функция $\mathcal{K}_t^{(n+1)}(t,s)$ непрерывна на $[0,T]\times[0,T]$, а потому и равномерно непрерывна на этом компакте в смысле нормы в $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$. Таким образом, при $n = 1, 2, \dots, p+1$

$$
\frac{\partial^n}{\partial t^n}\int_0^T \mathcal{K}(t,s)f(s)d\mu(s) = \int_0^T \mathcal{K}_t^{(n)}(t,s)f(s)d\mu(s).
$$

Отсюда следует, что в условиях теоремы при $t \in [0,T]$, $n = 0,1,\dots,p+1$

$$
\begin{aligned}
[\Phi g]^{(n)}(t) &= \int_0^T \mathcal{K}_t^{(n)}(t,s)U(s)u_0 d\mu(s) \\
&+ \int_0^T \mathcal{K}_t^{(n)}(t,s)\int_0^s U(\tau)L_1^{-1}Qg(s-\tau)d\tau d\mu(s) \\
&- \int_0^T \mathcal{K}_t^{(n)}(t,s)\sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1}(I-Q)g^{(k)}(s)d\mu(s).
\end{aligned}
$$

Поэтому в силу условий (3.3) имеем $[\Phi g]^{(n)}(0) = 0$ при $n = 0,1,\dots,p$. Так как в силу условий данной теоремы $(I-P)u_0 = 0$, функция Φg удовлетворяет условию (2.1) с заданным $u_0 \in \mathrm{dom} M_1$.

Рассмотрим банахово пространство $C^{p+1}([0,T];\mathfrak{V})$ с нормой

$$
\|g\|_{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1} \sup_{t\in[0,T]} \|g^{(k)}(t)\|_{\mathfrak{V}}
$$

и метрическое пространство

$$
E = \left\{ g \in C^{p+1}([0,T];\mathfrak{V}) : \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1}(I-Q)g^{(k)}(0) = 0 \right\}
$$

с метрикой $d(g,h) = \|g-h\|_{p+1}$. Оно не пусто, поскольку содержит постоянную функцию $g \equiv 0$. Покажем, что E является полным метрическим пространством. Пусть $\{g_n\} \subset E$, $\lim\limits_{n,m\to\infty} \|g_n - g_m\|_{p+1} = 0$. Тогда в силу полноты $C^{p+1}([0,T];\mathfrak{V})$ существует $g \in C^{p+1}([0,T];\mathfrak{V})$, для которого $\lim\limits_{n\to\infty} \|g_n - g\|_{p+1} = 0$. Имеем

$$
\begin{aligned}
&\left\| \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1}(I-Q)g^{(k)}(0) \right\|_{\mathfrak{V}} \\
&\quad \leqslant \left\| \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1}(I-Q)\left(g^{(k)}(0) - g_n^{(k)}(0)\right) \right\|_{\mathfrak{V}} \leqslant \max_{k=0,\dots,p} h_k \|g - g_n\|_{p+1} \to 0
\end{aligned}
$$

при $n \to \infty$. Поэтому $g \in E$. В силу доказанных свойств функций Φg имеет место действие оператора $\Phi : E \to E$.

Далее,

$$[\Phi g_1](t)-[\Phi g_2](t)=\int\limits_0^T \mathcal{K}(t,s)\int\limits_0^s U(s-\tau)L_1^{-1}Q(g_1(\tau)-g_2(\tau))d\tau d\mu(s)$$
$$-\int\limits_0^T \mathcal{K}(t,s)\sum_{k=0}^{p} H^kM_0^{-1}(I-Q)(g_1^{(k)}(s)-g_2^{(k)}(s))d\mu(s),$$

$$\begin{aligned}&\|\Phi g_1-\Phi g_2\|_{p+1}\\ &\leqslant \sum_{n=0}^{p+1}\left(C_1K(T)K_{n,1}(T)\|g_1-g_2\|_0+K_n(T)\sum_{k=0}^{p} h_k\left\|g_1^{(k)}-g_2^{(k)}\right\|_0\right)\\ &\leqslant F(T)\|g_1-g_2\|_{p+1}.\end{aligned}$$

Поскольку по условию теоремы $F(T)<1$, то Φ является сжимающим отображением на полном метрическом пространстве E. Следовательно, по теореме о неподвижной точке найдется единственный элемент $g^*\in E$ такой, что $g^*=\Phi g^*$. В этом случае функция

$$u(t)=U(t)u_0+\int\limits_0^t U(t-s)L_1^{-1}Qg^*(s)ds-\sum_{k=0}^{p} H^kM_0^{-1}(I-Q)g^{*(k)}(t)$$

является одновременно решением задач (2.2), (3.1) и (3.1), (3.2), так как $L\dot{u}(t)-Mu(t)=g^*(t)=[\Phi g^*](t)$.

Пусть $u_1,u_2\in C^1([0,T];\mathfrak{U})$ — два решения задачи (3.1), (3.2). При $i=1,2$ обозначим

$$g_i(t)=\int\limits_0^T \mathcal{K}(t,s)u_i(s)d\mu(s),$$

тогда

$$g_i^{(n)}(t)=\int\limits_0^T \mathcal{K}_t^{(n)}(t,s)u_i(s)d\mu(s),\quad n=1,\dots,p+1,$$

$g_i^{(n)}(0)=0$ при $n=0,1,\dots,p$. Имеем $L\dot{u}_i-Mu_i=g_i\in C^{p+1}([0,T];\mathfrak{V})$ и $\Phi g_i=g_i$, поскольку g_i удовлетворяют условию (2.1) с $u_0\in \mathrm{dom}M_1$, и поэтому

$$u_i(t)=U(t)u_0+\int\limits_0^t U(t-s)L_1^{-1}Qg_i(s)ds-\sum_{k=0}^{p} H^kM_0^{-1}(I-Q)g_i^{(k)}(t),\quad i=1,2.$$

В силу единственности неподвижной точки сжимающего отображения $\Phi : E \to E$ получаем равенство $g_1 \equiv g_2$. Обозначим $w(t) = u_1(t) - u_2(t)$, $t \in [0, T]$, тогда $L\dot{w}(t) - Mw(t) \equiv 0$, $w(0) = 0$. В силу теоремы 1 (v) $w \equiv 0$, поэтому решение задачи (3.1), (3.2) единственно. $\square$

Рассмотрим теперь обобщенную задачу Шоуолтера [22]

$$Pu(0) = u_0, \tag{3.4}$$

которая для уравнений соболевского типа возникает естественным образом (см. [16] и примеры далее).

Теорема 3. *Пусть оператор* M *сильно* (L, p)*-радиален,* $u_0 \in \mathrm{dom}M \cap \mathfrak{U}^1$, $\mathcal{K} \in C^{p+1,0}([0, T] \times [0, T]; \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V}))$, $\mu : [0, T] \to \mathbb{R}$ — *функция ограниченной вариации,* $F(T) < 1$. *Тогда существует единственное решение* $u \in C^1([0, T); \mathfrak{U})$ *задачи* (3.2), (3.4).

Отличие от доказательства предыдущей теоремы заключается в том, что используется ссылка на теорему 1 (vi) о разрешимости задачи (2.2), (3.4), поэтому в качестве метрического пространства, в котором действует сжимающий оператор прежнего вида, используется все пространство $E = C^{p+1}([0, T]; \mathfrak{V})$.

Замечание 4. Условие $F(T) < 1$ в теоремах 2 и 3 определяется только операторами L, M, оператор-функцией $\mathcal{K}$ и вариацией функции μ и не зависит от u_0.

Замечание 5. Пусть $\mu : [0, \widehat{T}] \to \mathbb{R}$. Можно заметить, что при некоторых дополнительных условиях можно добиться выполнения неравенства $F(T) < 1$ в предположении справедливости остальных условий теоремы 2 (или 3) за счет уменьшения T в пределах полуинтервала $(0, \widehat{T}]$. Действительно,

$$\lim_{T \to 0+} K_{n,1}(T) = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, p + 1,$$

в силу условий (3.3)

$$\lim_{T \to 0+} K_n(T) = 0, \quad n = 0, \ldots, p,$$

поэтому

$$F(0+) \equiv \lim_{T \to 0+} F(T) = \max_{k=0,\ldots,p} h_k \left| \lim_{t \to 0+} \mu(t) - \mu(0) \right| \left\| \mathcal{K}_t^{(p+1)}(0, 0) \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})}.$$

Поэтому упомянутым дополнительным условием является выполнение неравенства $F(0+) < 1$, которое с очевидностью выполняется, например, если функция μ непрерывна в нуле справа или $\mathcal{K}_t^{(p+1)}(0, 0) = 0$. Тогда при некотором малом T решение задачи (3.1), (3.2) (или (3.2), (3.4)) будет существовать на отрезке $[0, T]$.

Замечание 6. В случае, когда функция $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ монотонна, можно условие $F(T) < 1$ теоремы 2 (3) заменить на менее жесткое условие $\widetilde{F}(T) < 1$, где

$$\widetilde{F}(T) = \max\Big\{C_1 K(T)\sum_{n=0}^{p+1}\widetilde{K}_{n,1}(T) + h_0\sum_{n=0}^{p+1}\widetilde{K}_n(T), h_1\sum_{n=0}^{p+1}\widetilde{K}_n(T), \dots, h_p\sum_{n=0}^{p+1}\widetilde{K}_n(T)\Big\},$$

$$\widetilde{K}_n(T) \equiv \max_{t\in[0,T]}\int_0^T \Big\|\mathcal{K}_t^{(n)}(t,s)\Big\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})} d|\mu(s)|,$$

$$\widetilde{K}_{n,1}(T) \equiv \max_{t\in[0,T]}\int_0^T s\Big\|\mathcal{K}_t^{(n)}(t,s)\Big\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})} d|\mu(s)|$$

при $T > 0$, $n = 0, 1, \dots, p+1$.

§4. Нагруженное псевдопараболическое уравнение

В качестве примера применения теоремы 2 рассмотрим начально-краевую задачу

$$z(x,0) = z_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{4.1}$$

$$z(x,t) = \Delta z(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \tag{4.2}$$

для модифицированного уравнения Дзекцера, возникающего в теории фильтрации [23],

$$(\lambda - \Delta)z_t(x,t) = \triangle z(x,t) - \beta\Delta^2 z(x,t) + \int_0^T\int_\Omega k(x,y,t,s)z(y,s)dyd\mu(s), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{4.3}$$

где ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеет гладкую границу, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}_+$.

Пусть

$$H_0^2(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega) : u(x) = 0,\, x \in \partial\Omega\}, \;\; \|u\|_{H_0^2(\Omega)} = \|u\|_{L_2(\Omega)} + \|\Delta u\|_{L_2(\Omega)},$$

$$H_\partial^4(\Omega) = \{u \in H^4(\Omega) : u(x) = \Delta u(x) = 0,\, x \in \partial\Omega\}.$$

Чтобы редуцировать задачу (4.1)–(4.3) к задаче (3.1), (3.2), введем в рассмотрение семейство интегральных операторов $\mathcal{K}(t,s) : H_0^2(\Omega) \to L_2(\Omega)$,

$t, s \in [0, T]$, вида

$$[\mathcal{K}(t,s)u](\cdot) = \int\limits_{\Omega} k(\cdot, y, t, s)u(y)dy.$$

В силу неравенства Гёльдера

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{K}(t,s)u\|^2_{L_2(\Omega)} &= \int\limits_{\Omega} \left| \int\limits_{\Omega} k(x,y,t,s)u(y)dy \right|^2 dx \\
&\leqslant \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} |k(x,y,t,s)|^2 dydx \int\limits_{\Omega} |u(y)|^2 dy \\
&\leqslant \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} |k(x,y,t,s)|^2 dydx \|u\|^2_{H_0^2(\Omega)}, \\
\|\mathcal{K}(t,s)\|_{\mathcal{L}(H_0^2(\Omega);L_2(\Omega))} &\leqslant \|k(\cdot,\cdot,t,s)\|_{L_2(\Omega\times\Omega)}, \quad t,s \in [0,T].
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Обозначим через λ_m, $m \in \mathbb{N}$, собственные значения оператора Лапласа, определенного на $H_0^2(\Omega)$ и действующего в $L_2(\Omega)$, занумерованные по невозрастанию с учетом их кратности.

Кроме того, пусть $\{\varphi_m : m \in \mathbb{N}\}$ — ортонормированная система соответствующих собственных функций этого оператора. Предполагается, что $\lambda_m = \lambda$ при некоторых m, т.е. уравнение (4.3) не разрешимо относительно z_t.

Лемма 1. *Пусть* $\beta > 0$, $\lambda - \beta\lambda^2 \neq 0$, $k(x,y,t,s) \in C([0,T] \times [0,T]; L_2(\Omega \times \Omega))$, $k_t(x,y,t,s) \in C([0,T] \times [0,T]; L_2(\Omega \times \Omega))$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ — *функция ограниченной вариации. Тогда*

$$\begin{aligned}
F(T) \leqslant V_0^T(\mu) \Bigg(&\sup_{\lambda \neq \lambda_m} \frac{\sqrt{1+\lambda_m^2}}{|\lambda - \lambda_m|} \max\left\{1, \sup_{\lambda\neq\lambda_m} \frac{\sqrt{1+\lambda_m^2}}{|\lambda-\lambda_m|}\right\} \\
&\times \max\left\{1, \exp\left(T \sup_{\lambda_m \neq \lambda} \frac{\lambda_m - \beta\lambda_m^2}{\lambda - \lambda_m}\right)\right\} \\
&\times \Big(\max_{t,s\in[0,T]} s\|k(\cdot,\cdot,t,s)\|_{L_2(\Omega\times\Omega)} + \max_{t,s\in[0,T]} s\|k_t(\cdot,\cdot,t,s)\|_{L_2(\Omega\times\Omega)} \Big) \\
&+ \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{|\lambda - \beta\lambda^2|} \Big(\max_{t,s\in[0,T]} \|k(\cdot,\cdot,t,s)\|_{L_2(\Omega\times\Omega)} + \max_{t,s\in[0,T]} \|k_t(\cdot,\cdot,t,s)\|_{L_2(\Omega\times\Omega)} \Big) \Bigg).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Доказательство. Возьмем пространства $\mathfrak{U} = H_0^2(\Omega)$, $\mathfrak{V} = L_2(\Omega)$, операторы $L = \lambda - \triangle$, $M = \Delta - \beta\Delta^2$ с областью определения $\mathrm{dom} M = H_\partial^4(\Omega)$.

Известно [16], что в случае $\lambda-\beta\lambda^2\neq 0$ такой оператор M является сильно $(L,0)$-радиальным.

Оценим сверху величину $F(T)$ для задачи (4.1)–(4.3) согласно теореме 2, используя результаты работы [16]. Имеем

$$L_1^{-1}Q=\sum_{\lambda_m\neq\lambda}^{\infty}\frac{\langle\cdot,\varphi_m\rangle\varphi_m}{\lambda-\lambda_m},$$

поэтому для $v\in L_2(\Omega)$

$$\|L_1^{-1}Qv\|^2_{H^2(\Omega)}=\sum_{\lambda_m\neq\lambda}\frac{(1+\lambda_m^2)|\langle v,\varphi_m\rangle|^2}{|\lambda-\lambda_m|^2},$$

$$C_1=\|L_1^{-1}Q\|_{\mathcal{L}(L_2(\Omega);H^2(\Omega))}=\sup_{\lambda\neq\lambda_m}\frac{\sqrt{1+\lambda_m^2}}{|\lambda-\lambda_m|}.$$

Аналогично

$$M_0^{-1}(I-Q)=\sum_{\lambda_m=\lambda}\frac{\langle\cdot,\varphi_m\rangle\varphi_m}{\lambda-\beta\lambda^2},\ \ h_0=\|M_0^{-1}(I-Q)\|_{\mathcal{L}(L_2(\Omega);H_0^2(\Omega))}=\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{|\lambda-\beta\lambda^2|},$$

$$a=\sup_{\lambda_m\neq\lambda}\frac{\lambda_m-\beta\lambda_m^2}{\lambda-\lambda_m},\quad K=\max\left\{1,\sup_{\lambda\neq\lambda_m}\frac{\sqrt{1+\lambda_m^2}}{|\lambda-\lambda_m|}\right\},$$

$$K(T)=\max\left\{1,\sup_{\lambda\neq\lambda_m}\frac{\sqrt{1+\lambda_m^2}}{|\lambda-\lambda_m|},e^{aT},e^{aT}\sup_{\lambda\neq\lambda_m}\frac{\sqrt{1+\lambda_m^2}}{|\lambda-\lambda_m|}\right\},$$

$$K_0(T)\leqslant V_0^T(\mu)\max_{t,s\in[0,T]}\|k(\cdot,\cdot,t,s)\|_{L_2(\Omega\times\Omega)},$$

$$K_1(T)\leqslant V_0^T(\mu)\max_{t,s\in[0,T]}\|k_t(\cdot,\cdot,t,s)\|_{L_2(\Omega\times\Omega)},$$

$$K_{0,1}(T)\leqslant V_0^T(\mu)\max_{t,s\in[0,T]}\left\{s\|k(\cdot,\cdot,t,s)\|_{L_2(\Omega\times\Omega)}\right\},$$

$$K_{1,1}(T)\leqslant V_0^T(\mu)\max_{t,s\in[0,T]}\left\{s\|k_t(\cdot,\cdot,t,s)\|_{L_2(\Omega\times\Omega)}\right\}.$$

При этом используется неравенство (4.4). Лемма доказана. □

Обозначим правую часть неравенства (4.5) через $\widetilde{F}(T)$.

Теорема 4. *Пусть $\beta>0$, $\lambda-\beta\lambda^2\neq 0$, $z_0\in H^4_\partial(\Omega)$, $\langle z_0,\varphi_m\rangle=0$ при $m\in\mathbb{N}$, для которых $\lambda_m=\lambda$, $k(x,y,t,s)\in C([0,T]\times[0,T];L_2(\Omega\times\Omega))$, $k_t(x,y,t,s)\in C([0,T]\times[0,T];L_2(\Omega\times\Omega))$, $k(x,y,0,s)\equiv 0$, $\mu:[0,T]\to\mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации, $\widetilde{F}(T)<1$. Тогда существует единственное решение $u\in C^1([0,T];H_0^2(\Omega))$ задачи* (4.1)–(4.3).

Доказательство. Очевидно, что функция z_0 удовлетворяет условиям теоремы 2 на функцию u_0 из условия (3.1) в терминах задачи (4.1)–(4.3).

В силу неравенства (4.4) функции $k(\cdot,\cdot,t,s), k_t(\cdot,\cdot,t,s) \in L_2(\Omega\times\Omega)$ определяют операторы $\mathcal{K}(t,s), \mathcal{K}_t^{(1)}(t,s) \in \mathcal{L}(H_0^2(\Omega); L_2(\Omega))$ при $t,s \in [0,T]$. Выполнение остальных условий на оператор-функцию $\mathcal{K}$ из теоремы 2 следует из условий на функцию k. Осталось применить теорему 2. $\square$

Для такого же уравнения с более простым интегральным оператором

$$(\lambda-\Delta)z_t(x,t) = \triangle z(x,t) - \beta\Delta^2 z(x,t) + \int\limits_0^T k(t,s)z(x,s)d\mu(s), \quad (x,t) \in \Omega\times[0,T], \tag{4.6}$$

в той же области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ рассмотрим краевые условия (4.2) и начальное условие

$$(\lambda-\Delta)(z(x,0)-z_0(x)) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{4.7}$$

Тогда рассматриваемая задача (4.2), (4.6), (4.7) представляет собой частный случай обобщенной задачи Шоуолтера (3.2), (3.4), поскольку проектор P имеет вид $P = \sum\limits_{\lambda_m\neq\lambda} \langle\cdot,\varphi_m\rangle\varphi_m$ [16], и поэтому $\ker(\lambda-\Delta) = \ker P$. Операторы $\mathcal{K}(t,s) : H_0^2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, $t,s \in [0,T]$, в данном случае имеют вид

$$[\mathcal{K}(t,s)u](\cdot) = k(t,s)u(\cdot), \quad \|\mathcal{K}(s)\|_{\mathcal{L}(H_0^2(\Omega);L_2(\Omega))} \leqslant |k(t,s)|.$$

Для уравнения (4.6) построим функцию

$$\begin{aligned}\widetilde{F}(T) = V_0^T(\mu)\Bigg(&\sup_{\lambda\neq\lambda_m}\frac{\sqrt{1+\lambda_m^2}}{|\lambda-\lambda_m|}\max\left\{1, \sup_{\lambda\neq\lambda_m}\frac{\sqrt{1+\lambda_m^2}}{|\lambda-\lambda_m|}\right\}\\ &\times\max\left\{1, \exp\left(T\sup_{\lambda_m\neq\lambda}\frac{\lambda_m-\beta\lambda_m^2}{\lambda-\lambda_m}\right)\right\}\\ &\times\Big(\max_{t,s\in[0,T]}\{s|k(t,s)|\} + \max_{t,s\in[0,T]}\{s|k_t(t,s)|\}\Big)\\ &+\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{|\lambda-\beta\lambda^2|}\Big(\max_{t,s\in[0,T]}|k(t,s)| + \max_{t,s\in[0,T]}|k_t(t,s)|\Big)\Bigg).\end{aligned}$$

Рассуждая, как при доказательстве теоремы 4, с помощью теоремы 3 нетрудно получить следующий результат.

Теорема 5. *Пусть* $\beta > 0$, $\lambda-\beta\lambda^2 \neq 0$, $z_0 \in H_\partial^4(\Omega)$, $k \in C([0,T]\times[0,T];\mathbb{R})$, $k_t \in C([0,T]\times[0,T];\mathbb{R})$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ — *функция ограниченной вариации,* $\widetilde{F}(T) < 1$. *Тогда существует единственное решение* $u \in C^1([0,T]; H_0^2(\Omega))$ *задачи* (4.2), (4.6), (4.7).

Отметим лишь, что $(\lambda - \Delta)z_0 \in \mathfrak{U}^1$, так как $(I - P)(\lambda - \Delta)z_0 = 0$. Поэтому и предположения теоремы 3 на $u_0 = (\lambda - \Delta)z_0$ из условия (3.4) выполняются.

Пусть $n = 1$, $\Omega = (0, \pi)$, $\lambda = -1$, $\beta = 2$, $T = 1$, рассмотрим частный случай задачи (4.2), (4.6), (4.7)

$$z(x,0) + z_{xx}(x,0) - z_0(x) - z_{0xx}(x,0) = 0, \quad x \in (0,\pi), \tag{4.8}$$

$$z(0,t) = z_{xx}(0,t) = z(\pi,t) = z_{xx}(\pi,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{4.9}$$

$$\begin{gathered} -z_t(x,t) - z_{txx}(x,t) = z_{xx}(x,t) - 2z_{xxxx}(x,t) + c(t)z(x,1), \\ (x,t) \in (0,\pi) \times [0,1], \end{gathered} \tag{4.10}$$

$c \in C^1([0,1];\mathbb{R})$, $c(0) = 0$. Тогда (см. [16]) $\lambda_m = -m^2$, $\varphi_m = \sin mx$ при $m \in \mathbb{N}$,

$$C_1 = \|L_1^{-1}Q\|_{\mathcal{L}(L_2(0,\pi);H^2(0,\pi))} = \sup_{m=2,3,\dots} \frac{\sqrt{1+m^4}}{m^2-1} = \frac{\sqrt{17}}{3},$$

$$h_0 = \|M_0^{-1}(I-Q)\|_{\mathcal{L}(L_2(\Omega);H_0^2(\Omega))} = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$a = \sup_{m=2,3,\dots} \frac{-m^2-2m^4}{m^2-1} = -12, \quad K(T) = K = \sup\left\{1, \frac{\sqrt{17}}{3}\right\} = \frac{\sqrt{17}}{3}.$$

Поэтому имеем

$$\widetilde{F}(T) = \left(\frac{17}{9} + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\left(\max_{t\in[0,1]}|c(t)| + \max_{t\in[0,1]}|c'(t)|\right),$$

и при $\left(\max_{t\in[0,1]}|c(t)| + \max_{t\in[0,1]}|c'(t)|\right) < \frac{9}{17+3\sqrt{2}}$ существует единственное решение задачи (4.8)–(4.10) на отрезке $[0,1]$.

Список литературы

[1] Соломяк М. З., *Применение теории полугрупп к исследованию дифференциальных уравнений в пространствах Банаха*, Докл. АН СССР **122** (1958), №5, 767–769.

[2] Хилле Э., Филлипс Р., *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962.

[3] Крейн С. Г., *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, М., 1967.

[4] Favini A., Yagi A., *Degenerate differential equations in Banach spaces*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., vol. 215, Marcel Dekker Inc., New York, 1999.

[5] Sviridyuk G. A., Fedorov V. E., *Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators*, VSP, Utrecht, 2003.

[6] Нахушев А. М., *О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка*, Дифференц. уравнения **12** (1976), №1, 103–108.

[7] Дженалиев М. Т., *К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений*, Компьютерный центр ИТПМ, Алматы, 1995.

[8] Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И., *Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений*, Fылым, Алматы, 2010.

[9] Нахушев А. М., *Нагруженные уравнения и их приложения*, Дифференц. уравнения **19** (1983), №1, 86–94.

[10] Нахушева В. А., *Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов*, Наука, М., 2006.

[11] Нахушев А. М., *Уравнения математической биологии*, Высш. школа, М., 1995.

[12] Сербина Л. И., *Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах*, Наука, М., 2007.

[13] Демиденко Г. В., Успенский С. В., *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной*, Науч. книга, Новосибирск, 1998.

[14] Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д., *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, Физматлит, М., 2007.

[15] Федоров В. Е., *Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов*, Алгебра и анализ **12** (2000), №3, 173–200.

[16] Федоров В. Е., Рузакова О. А., *О разрешимости возмущенных уравнений соболевского типа*, Алгебра и анализ **20** (2008), №4, 189–217.

[17] Руткас А. Г., *Задача Коши для уравнения* $Ax`(t)+Bx(t) = f(t)$, Дифференц. уравнения **11** (1975), №11, 1996–2010.

[18] Руткас А. Г., Худошин И. Г., *Глобальная разрешимость одного вырожденного дифференциально-операторного уравнения*, Нелінійні коливания **7** (2004), №3, 403–417.

[19] Руткас А. Г., *Разрешимость полулинейных дифференциальных уравнений с сингулярностью*, Укр. мат. ж. **60** (2008), №2, 225–239.

[20] Мельникова И. В., *Задача Коши для включения в банаховых пространствах и пространствах распределений*, Сиб. мат. ж. **42** (2001), №4, 892–910.

[21] Федоров В. Е., *Свойства псевдорезольвент и условие существования вырожденной полугруппы операторов*, Вестн. Челяб. гос. ун-та. Сер. Мат., мех., информ. **2009**, вып. 20, 12–19.
[22] Showalter R. E., *Partial differential equations of Sobolev–Galperin type*, Pacific J. Math. **31** (1969), no. 3, 787–793.
[23] Дзекцер Е. С., *Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью*, Докл. АН СССР **202** (1972), №5, 1031–1033.

Челябинский
государственный университет
454001, Челябинск
ул. Братьев Кашириных, 129
Россия
E-mail: kar@csu.ru

E-mail: lidiya904@mail.ru

Поступило 10 января 2014 г.