*Функциональный анализ и его приложения*
2012, т. 46, вып. 2, с. 24–36

УДК 517.5

# Усредненные волновые операторы на сингулярном спектре*

© 2012. В. В. Капустин

Доказано существование пар унитарных (или самосопряженных) операторов с сингулярной спектральной мерой, разность которых является оператором ранга 2, для которых абелевых волновых операторов не существует. Также обсуждается непосредственно связанная с этим задача построения преобразования Гильберта относительно сингулярной меры на единичной окружности.

## §1. Введение

Для заданной пары унитарных операторов в гильбертовых пространствах $U_1\colon H_1 \to H_1$, $U_2\colon H_2 \to H_2$ и ограниченного оператора $X\colon H_1 \to H_2$ волновой оператор — это предел последовательности $U_2^n X U_1^{-n}$. Здесь рассматривается волновой оператор прошлого, т. е. предел при $n \to +\infty$. Согласно классической теореме Като–Розенблюма–Пирсона, сильный волновой оператор, являющийся сильным пределом последовательности $U_2^n X U_1^{-n}$, существует, если спектральная мера оператора $U_1$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и коммутатор $XU_1 - U_2X$ является ядерным оператором (см. [1], [2], где рассматривается случай пары самосопряженных операторов). В простом примере с сингулярной спектральной мерой, когда $H_1 = H_2 = \mathbb{C}$ — одномерное пространство, $U_1 = I$, $U_2 = \omega I$, причем $|\omega| = 1$, $\omega \neq 1$, и $X = I$, имеем $U_2^n X U_1^{-n} = \omega^n I$ и, очевидно, предела не существует. Однако средние Чезаро последовательности $U_2^n X U_1^{-n}$, а именно, операторы $\frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^m U_2^n X U_1^{-n} = \frac{1}{m+1}\frac{1-\omega^{m+1}}{1-\omega}\, I$, сходятся к 0.

В случае, когда $\operatorname{rank}(XU_1 - U_2X) = 1$, средние Чезаро последовательности $U_2^n X U_1^{-n}$ имеют предел в слабой операторной топологии; фактически это было доказано в статье [3], явная формулировка содержится в статье [4]. Здесь исследуется случай $\operatorname{rank}(XU_1 - U_2X) = 2$. Естественно задать вопрос, всегда ли существует предел средних Чезаро в случае коммутатора $XU_1 - U_2X$ ранга 2. Оказывается, ответ отрицательный; в силу тауберовой теоремы Харди–Литтлвуда, см. [5], для ограниченных последовательностей сходимость средних Чезаро равносильна сходимости средних Абеля, а также и усреднений для ряда других естественных методов суммирования. Поэтому с помощью этих методов невозможно добиться сходимости. Здесь будет дано прямое доказательство, не опирающееся на тауберову теорему; класс методов суммирования, для которых наш результат верен, обсуждается в §5.

Отметим, что поскольку последовательность $U_2^n X U_1^{-n}$ ограничена, всегда можно найти слабо сходящуюся подпоследовательность (самой последовательности, последовательности ее средних Чезаро и т.п.). Таким образом, естествен-

*Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 11-01-00584-а.

но интересоваться вопросом об «универсальном» методе суммирования, пригодном для построения усредненных пределов для некоторого класса операторов.

Рассмотрим спектральные разложения унитарных операторов $U_1$, $U_2$. Пространства $H_1$, $H_2$ могут быть записаны как прямые интегралы,

$$H_i = \int \oplus H_i(z)\, d\mu(z), \qquad i = 1, 2,$$

в которых операторы $U_i$ действуют как умножение на $z$. Мера $\mu$ допускает разложение $\mu = \mu_{pp} + \mu_{ac} + \mu_{cs}$, где $\mu_{pp}$, $\mu_{ac}$, $\mu_{cs}$ — чисто точечная, абсолютно непрерывная и непрерывная сингулярная части меры $\mu$ соответственно. В соответствии с этим разложением пространства $H_1$, $H_2$ распадаются в три прямых слагаемых:

$$H_i = H_i^{pp} \oplus H_i^{ac} \oplus H_i^{cs}, \qquad i = 1, 2.$$

В случае, когда $H_1^{cs} = \{0\}$ или $H_2^{cs} = \{0\}$, если коммутатор $XU_1 - U_2X$ ядерный, средние Чезаро последовательности $U_2^n X U_1^{-n}$ имеют предел. В этой статье будет показано, что если подпространства $H_1^{cs}$, $H_2^{cs}$ оба нетривиальны, усредненного волнового оператора может не существовать; при этом может быть так, что $X = I$, т. е. операторы $U_1$, $U_2$ действуют в одном пространстве, коммутатор превращается в разность $U_1 - U_2$ и, кроме того, эта разность имеет ранг 2.

Абелевы средние последовательности $(x_0, x_1, x_2, \dots)$ имеют вид $(1-r)\sum r^n x_n$ при $r \in (0,1)$, $r \nearrow 1$.

**Основная теорема.** *Для любого унитарного оператора $U\colon H \to H$, имеющего нетривиальную непрерывную сингулярную часть, существует унитарный оператор $U_*$ в пространстве $H$, такой, что* $\operatorname{rank}(U_* - U) = 2$ *и абелевы усреднения последовательности $U^n U_*^{-n}$, $n \geqslant 0$, не имеют предела в слабой операторной топологии.*

Основная теорема дает отрицательный ответ на вопрос из [4]. Приводимое здесь доказательство неконструктивно; представляется интересным найти конкретные примеры, когда абелевых волновых операторов не существует, и описать соответствующие асимптотики последовательности $U_2^n X U_1^{-n}$, которая всегда ограничена, но, таким образом, может иметь весьма нерегулярное поведение.

В § 4 преобразование Гильберта относительно сингулярной меры $\mu$ на единичной окружности, не имеющей точечных масс, определяется как предел функций $\int \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - rz}\, d\mu(\xi)$ при $r \nearrow 1$. Связь с усредненными волновыми операторами состоит в том, что сходимость абелевых средних последовательности операторов $U^n X U^{-n}$ в случае, когда коммутатор имеет вид $XU - UX = (\,\cdot\,, \bar{f})1 - (\,\cdot\,, 1)f$, $f \in L^2(\mu)$, равносильна сходимости интегральных операторов вида $h \mapsto \int \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - rz}\, h(\xi)\, d\mu(\xi)$. Таким образом, из основной теоремы статьи вытекает результат о существовании таких функций $f \in L^2(\mu)$, для которых нормы этих интегральных операторов ограничены равномерно по $r$, однако их предела при $r \nearrow 1$ не существует.

В § 6 рассматривается аналог основной теоремы для пары самосопряженных операторов.

## § 2. Компактные операторы

Пусть $X\colon L^2(\mu) \to H$ — оператор ранга 1, где $\mu$ — борелевская мера на единичной окружности, $H$ — гильбертово пространство; $Xf = (f, a)h$ для некоторых $a \in L^2(\mu)$, $h \in H$. Тогда

$$Xz^{-n}f = (z^{-n}f, a)h = (f\bar{a}\,\mu)\hat{}_n \cdot h, \tag{1}$$

где $(f\bar{a}\,\mu)\hat{}_n = \int \bar{z}^n f\bar{a}\,d\mu$ — коэффициенты Фурье комплексной меры $f\bar{a}\,\mu$.

Меры Райхмана — это меры $\mu$, для которых $\hat{\mu}_n = \int \bar{z}^n\,d\mu(z) \to 0$ при $n \to \infty$. Все меры, абсолютно непрерывные относительно меры Лебега, являются мерами Райхмана; Д. Е. Меньшов впервые построил сингулярную меру, коэффициенты Фурье которой стремятся к нулю. Если $\mu$ — мера Райхмана, то также и $(u\mu)\hat{}_n = \int \bar{z}^n u\,d\mu \to 0$ при $n \to \infty$ для любой функции $u \in L^1(\mu)$.

**Предложение 2.1.** *Предположим, что спектральная мера унитарного оператора $U\colon H \to H$ абсолютно непрерывна относительно некоторой меры Райхмана на единичной окружности. Если $X$ — компактный оператор, то операторы $XU^{-n}$ стремятся к 0 в сильной операторной топологии.*

**Доказательство.** Для любого элемента пространства $H$ минимальное подпространство, содержащее этот элемент и приводящее унитарный оператор $U$, по спектральной теореме может быть отождествлено с $L^2(\mu)$ для некоторой меры Райхмана $\mu$. Если $X$ — оператор ранга 1, утверждение следует из соотношения (1); любой компактный оператор $X$ может быть приближен по норме конечными линейными комбинациями операторов ранга 1. □

Если мера $\mu$ не имеет атомов (это означает, что оператор умножения на $z$ в $L^2(\mu)$ не имеет собственных векторов), то по теореме Винера для любой функции $u \in L^1(\mu)$ средние Чезаро модулей коэффициентов $(u\mu)\hat{}_n$ стремятся к 0. Это дает аналог предыдущего предложения для произвольных сингулярных мер, не имеющих точечных нагрузок, из которого получается следующее известное утверждение.

**Лемма 2.2.** *Пусть $U_1\colon H_1 \to H_1$, $U_2\colon H_2 \to H_2$ — унитарные операторы и $X\colon H_1 \to H_2$ — компактный оператор. Если $U_1$ не имеет собственных векторов, то сильный предел средних Чезаро последовательности $U_2^n X U_1^{-n}$ существует и равен 0.*

В случае, если спектральная мера оператора $U_1$ абсолютно непрерывна относительно меры Райхмана, сильный предел самой последовательности $U_2^n X U_1^{-n}$ существует и равен 0.

## § 3. Доказательство основной теоремы

Пусть $\mu$ — вероятностная сингулярная мера на единичной окружности, не имеющая атомов, и $U$ — оператор умножения на $z$ в $L^2(\mu)$.

Построим внутреннюю функцию $\theta$ в единичном круге по формуле

$$\frac{1+\theta(z)}{1-\theta(z)} = \int \frac{1+\bar{\xi}z}{1-\bar{\xi}z}\,d\mu(\xi). \tag{2}$$

Поскольку $\mu$ — вероятностная мера, имеем $\theta(0) = 0$. Для комплексного числа $\alpha$, $|\alpha| = 1$, мера Кларка $\sigma_\alpha$ определяется соотношением

$$\frac{\alpha + \theta(z)}{\alpha - \theta(z)} = \int \frac{1 + \bar{\xi} z}{1 - \bar{\xi} z}\, d\sigma_\alpha(\xi),$$

см. [6]; имеем $\mu = \sigma_1$. В $\sigma_\alpha$-почти всех точках функция $\theta$ имеет некасательные пределы, равные $\alpha$; поэтому все меры $\sigma_\alpha$ взаимно сингулярны.

Определим пространство $K_\theta = H^2 \ominus \theta H^2$. Из условия $\theta(0) = 0$ следует, что $1 \in K_\theta$, $\bar{z}\theta \in K_\theta$. Операторы в $K_\theta$, определенные формулой

$$h \mapsto zh - (\,\cdot\,, \bar{z}\theta)(\theta - \alpha), \qquad h \in K_\theta, \tag{3}$$

где $|\alpha| = 1$, унитарны; это легко следует из того, что функция $\bar{z}\theta$ отображается в постоянную функцию $\alpha$, а условие $(h, \bar{z}\theta) = 0$ означает, что $zh \in K_\theta$. В статье [6] доказано, что операторы (3) унитарно эквивалентны операторам умножения на $z$ в $L^2(\sigma_\alpha)$. Для комплексных чисел $\alpha$ с модулем 1 определим операторы $U_\alpha$ в $L^2(\mu)$ формулой

$$U_\alpha = U - (1 - \alpha)(\,\cdot\,, \bar{z})1. \tag{4}$$

Рассмотрим унитарное отождествление пространств $K_\theta$ и $L^2(\mu)$ из статьи [6], осуществляющее спектральное представление оператора (3) при $\alpha = 1$. Тогда оператор (3) при произвольном $\alpha$ с модулем 1 унитарно эквивалентен оператору $U_\alpha$, и, таким образом, $\sigma_\alpha$ — спектральная мера унитарного оператора $U_\alpha$.

Для нас важно то, что унитарные операторы $U$, $U_\alpha$ имеют спектральную кратность 1 и что их спектральные меры взаимно сингулярны. Известное доказательство этого факта, в котором меры Кларка не упоминаются явно, можно найти в [7] (для пары самосопряженных операторов, разность которых имеет ранг 1).

**Доказательство основной теоремы.** Достаточно доказать теорему в случае, когда $U$ — оператор умножения на $z$ в $L^2(\mu)$, где $\mu$ — вероятностная сингулярная мера на единичной окружности, не имеющая атомов. Зафиксируем $\alpha \neq 1$, построим унитарный оператор $U_\alpha$ в $L^2(\mu)$ по формуле (4) и положим $\nu = \sigma_\alpha$. Возьмем $X = \gamma(U_\alpha)$, где $\gamma \in L^\infty(\nu)$. Из того, что $U - U_\alpha$ — оператор ранга 1, а операторы $\gamma(U_\alpha)$ и $U_\alpha$ коммутируют, следует, что $\operatorname{rank}(\gamma(U_\alpha)U - U\gamma(U_\alpha)) \leqslant 2$. (Все функции из $L^\infty$ от унитарных операторов (3) в $K_\theta$ являются усеченными операторами Тёплица, см., например, [8]. Таким образом, наша конструкция неявно связана с усеченными операторами Тёплица, и эта связь будет рассмотрена в отдельной статье, тогда как здесь наши рассуждения в основном допускают независимое изложение.)

Если $\gamma$ — функция, значения которой имеют модуль 1, то $X = \gamma(U_\alpha)$ — унитарный оператор в $L^2(\mu)$, для которого $\operatorname{rank}(XU - UX) \leqslant 2$. Для $U_* = XUX^{-1}$ имеем $U_* - U = (XU - UX)X^{-1}$; следовательно, $\operatorname{rank}(U_* - U) \leqslant 2$, и усредненная сходимость последовательности $U^n U_*^{-n} = U^n X U^{-n} X^{-1}$ равносильна усредненной сходимости последовательности $U^n X U^{-n}$.

Если слабо сходятся абелевы средние последовательности $U^n \gamma(U_\alpha) U^{-n}$ при любой функции $\gamma$ с модулем 1, то по линейности они слабо сходятся и при всех $\gamma \in L^\infty(\nu)$. Требуется показать, что такое невозможно. Таким образом, теорема будет доказана, как только удастся установить следующий факт.

**Лемма 3.1.** *Пусть $\mu$ — сингулярная вероятностная мера на единичной окружности, не имеющая атомов, $\alpha \neq 1$ — комплексное число с модулем 1, $\mu = \sigma_1$, $\nu = \sigma_\alpha$. Тогда существуют функции $\gamma \in L^\infty(\sigma_\alpha)$, такие, что абелевы усреднения последовательности операторов $U^n\gamma(U_\alpha)U^{-n}$ в $L^2(\mu)$ не имеют слабого предела.*

**Доказательство.** Предположим, что, напротив, сходимость имеется для всех $\gamma \in L^\infty(\nu)$. Имеем

$$(U^n\gamma(U_\alpha)U^{-n}1, 1) = (\gamma(U_\alpha)\, U^{-n}1, U^{-n}1) = \int \gamma \cdot |VU^{-n}1|^2\, d\nu,$$

где $V\colon L^2(\mu) \to L^2(\nu)$ — унитарный оператор, осуществляющий переход к спектральному представлению оператора $U_\alpha$.

Поскольку эта формула верна для любой функции $\gamma \in L^\infty(\nu)$ и пространство $L^1$ слабо секвенциально полно, абелевы средние последовательности функций $|VU^{-n}1|^2 \in L^1(\nu)$ имеют слабый предел $s \in L^1(\nu)$. Таким образом, для всех $\gamma \in L^\infty(\nu)$ усреднения Абеля последовательности $(U^n\gamma(U_\alpha)U^{-n}1, 1)$ стремятся к $\int \gamma s\, d\nu$.

С другой стороны, если $\gamma$ — непрерывная функция, то оператор $\gamma(U_\alpha) - \gamma(U)$ компактен. Действительно, поскольку $U_\alpha - U$ — оператор ранга 1, операторы $U_\alpha^n - U^n$ имеют конечный ранг для любого целого $n$. Следовательно, $\operatorname{rank}(p(U_\alpha) - p(U)) < \infty$ для любого тригонометрического многочлена $p$, и остается учесть, что любая непрерывная функция на окружности равномерно приближается тригонометрическими многочленами.

По лемме 2.2 средние Чезаро последовательности $U^n(\gamma(U_\alpha) - \gamma(U))U^{-n}$ стремятся к нулю, или, что равносильно, средние Чезаро операторов $U^n\gamma(U_\alpha)U^{-n}$ стремятся к $\gamma(U)$. Таким образом, средние Чезаро, а следовательно, и абелевы средние последовательности $(U^n\gamma(U_\alpha)U^{-n}1, 1)$ стремятся к $(\gamma(U)1, 1) = \int \gamma\, d\mu$.

Выше было доказано, что они стремятся к $\int \gamma s\, d\nu$; поэтому $\int \gamma s\, d\nu = \int \gamma\, d\mu$ для любой непрерывной функции $\gamma$, и тогда $s\nu = \mu$. Поскольку меры $\mu = \sigma_1$ и $\nu = \sigma_\alpha$ взаимно сингулярны, приходим к противоречию.

Лемма доказана, и тем самым доказательство теоремы также завершено. □

## § 4. Преобразование Гильберта относительно сингулярной меры

В этом параграфе будет показано, что наша конструкция связана с преобразованием Гильберта относительно конечной сингулярной борелевской меры $\mu$ на единичной окружности, не имеющей точечных масс.

Возьмем $H_1 = H_2 = L^2(\mu)$, и пусть $U_1 = U_2$ — оператор умножения на независимую переменную, который также будет обозначаться через $U$. Если $f$ — достаточно гладкая функция на единичной окружности (например, если $f$ имеет непрерывную производную), то можно определить оператор $X$ формулой

$$(Xh)(z) = \int \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\, h(\xi)\, d\mu(\xi), \qquad h \in L^2(\mu).$$

Коммутатор тогда является оператором ранга 2 вида

$$XU - UX = (\,\cdot\,, \bar{f})1 - (\,\cdot\,, 1)f. \tag{5}$$

В статье [4] вопрос о волновых операторах в общем случае коммутаторов ранга 2 был сведен к частному случаю коммутаторов вида (5), где $X$ действует в

$L^2(\mu)$, $f \in L^2(\mu)$, $\mu$ — сингулярная борелевская мера на единичной окружности, не имеющая атомов.

Теперь найдем формулу для средних Абеля последовательности $U_2^n X U_1^{-n}$. Имеем

$$X - U_2^n X U_1^{-n} = \sum_{k=1}^{n} U_2^{k-1} K U_1^{-k},$$

где $K = XU_1 - U_2 X$. Если $K = (\,\cdot\,, \bar{f})1 - (\,\cdot\,, 1)f$ в $L^2(\mu)$, то можно записать

$$(Kh)(z) = \int (f(\xi) - f(z))h(\xi)\, d\mu(\xi).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}[(X - U^n X U^{-n})h](z) &= \sum_{k=1}^{n} (U^{k-1} K U^{-k} h)(z) \\ &= \int (f(\xi) - f(z)) \sum_{k=1}^{n} z^{k-1} \xi^{-k} h(\xi)\, d\mu(\xi) \\ &= \int (f(\xi) - f(z)) \frac{1 - (\bar{\xi} z)^n}{\xi - z}\, h(\xi)\, d\mu(\xi).\end{aligned}$$

Вычислим ядро усредненного интегрального оператора. Имеем

$$(1 - r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n \frac{1 - (\bar{\xi} z)^n}{\xi - z} = \frac{r}{\xi - rz}\,.$$

Таким образом, сходимость абелевых средних последовательности $U^n X U^{-n}$ равносильна сходимости операторов в $L^2(\mu)$ вида

$$h \mapsto \int \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - rz}\, h(\xi)\, d\mu(\xi). \tag{6}$$

Это также доказывает, что если для некоторого ограниченного оператора $X$ в $L^2(\mu)$ коммутатор имеет вид (5), то нормы операторов (6) равномерно ограничены по $r$:

$$\left\| \int \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - rz}\, h(\xi)\, d\mu(\xi) \right\|_{L^2(\mu)} \leqslant \mathrm{const} \cdot \|h\|_{L^2(\mu)}, \qquad h \in L^2(\mu), \tag{7}$$

где константа зависит от $f$ и не зависит от $r$. Обратное также верно.

**Предложение 4.1.** *Для функции $f \in L^2(\mu)$ существование оператора $X$ в $L^2(\mu)$, для которого выполнено соотношение* (5), *равносильно оценке* (7).

**Доказательство.** Возьмем $f \in L^2(\mu)$ и предположим, что выполнена оценка (7). Для $h \equiv 1$ найдем последовательность $r_n$, стремящуюся к 1 и такую, что функции $\int \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - r_n z}\, d\mu(\xi)$ слабо сходятся в $L^2(\mu)$. Пусть $X$ — оператор, который отображает функцию $h \in L^2(\mu)$ в слабый предел функций $\int \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - r_n z} h(\xi)\, d\mu(\xi)$, определенный на множестве тех $h$, для которых этот предел существует. По построению последовательности $r_n$ значение $X1$ определено.

Для $r<1$, $h\in L^2(\mu)$ имеем

$$\int \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-rz}\,\xi h(\xi)\,d\mu(\xi) - z\int \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-rz}\,h(\xi)\,d\mu(\xi)$$
$$= \int (f(\xi)-f(z))\frac{\xi-z}{\xi-rz}\,h(\xi)\,d\mu(\xi)$$
$$= \int (f(\xi)-f(z))h(\xi)\,d\mu(\xi) - (1-r)\cdot z\int \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-rz}\,h(\xi)\,d\mu(\xi). \qquad (8)$$

В силу оценки (7) последний интеграл задает функцию в $L^2(\mu)$, норма которой ограничена равномерно по $r$, а следовательно, при $r\nearrow 1$ все выражение стремится к $\int (f(\xi)-f(z))h(\xi)\,d\mu(\xi) = (Kh)(z)$, где $K=(\,\cdot\,,\bar f)1-(\,\cdot\,,1)f$. Отсюда видно, что вектор $Xh$ определен тогда и только тогда, когда определен вектор $X(Uh)$, причем $XU-UX=K$.

Таким образом, значение $Xz^n$ определено для всех целых $n$, и, следовательно, по линейности $X$ задан на плотном подмножестве пространства $L^2(\mu)$. Из условия (7) вытекает, что тогда $X$ — оператор, определенный на всем пространстве $L^2(\mu)$. □

**Предложение 4.2.** *Предположим, что $X$ — оператор, удовлетворяющий соотношению (5) для некоторой функции $f\in L^2(\mu)$. Тогда абелевы средние последовательности $U^nXU^{-n}$ имеют предел (в сильной или слабой операторной топологии) в том и только том случае, когда функции $\mathscr{H}_r f$,*

$$(\mathscr{H}_r f)(z) = \int \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-rz}\,d\mu(\xi),$$

*сходятся (по норме пространства $L^2(\mu)$ или слабо соответственно).*

**Доказательство.** Требуется доказать, что из сходимости функций $\mathscr{H}_r f$ следует сходимость операторов (6). Из оценки (7) и сходимости выражений (8) следует, что множество всех $h$, для которых предел функций $\int \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-rz}\,h(\xi)\,d\mu(\xi)$ существует при $r\nearrow 1$, является замкнутым подпространством, приводящим унитарный оператор $U$. Таким образом, если установлена сходимость для функции $h$, тождественно равной 1, то сразу получается сходимость и для всех $h\in L^2(\mu)$. □

Естественно считать предел функций $\mathscr{H}_r f$ *преобразованием Гильберта* функции $f$ относительно меры $\mu$, которое определено для всех функций $f$, таких, что этот предел существует. Без вычитания $f(z)$ в числителе преобразование Гильберта для сингулярных мер $\mu$ невозможно определить даже на гладких функциях $f$, поскольку для неотрицательной функции $f$ значения $\int \frac{\xi f(\xi)}{\xi-rz}\,d\mu(\xi)$ стремятся к бесконечности при $r\nearrow 1$ в $\mu$-почти всех точках, в которых $f\neq 0$. Действительно, это вытекает из того, что вещественная часть этого выражения совпадает с преобразованием Пуассона меры $f\mu$ с точностью до аддитивной константы $\int f\,d\mu$.

Преобразование Гильберта не является ограниченным оператором в $L^2(\mu)$, см. [3]; более того, оно даже незамыкаемо [9].

Результаты об абелевых волновых операторах для случая коммутатора (5) были переписаны выше в терминах интегралов типа Коши. Из доказательства нашей основной теоремы (а именно, из леммы 3.1) получается такое следствие.

**Теорема 4.3.** *Для любой сингулярной борелевской меры $\mu$ на единичной окружности, не имеющей атомов, существуют функции $f \in L^2(\mu)$, такие, что нормы функций $\mathscr{H}_r f$ в $L^2(\mu)$ равномерно ограничены по $r$ (и, более того, выполнена оценка (7)), однако функции $\mathscr{H}_r f$ не имеют слабого предела в $L^2(\mu)$.*

Этот результат представляет собой только утверждение о существовании, тогда как было бы интересно описать некоторые классы или по крайней мере найти какие-либо конкретные примеры таких функций $f$.

**Доказательство.** Можно считать, что $\mu$ — вероятностная мера. Возьмем $\alpha \neq 1$ и построим $\nu = \sigma_\alpha$, см. §3.

По лемме 3.1 найдем функцию $\gamma \in L^\infty(\nu)$, такую, что абелевы средние операторов $U^n \gamma(U_\alpha) U^{-n}$ не имеют предела в слабой операторной топологии.

По формуле (4), так как оператор $\gamma(U_\alpha)$ коммутирует с $U_\alpha$, получаем

$$\gamma(U_\alpha)U - U\gamma(U_\alpha) = (1-\alpha)((\,\cdot\,,\bar{z})\gamma(U_\alpha)1 - (\,\cdot\,,\gamma(U_\alpha)^*\bar{z})1).$$

Следовательно, для оператора $X = \frac{-1}{1-\alpha}\gamma(U_\alpha)U^*$ имеем

$$\begin{aligned} XU - UX &= \frac{-1}{1-\alpha}(\gamma(U_\alpha)U - U\gamma(U_\alpha))U^* \\ &= (\,\cdot\,, U\gamma(U_\alpha)^*\bar{z})1 - (\,\cdot\,,1)\gamma(U_\alpha)1 = (\,\cdot\,,g)1 - (\,\cdot\,,1)f, \end{aligned}$$

где $f = \gamma(U_\alpha)1$, $g = U\gamma(U_\alpha)^*\bar{z}$.

Равенство $f = \bar{g}$ сразу получается, например, из теоремы 6.1 статьи [4], согласно которой, если $X$ — оператор в $L^2(\mu)$ (с сингулярной мерой $\mu$), такой, что коммутатор $XU - UX$ является конечной суммой $\sum(\,\cdot\,,\bar{u}_k)v_k$, то $\sum u_k v_k = 0$ $\mu$-почти всюду. Таким образом, получаем соотношение (5).

Теперь по предложению 4.1 справедлива оценка (7), а по предложению 4.2 сходимости нет. □

В заключение этого параграфа обсудим вопрос о сходимости функций $\mathscr{H}_r f$ для класса функций $f \in L^2(\mu)$, совпадающих $\mu$-почти всюду с непрерывной функцией на единичной окружности.

Можно сформулировать достаточные условия для существования преобразования Гильберта в терминах непрерывности, однако не самой функции $f$, а ее унитарной пересадки в пространство $L^2(\sigma_\alpha)$. Бессонов [9] построил меру $\mu$ и непрерывную функцию $f$, для которых оценка (7) не выполняется. Также в статье [9] вопрос о волновых операторах для случая коммутатора вида (5) сведен с помощью теоремы Лузина к случаю, когда $f$ — непрерывная функция. Из результатов статьи [9] следует, что если бы для любой сингулярной меры $\mu$ и для любой непрерывной функции $f$, удовлетворяющей оценке (7), имела место сходимость функций $\mathscr{H}_r f$, то волновые операторы существовали бы в общем случае коммутаторов ранга 2; поскольку наш основной результат опровергает это заключение, существуют сингулярные меры $\mu$ и непрерывные функции $f$, такие, что имеет место оценка (7), но функции $\mathscr{H}_r f$ не сходятся в $L^2(\mu)$. Естественно предположить, что *для любой* конкретной меры $\mu$ непрерывность функции $f$ не влечет за собой ни оценку (7), ни слабую сходимость функций $\mathscr{H}_r f$ в случае, когда оценка (7) имеет место.

**Предположение 4.4.** *Для любой сингулярной меры $\mu$ на единичной окружности, не имеющей атомов, существует непрерывная функция $f$ на единичной окружности, такая, что нормы функций $\mathscr{H}_r f$ не являются равномерно ограниченными по $r$.*

**Предположение 4.5.** *Для любой сингулярной меры $\mu$ на единичной окружности, не имеющей атомов, существует непрерывная функция $f$ на единичной окружности, для которой имеет место оценка* (7), *но функции $\mathscr{H}_r f$ не имеют предела в слабой топологии.*

Также есть основания предполагать, что непрерывность функции $f$ не является необходимым условием для сходимости операторов (6), т. е. что существуют разрывные функции $f$, для которых операторы (6) имеют предел.

**Предположение 4.6.** *Для любой сингулярной меры $\mu$ на единичной окружности, не имеющей атомов, существует функция $f \in L^2(\mu)$, не совпадающая $\mu$-почти всюду с непрерывной функцией на единичной окружности и такая, что операторы* (6) *имеют сильный предел при $r \nearrow 1$.*

## § 5. Другие методы суммирования

Для произвольного метода суммирования усреднения $\tilde{x}_\alpha$ последовательности $x_n$ имеют вид

$$\tilde{x}_\alpha = \sum p_{\alpha,n} x_n,$$

где индекс $\alpha$ пробегает некоторое направленное множество. Метод суммирования называется регулярным, если для любой последовательности, имеющей предел в обычном смысле, усредненный предел существует и совпадает с пределом исходной последовательности. Многие важные методы суммирования усредняют исходную последовательность в том смысле, что

- $p_{\alpha,n} \geqslant 0$ и для любого $\alpha$ имеет место равенство $\sum_n p_{\alpha,n} = 1$.

Тогда свойство регулярности равносильно следующему:

- $p_{\alpha,n} \to 0$ по $\alpha$ для любого $n$.

Один метод суммирования считается сильнее другого, если класс последовательностей, имеющих усредненный предел, у первого метода шире, чем у второго.

Как видно из доказательства основной теоремы, ее утверждение остается верным, если вместо метода абелевых средних взять любой метод суммирования, обладающий следующим свойством: *существует более сильный регулярный метод суммирования, у которого индекс усреднений пробегает множество всех натуральных чисел и который также сильнее, чем метод Чезаро.*

Можно ожидать, что результат остается верным и без предположения о существовании метода суммирования, более сильного, чем метод Чезаро. Однако нас здесь интересует лишь то, что сходимость не достигается рассмотрением более сильных методов суммирования, и поэтому методы суммирования, существенно не сравнимые с методом Чезаро, не рассматриваются.

Для методов усреднения, более сильных, чем метод Чезаро, усредненный предел $Y$ последовательности $U_2^n X U_1^{-n}$, если он существует, сплетает $U_1$ и $U_2$: $YU_1 = U_2 Y$. Действительно, это вытекает из соотношения

$$\left(\frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m} U_2^n X U_1^{-n}\right)U_1 - U_2\left(\frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m} U_2^n X U_1^{-n}\right) = \frac{1}{m+1}(XU_1 - U_2^{m+1} X U_1^{-m}),$$

в котором правая часть стремится к 0 при $m \to \infty$. Сплетающее свойство предельного оператора имеет место для всех методов суммирования, инвариантных относительно сдвига; достаточным условием для этого является ограниченность и стремление к нулю по $\alpha$ выражения $\sum_{n=0}^{\infty} |p_{\alpha,n} - p_{\alpha,n+1}|$. В общем случае может оказаться, что предельный оператор существует, но не сплетает $U_1$ и $U_2$. Например, рассмотрим снова операторы в одномерном пространстве: $H_1 = H_2 = \mathbb{C}$, $U_1 = I$, $U_2 = -I$, $X = I$. Пусть метод суммирования сопоставляет последовательности $x_n$ подпоследовательность $x_{2n}$ (или усреднения этой подпоследовательности для некоторого регулярного метода суммирования). Тогда все элементы последовательности $U_2^{2n} X U_1^{-2n}$ равны $I$; следовательно, ее (усредненный) предел также равен $I$, однако $IU_1 \neq U_2 I$.

Без предположения о более сильном методе суммирования, у которого индексы пробегают натуральный ряд, теорема неверна и усредненные волновые операторы всегда могут быть определены как пределы относительно направленностей. Например, предельный оператор может быть построен с помощью конструкции банахова предела, т. е. (любого) неотрицательного и инвариантного относительно сдвигов линейного функционала на пространстве всех ограниченных последовательностей, сопоставляющего последовательностям, сходящимся в обычном смысле, их пределы. Если задан такой функционал, то для любых $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$ построим банахов предел ограниченной последовательности $(U_2^n X U_1^{-n} h_1, h_2)$, таким образом получая определение предельного оператора через значения его билинейной формы. Отметим, что свойство инвариантности предела относительно сдвигов обеспечивает то, что предельный оператор будет сплетать операторы $U_1$ и $U_2$. Конструкция банахова предела не проводится явно, а ее существование опирается на теорему Хана–Банаха и тем самым на аксиому выбора. Получаемые предельные значения могут рассматриваться как пределы относительно очень сложных направленностей; в частности, эти пределы не сводятся к пределам последовательностей.

## § 6. Случай пары самосопряженных операторов

В этом параграфе рассматривается вопрос об усредненных волновых операторах для пары самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве с сингулярной спектральной мерой. Сначала рассмотрим случай возмущения оператором ранга 1.

**Предложение 6.1.** *Если $A$, $A_*$ — самосопряженные операторы, разность которых имеет ранг 1, то у семейства операторов*

$$\epsilon \int_0^{1/\epsilon} \exp(itA_*) \exp(-itA)\, dt$$

*существует слабый предел при $\epsilon \to 0$.*

**Набросок доказательства.** На абсолютно непрерывном подпространстве оператора $A$ существует сильный предел самих операторов $\exp(itA_*)\exp(-itA)$ при $t \to +\infty$ [1]. На сингулярном подпространстве (точнее, на сингулярной части приводящего подпространства, порожденного вектором, определяющим возмущение) при одномерном возмущении спектральные меры исходного и возмущенного операторов взаимно сингулярны [7]; поэтому достаточно установить

сходимость к нулевому оператору для приводящих частей самосопряженных операторов с взаимно сингулярными спектральными мерами. Далее рассуждение опирается на ту же идею, что и доказательство предложения 4.1, и в нем уже не используется предположение о ранге возмущения. Если бы не было сходимости к нулю на каком-либо векторе $h$, то существовала бы последовательность $\epsilon_n \to 0$, по которой была бы слабая сходимость на векторе $h$ к ненулевому элементу. Следовательно, была бы и слабая сходимость к ненулевому оператору, сплетающему рассматриваемые самосопряженные операторы, на всем приводящем подпространстве, порожденном вектором $h$. Последнее невозможно, если спектральные меры взаимно сингулярны. □

В случае возмущений ранга 2 усредненного предела может не существовать. Рассмотрим оператор усреднения, сопоставляющий функции $f$ на полуоси $\{t > 0\}$ функцию от $\epsilon$

$$\int_0^{+\infty} f(t) \cdot \epsilon w(\epsilon t)\, dt, \tag{9}$$

где $w$ — вес на полуоси, $\int_0^{+\infty} w(t)\, dt = 1$. Можно взять веса

$$w(t) = \begin{cases} 1, & t \leqslant 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad w(t) = \exp(-t),$$

аналогичные весам, определяющим средние Чезаро и Абеля для последовательностей, а также любые веса из класса $W$, состоящего из суммируемых функций, преобразование Фурье–Меллина $\int_0^{+\infty} w(t) t^{-ix}\, dt$ которых не обращается в 0 ни при каком вещественном $x$. Согласно тауберовой теореме Винера (см., например, [10, теорема 232]), если $f$ — ограниченная функция, то сходимость при $\epsilon \to 0$ средних для одного веса из класса $W$ влечет за собой сходимость и для всех остальных весов из этого класса. Наши дальнейшие результаты формулируются для метода усреднений вида (9), где $w$ — вес из класса $W$, однако они допускают обобщение, аналогичное рассматривавшемуся в § 5.

Пусть $A$ — самосопряженный оператор, не имеющий собственных векторов, спектральная мера которого сингулярна относительно меры Лебега, и пусть

$$A_p = A + p(\,\cdot\,, e)e$$

– его самосопряженное возмущение оператором ранга 1, где $e \neq 0$ — некоторый вектор и $p \neq 0$ — вещественное число. Приводящие подпространства операторов $A$ и $A_p$, порожденные вектором $e$, совпадают; будем считать, что они совпадают и со всем пространством. Тогда спектральные меры операторов $A$ и $A_p$ взаимно сингулярны [7]; обозначим их через $\mu$ и $\nu$ соответственно. Возьмем $u \in L^\infty(\nu)$ и положим $X = u(A_p)$. Следующая лемма аналогична лемме 3.1.

**Лемма 6.2.** *Функцию $u \in L^\infty(\nu)$ можно выбрать так, чтобы предела операторов*

$$\int_0^{+\infty} \exp(itA) X \exp(-itA) \epsilon w(\epsilon t)\, dt \tag{10}$$

*при $\epsilon \to 0$ не существовало в слабой операторной топологии.*

**Доказательство.** Допустим, что лемма неверна и что предел существует для любой функции $u \in L^\infty(\nu)$. Тогда, в частности, получается сходимость интегралов

$$\int_0^\infty (\exp(itA)u(A_p)\exp(-itA)e, e)\epsilon w(\epsilon t)\,dt$$
$$= \int_0^\infty (u(A_p)\exp(-itA)e, \exp(-itA)e)\epsilon w(\epsilon t)\,dt$$

для любой функции $u$, когда $\epsilon$ пробегает любую последовательность, стремящуюся к нулю. В спектральном представлении самосопряженного оператора $A_p$ скалярное произведение под интегралом переписывается как $\int u|s_t|^2\,d\nu$, где функции $s_t$ $(t > 0)$ соответствуют векторам $\exp(-itA)e$. Таким образом, интегралы

$$\int_0^\infty \left(\int u|s_t|^2\,d\nu\right)\epsilon w(\epsilon t)\,dt = \int u\left(\int_0^\infty |s_t|^2\epsilon w(\epsilon t)\,dt\right)d\nu$$

сходятся при $\epsilon \to 0$ для всех $u \in L^\infty(\nu)$. В силу слабой секвенциальной полноты пространства $L^1(\nu)$ получаем, что предел равен $\int us\,d\nu$ для некоторой функции $s \in L^1(\nu)$.

С другой стороны, если $u$ — непрерывная функция на вещественной прямой (включая бесконечно удаленную точку), то рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве леммы 3.1 (разность $u(A_p) - u(A)$ — компактный оператор, и усреднения операторов $\exp(itA)u(A_p)\exp(-itA)$ стремятся к $u(A)$), приводят к тому, что этот предел равен $\int u\,d\mu$. Предположение о существовании предела для всех $u \in L^\infty(\nu)$ привело к соотношению $d\mu = s\,d\nu$. Полученное противоречие доказывает лемму. □

**Теорема 6.3.** *Пусть $A$ — самосопряженный оператор, не имеющий собственных векторов, спектральная мера которого сингулярна относительно меры Лебега, и $w$ — вес из класса $W$. Для любого самосопряженного оператора $A_\diamond$, такого, что разность $A_\diamond - A$ имеет ранг $1$, существует самосопряженный оператор $A_*$, такой, что ранг разности $A_* - A_\diamond$ также равен $1$, и предела операторов*

$$\int_0^{+\infty} \exp(itA_*)\exp(-itA)\epsilon w(\epsilon t)\,dt$$

*при $\epsilon \to 0$ не существует в слабой операторной топологии.*

**Доказательство.** Можно считать, что оператор $A_\diamond$ совпадает с возмущением $A_p$ оператора $A$ из леммы при некотором $p \neq 0$. Заметим, что функцию $u$ в лемме можно выбрать так, чтобы ее значения по модулю были равны 1. Действительно, из сходимости для всех унимодулярных функций $u$ по линейности следовала бы сходимость и для всех ограниченных функций $u$. Если $u \in L^\infty(\nu)$ — унимодулярная функция, то $X = u(A_p)$ — унитарный оператор, коммутирующий с $A_p$. Положим $h = X^*e$,

$$A_* = A_\diamond - p(\,\cdot\,, h)h = A + p(\,\cdot\,, e)e - p(\,\cdot\,, h)h.$$

Имеем

$$A_* = A_p - p(\,\cdot\,, h)h = X^*A_pX - p(\,\cdot\,, X^*e)X^*e = X^*(A_p - p(\,\cdot\,, e)e)X = X^*AX$$

и, таким образом, $\exp(itA_*) = X^* \exp(itA)X$. Операторы (10) не сходятся слабо при $\epsilon \to 0$ в силу выбора $u$, поэтому и требуемого предела не существует. $\square$

## Литература


[1] T. Kato, *Perturbation of continuous spectra by trace class operators*, Proc. Japan Acad., **33** (1957), 260–264.

[2] D. B. Pearson, *A generalization of the Birman trace theorem*, J. Funct. Anal., **28**:2 (1978), 182–186.

[3] В. В. Капустин, *Граничные значения интегралов типа Коши*, Алгебра и анализ, **16**:4 (2004), 114–131.

[4] В. В. Капустин, *О волновых операторах на сингулярном спектре*, Зап. научн. семин. ПОМИ, **376** (2010), 48–63.

[5] J. Karamata, *Über die Hardy–Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes*, Math. Z., **32**:1 (1930), 319–320.

[6] D. N. Clark, *One dimensional perturbations of restricted shifts*, J. Anal. Math., **25** (1972), 169–191.

[7] W. F. Donoghue, Jr., *On the perturbation of spectra*, Comm. Pure Appl. Math., **18** (1965), 559–579.

[8] D. Sarason, *Algebraic properties of truncated Toeplitz operators*, Oper. Matrices, **1**:4 (2007), 491–526.

[9] Р. В. Бессонов, *Волновые операторы прошлого и будущего на сингулярном спектре*, Зап. научн. семин. ПОМИ, **389** (2011), 5–20.

[10] Г. Харди, *Расходящиеся ряды*, ИЛ, М., 1951.


С.-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: kapustin@pdmi.ras.ru

Поступило в редакцию
29 июля 2011 г.