УДК 517.5

М.Л. ГОЛЬДМАН

О ВЛОЖЕНИИ ЛИПШИЦЕВА ПРОСТРАНСТВА В СИММЕТРИЧНОЕ

(Представлено академиком С.М. Никольским 8 VI 1984)

1°. В данной работе рассмотрены теоремы вложения для анизотропных липшицевых пространств, представляющих собой обобщения известных пространств $H_p^{\mathbf{r}}$ и $B_{p\theta}^{\mathbf{r}}$ С.М. Никольского и О.В. Бесова [1]. Приведенные результаты включают также теоремы вложения П.Л. Ульянова [2] для классов $H_p^{\omega(\cdot)}$.

Пусть $E(0, \infty)$ – симметричное пространство, $E(R^n)$ – соответствующее симметричное пространство функций $f(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ с нормой $\|f\|_{E(R^n)} = \|f^*\|_{E(0,\infty)}$, где $f^*(u)$, $0 < u < \infty$, – невозрастающая перестановка $|f(x)|$ (см. [3]). Пусть $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, где $X_j = X_j(0, 1)$ – идеальное банахово (или квазибанахово) пространство (см. [3]). При $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$, $k_j \geqslant 1$ – целые числа, рассмотрим анизотропное липшицево пространство $\Lambda^{\mathbf{k}}(E, X)$ (см. [4]) всех функций $f(x) \in E(R^n)$:

$$(1) \qquad \|f\|_\Lambda = \|f\|_{E(R^n)} + \sum_{j=1}^n \|\omega_{E,x_j}^{k_j}(f, \cdot)\|_{X_j(0,1)} < \infty.$$

Здесь $\omega_{E,x_j}^{k_j}(f, u) = \sup\limits_{|h| \leqslant u} \|\Delta_{h,x_j}^{k_j} f(\cdot)\|_{E(R^n)}$ – модуль непрерывности $f(x)$ порядка k_j по направлению x_j в норме $E(R^n)$. В случае $\mathbf{k} = (k, k, \ldots, k)$, $\mathbf{X} = \{X, \ldots, X\}$ соответствующее изотропное пространство обозначим $\Lambda^k(E, X)$.

Пример 1. Пусть $\omega(u) = \{\omega_1(u), \omega_2(u), \ldots, \omega_n(u)\}$, $\omega_j(0) = 0$; $\omega_j(1) = 1$, $\omega_j(u)$ возрастает и непрерывна на $[0, 1]$, $0 < \theta \leqslant \infty$. Пространство типа Никольского – Бесова $\Lambda = B_{E\theta}^{\omega(\cdot)}(R^n)$ (при $\theta = \infty$ $B_{E\infty}^{\omega(\cdot)}$; $H_E^{\omega(\cdot)}$) определяется нормой (1), где

$$(2) \qquad \|\psi\|_{X_j(0,1)} \begin{cases} \left\{ \int_0^1 \left[\dfrac{|\psi(u)|}{\omega_j(u)} \right]^\theta \dfrac{d\omega_j(u)}{\omega_j(u)} \right\}^{1/\theta} & \text{при} \quad \theta < \infty, \\ \sup\limits_{0 < u \leqslant 1} [|\psi(u)|/\omega_j(u)] & \text{при} \quad \theta = \infty. \end{cases}$$

При $k_j = k$, $\omega_j(u) = \omega(u)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, получим изотропное пространство $B_{E\theta}^{\omega(\cdot)}(R^n)$. Этот пример включает пространства $H_p^{\mathbf{r}}$, $B_{p\theta}^{\mathbf{r}}$ [1] (при $\omega_j(u) = u^{r_j}$, $0 < r_j < k_j$, $E = L_p$), их обобщения $H_p^{\omega(\cdot)}$, $B_{p\theta}^{\omega(\cdot)}$ [5, 6] (см. также [7]).

2°. Мы будем изучать общую задачу об условиях вложения

$$(3) \qquad \Lambda^{\mathbf{k}}(E, \mathbf{X}) \hookrightarrow F(R^n),$$

где $F(R^n)$ – симметричное пространство. Сразу отметим, что для вложения (3) необходимо (см. [8]), чтобы

$$(4) \qquad E(R^n) \cap L_\infty(R^n) \hookrightarrow F(R^n).$$

Во всех приводимых ниже теоремах это условие считается выполненным.

Пусть $\beta > 0$, $d \geqslant 1$. Обозначим через $\Omega_\beta(d)$ конус всех непрерывных функций $\psi(u)$:

$$(5) \qquad \psi(0) = 0; \quad \psi(u)\uparrow, \quad \psi(v)v^{-\beta} \leqslant d\,\psi(u)u^{-\beta} \quad \text{при} \quad 0 < u \leqslant v \leqslant 1.$$

Например, если $f(x) \in E$ и $\|f(\cdot)\|_E$ непрерывна относительно сдвига, то $\omega^{k_j}_{E,x_j}(f,u) \in \Omega_{k_j}(2^{k_j+1})$. Положим $\Omega_\beta = \bigcup_{d \geqslant 1} \Omega_\beta(d)$.

Для системы $\psi(u) = \{\psi_1(u), \psi_2(u), \ldots, \psi_n(u)\}$, $\psi_j(u) > 0$, $\psi_j(u)\uparrow$ на $[0, 1]$ обозначим через $\Psi(u)$ введенную В.И. Колядой [9] среднюю функцию (т.е. $v = \Psi(u)$ обратна к $u = \Psi^{-1}(v) = \prod_{j=1}^{n} \psi_j^{-1}(v)$). Отметим, что $\psi_j(u) \in \Omega_{k_j}(d_j) \Rightarrow \Psi(u) \in \Omega_{k_0}(d)$, $k_0 = \left(\sum_{j=1}^{n} 1/k_j\right)^{-1}$ и что в изотропном случае $\psi_j(u) = \psi(u)$, $j = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow \Psi(u) = \psi(u^{1/n})$.

Т е о р е м а 1. *Пусть существует идеальное пространство* $X_0(0, 1)$:

$$(6) \qquad \|\Psi\|_{X_0} \leqslant c(\mathbf{d}) \sum_{j=1}^{n} \|\Psi_j\|_{X_j}, \quad \forall \psi_j(u) \in \Omega_{k_j}(d_j), \quad d_j \geqslant 1,$$

где $\Psi(u)$ *– средняя функция для* $\{\psi_1(u), \psi_2(u), \ldots, \psi_n(u)\}$; $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$.

Тогда для вложения (3) *достаточно, чтобы при любом* $d \geqslant 1$

$$(7) \qquad \|A\|_{X_0 \cap \Omega_{k_0}(d) \mapsto F(0,1)} \leqslant c_1(d) < \infty,$$

где

$$(8) \qquad (Ag)(u) = \int_u^1 g(v)\varphi_E(v)^{-2} d\varphi_E(v), \qquad k_0 = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{k_j}\right)^{-1},$$

$\varphi_E(u)$ *– фундаментальная функция пространства* E *(см.* [3]).

З а м е ч а н и е 1. В изотропном случае, когда $k_j = k$, $X_j = X$, $j = 1, 2, \ldots, n$ следует положить в теореме 1 $k_0 = k/n$,

$$X_0 = \{g(u)\colon\ g(u^n) \in X\}, \qquad \|g(u)\|_{X_0} = \|g(u^n)\|_X.$$

З а м е ч а н и е 2. Если в $F(0, 1)$ ограничен оператор Харди $(Pg)(u) = \int_u^1 g(v)v^{-1}dv$, то в условии вложения (7) можно взять

$$(9) \qquad (Ag)(u) = g(u)/\varphi_E(u).$$

З а м е ч а н и е 3. В случае $\Lambda = B^{\omega(\cdot)}_{E\theta}(R^n)$ (см. (2)) следует положить

$$(10) \qquad \|f\|_{X_0} = \begin{cases} \left\{\displaystyle\int_0^1 \left[\frac{|f(u)|}{\Omega(u)}\right]^\theta \frac{d\Omega(u)}{\Omega(u)}\right\}^{1/\theta} & \text{при} \quad \theta < \infty, \\ \displaystyle\sup_{0 < u \leqslant 1} [|f(u)|/\Omega(u)] & \text{при} \quad \theta = \infty, \end{cases}$$

где $\Omega(u)$ – средняя функция системы $\omega(u) = \{\omega_1(u), \omega_2(u), \ldots, \omega_n(u)\}$. При $\theta = \infty$ в этом примере условие вложения упрощается:

$$(11) \qquad (7) \Longleftrightarrow \left\| \int_u^1 \frac{\Omega(v)}{\varphi_E(v)^2} d\varphi_E(v) \right\|_{F(0,1)} < \infty \Rightarrow H^{\omega(\cdot)}_E(R^n) \hookrightarrow F(R^n).$$

З а м е ч а н и е 4. Приведем ключевую оценку теоремы 1:

$$(12) \qquad f^*(u) \leqslant f^{**}(u) \leqslant c \left[\frac{\|f\|_E}{\varphi_E(1)} + \int_u^1 \Omega^k_E(f, v) \frac{d\varphi_E(v)}{\varphi_E(v)^2}\right],$$

где $0 < u \leqslant 1$, $f^{**}(u)$ (см. [3]), $\Omega^{\mathbf{k}}_E(f, u)$ – средняя функция системы

$\{ \omega_{E,x_j}^{k_j}(f, u) \}_{j=1}^{n}$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Оценка (12) имеет и самостоятельный интерес, обобщая и уточняя оценки Ю.А. Брудного [10], В.И. Коляды [9] и др. Соответственно теорема 1 уточняет условия вложения [10].

3°. Рассмотрим вопрос о необходимости условий (7) для вложения (3). Во всех теоремах, приведенных ниже, мы предполагаем, что в E справедливо обобщенное неравенство Минковского для интегралов. Например, это так, если E максимально (см. [3]). При $k \geqslant 1$ наложим условия $\psi \in S \cap S_k$ С.Б. Стечкина:

(13) $\exists 0 < \alpha \leqslant \beta < k$: $\psi(u)u^{-\alpha}$ почти $\uparrow$, $\psi(u)u^{-\beta}$ почти $\downarrow$.

Теорема 2. *Пусть* $\omega_j(u) \in S \cap S_{k_j}$. *Тогда*

$$B_{E\theta}^{\omega(\cdot)}(R^n) \subsetneq F(R^n) \iff (7), (8)$$

(*см. нормы в* (1), (2) *и* (10)). *При* $\theta = \infty$ (*см.* (11))

$$H_E^{\omega(\cdot)}(R^n) \subsetneq F(R^n) \iff \left\| \int_u^1 \Omega(v) \frac{d\varphi_E(v)}{\varphi_E(v)^2} \right\|_{F(0,1)} < \infty.$$

При отказе от условий на $\omega_j(u)$ приходится накладывать ограничения на F. Эта ситуация обобщена в приведенных ниже теоремах.

4°. Определение 1. Пусть $k > 0$, $X(0, 1)$ – идеальное пространство. Конус $X \cap \Omega_k(d)$ допускает k-дискретизацию, если существует дискретное пространство X^d и последовательность $\{ \mu(t) \}_{t=0}^{\infty}$: $\mu(0) = 1$, $\mu(t) \downarrow 0$ $(t \uparrow \infty)$ такие, что

$$\| \psi(\cdot) \|_X \asymp \| \{ \psi(\mu(t)) \}_{t=0}^{\infty} \|_{X^d}, \quad \forall \psi \in X \cap \Omega_k(d),$$

причем

(а) $X^d \subsetneq l^1$;

(б) $\| T \|_{X^d \mapsto X^d} < \infty$; $\| T_k \|_{X^d \mapsto X^d} < \infty$;

(в) $\| U \|_{X^d \mapsto X^d} < \infty$.

Здесь при $a = \{ a_t \}_{t=0}^{\infty} \in X^d$

$$T(a) = \left\{ \sum_{m=t}^{\infty} a_m \right\}_{t=0}^{\infty},$$

$$T_k(a) = \left\{ \mu(t)^k \sum_{m=0}^{t} \mu(m)^{-k} a_m \right\}_{t=0}^{\infty}; \quad U(a) = \{ 0, a_0, a_1, \ldots, a_{t-1}, \ldots \}.$$

Определение 2. Пусть $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$, $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$; $d_j, k_j > 0$. Конус $\mathbf{X} \cap \Omega_{\mathbf{k}}(\mathbf{d})$ допускает совместную $\mathbf{k}$-дискретизацию, если для $j = 1, 2, \ldots, n$ $X_j \cap \Omega_{k_j}(d_j)$ допускает k_j-дискретизацию с одним и тем же X^d (но со своей последовательностью $\{ \mu_j(t) \}_{t=0}^{\infty}$).

Определение 3. Конус $X \cap \Omega_k(d)$ допускает обобщенную k-дискретизацию, если в определении 1 требование (в) заменить следующим. Рассмотрим еще оператор $V(a) = \{ a_{t+1} \mu(t)^k \mu(t+1)^{-k} \}_{t=0}^{\infty}$ и потребуем, чтобы

$$\exists N_1, N_2 \quad N_1 \cap N_2 = \phi; \quad \{ 0, 1, 2, \ldots \} = N_1 \cup N_2:$$

$$\| U P_{N_1} \|_{X^d \mapsto X^d} < \infty; \quad \| V P_{N_2} \|_{X^d \mapsto X^d} < \infty,$$

где $P_N(a) = \{ \delta_t a_t \}_{t=0}^{\infty}$, $\delta_t = 1$ при $t \in N$, $\delta_t = 0$ при $t \notin N$,– проектор на N (случай (в) соответствует $N_2 = \phi$).

П р и м е р 2. Пусть в примере 1 $\omega_j \in S_{k_j}$ (т.е. $\exists \beta_j < k_j : \omega_j \in \Omega_{\beta_j}$). Фиксируем $b > 1$ и положим $\mu_j(t) : \omega_j(\mu_j(t)) = b^{-t}$, $t = 0, 1, \ldots$ Тогда $\mathbf{X} \cap \Omega_{\mathbf{k}}(\mathbf{d})$ (см. (2)) допускает совместную k-дискретизацию, если положить (см. [6])

$$X^d = \left\{ a = \{a_t\}_{t=0}^{\infty} : \| a \|_{X^d} = \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} [b^t \, | a_t |]^\theta \right\}^{1/\theta} < \infty \right\}.$$

В изотропном случае удается снять также требование $\omega(u) \in S_k$, но для этого приходится использовать весьма сложную обобщенную дискретизацию (см. [11]), (17)–(19)).

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнено условие* (6); *конус* $\mathbf{X} \cap \Omega_{\mathbf{k}}(\mathbf{d})$ *при любых* $d_j \geqslant 1$ *допускает совместную* k*-дискретизацию. Обозначим* $\mathrm{M}(t)$ $\prod_{j=1}^{n} \mu_j(t)$; $\Delta_t = (\mathrm{M}(t+1), \mathrm{M}(t)]$ *и потребуем, чтобы для* $\forall\, d \geqslant 1$; $\{a_t\}_{t=0}^{\infty} : a_t \downarrow 0$ $(t \uparrow \infty)$; $k_0 = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{k_j} \right)^{-1}$, *выполнялись неравенства*

$$(14) \quad \| \{ g(M(t)) \}_{t=0}^{\infty} \|_{X^d} \leqslant c_1(d) \| g \|_{X_0}, \quad \forall g \in \Omega_{k_0}(d);$$

$$(15) \quad \left\| \sum_{t=0}^{\infty} \frac{a_{t+1}}{\varphi_E(u)} \chi_{\Delta_t}(u) \right\|_{F(0,1)} \leqslant c_2 \left(1 + \left\| \sum_{t=0}^{\infty} \frac{a_t}{\varphi_E(\mathrm{M}(t))} \chi_{\Delta_t}(u) \right\|_{F(0,1)} \right).$$

Тогда (3) $\Longleftrightarrow$ (7), (8).

З а м е ч а н и е 1. Если при дискретизации окажется, что

$$(16) \quad \mathrm{M}(t+1)/\mathrm{M}(t) \geqslant m_0 > 0, \quad t = 0, 1, \ldots,$$

то (15) справедливо для любого симметричного пространства F. В примере 2 при $\omega_j \in S \cap S_{k_j}$ условия (14) и (16) выполнены и теорема 2 следует из теоремы 3.

З а м е ч а н и е 2. Конкретизация теоремы 3 приводит к ряду новых теорем вложения (например, дает теорему 1 [11], обобщающую результаты [6, 9]). Приведем еще один пример.

Пусть в примере 1 $\omega_j \in S_{k_j}$. Пусть $A(u)$ – N-функция, $L^*_{A(\cdot)}(R^n)$ – соответствующее пространство Орлича (см. [12]) и $\exists \alpha > 0$:

$$(17) \quad A(r/\varphi_E(u)) u^{1+\alpha} \text{ п.} \downarrow \text{ на } (0, \delta(r)] \text{ для } \forall r > 0,$$
$$\delta(r) = \min \{1, \varphi_E^{-1}(r)\} \ ((17) \Rightarrow (15) \text{ при } F = L^*_{A(\cdot)}).$$

Тогда $B^{\omega(\cdot)}_{E\theta}(R^n) \hookrightarrow L^*_{A(\cdot)}(R^n) \Longleftrightarrow$ (7), (8) ($F = L^*_{A(\cdot)}$, X_0 вида (10)). В частности, при $\theta = \infty$

$$H^{\omega(\cdot)}_E(R^n) \hookrightarrow L^*_{A(\cdot)}(R^n) \Longleftrightarrow \left\| \int_u^1 \Omega(v) \frac{d\varphi_E(v)}{\varphi_E(v)^2} \right\|_{L^*_{A(\cdot)}(0,1)} < \infty.$$

При $E = L_p$, $\varphi_E(u) = u^{1/p}$; (17) $\Longleftrightarrow \exists \alpha > 0$: $A(v) v^{-(p+\alpha)}$ п. $\uparrow$ на $(0, 1)$.

Т е о р е м а 4. *Пусть конус* $X \cap \Omega_k(d)$ *при любых* $d \geqslant 1$ *допускает обобщенную* k*-дискретизацию и для* $\mathrm{M}(t) = \mu(t)^n$ *выполнено условие* (15). *Тогда*:

(а) *если* $\int_0^u v^{k_0} \varphi_E(v)^{-2} d\varphi_E(v) \leqslant c_3 u^{k_0} \varphi_E(u)^{-1}$, $0 < u \leqslant 1$, $k_0 = k/n$, *то* (3) $\Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow$ (7), (8);

(б) *если* $\int\limits_0^1 v^{k_0}\varphi_E(v)^{-2}d\varphi_E(v)\leqslant c_4u^{k_0}\varphi_E(u)^{-1}$ *и*

$$(18)\qquad \left\|\sum_{t=0}^{\infty}\frac{a_t u^{k_0}}{\varphi_E(u)}\chi_{\Delta_t}(u)\right\|_{F(0,1)}\leqslant c_5\left\|\sum_{t=0}^{\infty}\frac{a_t\mathbf{M}(t)^{k_0}}{\varphi_E(\mathbf{M}(t))}\chi_{\Delta_t}(u)\right\|_{F(0,1)},$$

то (3) $\Longleftrightarrow$ (7), (9).

З а м е ч а н и е 1. Если $u^{k_0}/\varphi_E(u)$ п. ↑ (например, если $k\geqslant n$) или выполнено условие (16), то (18) справедливо для любого симметричного пространства F.

З а м е ч а н и е 2. Теорема 4 содержит ряд известных теорем вложения (см., например, [14]; теорему 2 [11], обобщающую результаты [2, 9, 13] и др.). Из нее следуют также новые результаты, один из которых мы здесь приводим.

Пусть $1\leqslant p<\infty$, $k\geqslant 1$, $A(u)$ – N-функция и $\exists\alpha>0$: $A(u)u^{-(p+\alpha)}$ п. ↑. Если $k<n/p$, то требуем еще: $\exists\alpha>0$: $A(u)u^{-r+\alpha}$ п. ↓, $r=np/(n-kp)$ (отсюда следует (18) при $F=L^*_{A(\cdot)}$), если $k=n/p$, то $A(u)\in\Delta_2$. Тогда

$$\left.\begin{array}{ll}(19) & \left\|\int\limits_u^1\omega(v^{1/n})v^{-1-1/p}dv\right\|_{L^*_A(0,1)}<\infty,\quad k>n/p\\ (19') & \|\omega(v^{1/n})v^{-1/p}\|_{L^*_A(0,1)}<\infty,\quad k\leqslant n/p\end{array}\right\}\Longleftrightarrow H_p^{\omega(\cdot)}(R^n)\hookrightarrow L^*_{A(\cdot)}(R^n).$$

При $k=n/p$, $A\bar{\in}\Delta_2$ точный ответ есть лишь для $k=n=p=1$. Именно, используя результат Э.А. Стороженко [15], можно показать, что точное условие вложения имеет вид (19′), если $A(u+1)\leqslant cA(u), u>0$.

З а м е ч а н и е. Все теоремы справедливы также в периодическом случае и в случае I^n 0 $[0,1]^n$ вместо R^n, причем тогда не нужно условия (4).

В заключение автор приносит глубокую благодарность Ю.А. Брудному и В.И. Буренкову за ценные обсуждения рассмотренных здесь вопросов.

Московский институт радиотехники,
электроники и автоматики

Поступило
25 VII 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. 2. *Ульянов П.Л.* – Изв. АН СССР, 1968, т. 32, № 3. 3. *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978. 4. *Брудный Ю.А., Шалашов В.К.* – ДАН, 1971, т. 197, № 1. 5. *Гольдман М.Л.* – ДАН, 1977, т. 233, № 3. 6. *Гольдман М.Л.* – Тр. МИАН, 1984, т. 170. 7. *Берколайко М.З.* Там же, 1983, т. 161. 8. *Берколайко М.З., Овчинников В.И.* Там же. 9. *Коляда В.И.* – Изв. АН СССР, 1975, т. 39, № 2. 10. *Брудный Ю.А.* – УМН, 1972, т. 27, № 2. 11. *Гольдман М.Л.* – ДАН, 1984, т. 277, № 1. 12. *Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958. 13. *Темиргалиев Н.* –Изв. вузов. Математика, 1980, № 6. 14. *Лапин С.В.* Канд. дис. М., 1980. 15. *Стороженко Э.А.* – Укр. матем. журн., 1978, т. 30, № 3.