В.И.Шубов

СУЩЕСТВОВАНИЕ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ ЦЕПОЧКИ УРАВНЕНИЙ БОГОЛЮБОВА ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ КЛАССИЧЕСКИХ АНГАРМОНИЧЕСКИХ СИСТЕМ СО СВЯЗЯМИ

I. Введение.

В настоящей работе продолжено начатое в статье автора [I] исследование динамики для модели бесконечного классического кристалла, в котором на частицы, расположенные в узлах кристаллической решетки, наложены голономные связи. В [I] был выделен специальный класс допустимых связей и некоторый класс допустимых взаимодействий, для которых уравнения движения модели однозначно разрешимы в целом по t при произвольных начальных данных. Это означает, что уравнения движения порождают динамику, определенную на всем бесконечномерном фазовом пространстве. В данной работе доказывается, что последовательность конечномерных проекций произвольной вероятностной меры на фазовом пространстве, развивающейся во времени под действием упомянутой динамики, является слабым решением цепочки уравнений Боголюбова, соответствующей рассматриваемой системе.

Дадим описание модели кристалла со связями. Γ - множество вершин бесконечного связного графа. Граф Γ - простой, т.е. любые две его вершины соединены не более, чем одним ребром. (Γ - модель кристаллической решетки). Q - гладкое многообразие, снабженное полной римановой метрикой g . Каждой вершине графа ("узлу решетки") $k \in \Gamma$ сопоставлена механическая система ("частица"), для которой Q служит конфигурационным пространством. Бесконечная система, о которой идет речь представляет собой совокупность взаимодействующих частиц, соответствующих всевозможным $k \in \Gamma$. Она определяется формальным гамильтонианом:

$$H(\hat{x}) = \sum_{k\in\Gamma} \frac{1}{2} |p_k|_g^2 + \mathcal{U}(\hat{q}) \qquad (I)$$

Обозначения: конфигурация системы - это отображение $\hat{q}: \Gamma \to Q : k \mapsto q_k$; $q_k \in Q$ - конфигурация частицы с номером k ; множество всех $\hat{q}$ образует конфигурационное пространство системы Q^Γ ; фазовое пространство одной частицы

$\mathcal{X}=T^*Q$ – кокасательное расслоение многообразия Q ; состояние системы – это отображение $\hat{x}=(\hat{q},\hat{p}):\Gamma\to\mathcal{X}$: $k\mapsto x_k=(q_k,p_k)$; x_k – состояние частицы с номером k ; $p_k\in T^*Q_{q_k}$ – импульс этой частицы; множество всех $\hat{x}$ образует фазовое пространство системы $\mathcal{X}^\Gamma$; $|\cdot|_g$ – определяемая метрикой g норма на касательных TQ_q и кокасательных T^*Q_q пространствах $(q\in Q)$.

Потенциальная энергия $\mathcal{U}$ имеет следующую структуру: каждому $\Lambda\subset\Gamma$, $|\Lambda|<\infty$ ($|\Lambda|$ – число точек множества Λ) сопоставлена функция Φ_Λ на $Q^\Lambda=\{q_\Lambda:\Lambda\to Q:k\mapsto q_k\}$ и

$$\mathcal{U}(\hat{q})=\sum_{\Lambda\subset\Gamma,|\Lambda|<\infty}\Phi_\Lambda(q_\Lambda),\quad q_\Lambda\equiv\hat{q}\big|_\Lambda \text{ – сужение } \hat{q} \text{ на } \Lambda \qquad (2)$$

Приведем необходимые для дальнейшего результаты работы [I] . Будем предполагать, что многообразие (Q,g) принадлежит к описанному в [I] , [2] классу "допустимых связей". Определение этого класса в настоящей работе не потребуется. Не потребуется также явный вид уравнений движения системы. Потребуется описание класса допустимых взаимодействий.

Обозначения: если $k,m\in\Gamma$, то $dist\,(k,m)$ – минимальное число звеньев пути графа Γ , соединяющего вершины k и m ; "шар" и "сфера" в Γ радиуса N $(N=0,1,\ldots)$с центром в $k\in\Gamma$: $B_k(N)\equiv\{m\in\Gamma:dist(k,m)\leqslant N\}$, $S_k(N)\equiv B_k(N)\setminus B_k(N-1)$, $B_k(-1)\equiv\emptyset$.

Предположение о структуре графа :

$$\sup_{k\in\Gamma}|S_k(1)|\equiv s(1)<\infty \qquad (3)$$

(число соседей каждой вершины ограничено). Из (3) следует:

$$\sup_{k\in\Gamma}|S_k(N)|\equiv s(N)<\infty,\quad \sup_{k\in\Gamma}|B_k(N)|\leqslant b(N)\equiv\sum_{M=0}^{N}s(N). \qquad (4)$$

Условия на потенциалы Φ_Λ : пусть $|\Lambda|=i$ $(i=1,2,\ldots)$, $diam\,\Lambda\equiv\max_{k,m\in\Lambda}dist\,(k,m)\geqslant N$ $(N=0,1,\ldots)$, тогда для первых и вторых производных Φ_Λ (предполагается, что $\Phi_\Lambda\in C^2(Q^\Lambda)$) выполняются оценки

$$|\mathcal{D}_k\Phi_\Lambda(q_\Lambda)|_g,\ \|\mathcal{D}_k\mathcal{D}_m\Phi_\Lambda(q_\Lambda)\|_g \leq C_i(N),\ k,m\in\Lambda,\ q_\Lambda\in Q^\Lambda, \quad (5)$$

где $C_i(N)=a(i)s(N)^{-1}b(N)^{-i+2}\alpha(N)$, при $N\geqslant 1, i\geqslant 2$; (6)

$C_1(0)>0$ - некоторая константа; $C_1(N)\equiv 0$, при $N\geqslant 1$.

Условие на константы $\alpha(N)>0$:

$$\sum_{N=1}^{\infty}\alpha(N)<\infty \quad (7)$$

Пусть r - радиус сходимости степенного ряда $\sum_{i=2}^{\infty}\frac{a(i)}{i!}z^i$: $\frac{1}{r}=\overline{\lim_i}\sqrt[i]{\frac{a(i)}{i!}}$. Условия на константы $a(i)>0$: а) если граф Γ обладает свойством: $\lim_{N\to\infty} s(N)/b(N)=0$, то

$$r>1; \quad (8)$$

б) в противном случае (ввиду (3), это возможно лишь при $s(N)\sim exp(cN), N\to\infty$)

$$r=\infty. \quad (9)$$

(В [I] условия на $a(i)$ были несколько слабее, чем (8), (9)).

Пояснение. Символом $\mathcal{D}_k\Phi_\Lambda(q_\Lambda)$ в (5) обозначен градиент функции Φ_Λ, определяемый метрикой g и вычисленный по переменной q_k. $\mathcal{D}_k\Phi_\Lambda(q_\Lambda)$ как функция переменной q_m $(m\neq k)$ есть отображение Q в TQ_{q_k}, $\mathcal{D}_m\mathcal{D}_k\Phi_\Lambda(q_\Lambda)$ - дифференциал этого отображения. $\mathcal{D}_k\Phi_\Lambda(q_\Lambda)$ как функция переменной q_k есть векторное поле на Q, $\mathcal{D}_k\mathcal{D}_k\Phi_\Lambda(q_\Lambda)$ - ковариантный дифференциал этого поля. $\|\cdot\|_g$ - норма линейного отображения касательных пространств, определяемая метрикой g.

Замечание. (5)-(9) - это условия достаточно быстрого убывания взаимодействия между частицами с ростом расстояния между соответствующими узлами решетки. Они заведомо выполняются, если взаимодействие финитно: существует целое $R>0$ (радиус взаимодействия), такое, что $\Phi_\Lambda\equiv 0$ при $diam\,\Lambda>R$. В общем случае, когда выполняются условия (5)-(9) будем считать, что $R=\infty$

Каждому $\Lambda\subset\Gamma$, $|\Lambda|<\infty$ соответствует гамильтониан конечной подсистемы, заключенной в "сосуде" Λ :

$$H_\Lambda(x_\Lambda)=\sum_{k\in\Lambda}\frac{1}{2}|p_k|_g^2+\sum_{\Lambda'\subseteq\Lambda}\Phi_{\Lambda'}(q_{\Lambda'}),\ x_\Lambda=(q_\Lambda,p_\Lambda)\in\mathcal{X}^\Lambda,\ q_{\Lambda'}=q_\Lambda|_{\Lambda'}. \quad (10)$$

H_Λ порождает однопараметрическую группу преобразований: $S_t^\Lambda:\mathcal{X}^\Lambda\longrightarrow\mathcal{X}^\Lambda$.

В дальнейшем предполагается, что зафиксирована некоторая вершина $k_0\in\Gamma$. Пусть $B(N)\equiv B_{k_0}(N)$, $S(N)\equiv S_{k_0}(N)$, $S_t^N\equiv S_t^{B(N)}$, $\Pi_N:\mathcal{X}^\Gamma\longrightarrow\mathcal{X}^{B(N)}:\hat{x}\longmapsto\Pi_N\hat{x}\equiv\hat{x}|_{B(N)}$ $(N=0,1,\dots)$

Риманова метрика g на Q порождает риманову метрику $\tilde{g}$ на $\mathcal{X}=T^*Q$ (см., например, [3]). Пусть $\tilde{\rho}$ - расстояние на $\mathcal{X}$, определяемое $\tilde{g}$.

Основной результат работы [I] состоит в следующем.

ТЕОРЕМА I. а) Пусть (Q,g) принадлежит к классу "допустимых связей" (см. [I]), а потенциалы Φ_Λ удовлетворяют условиям (5)-(9). Тогда задача Коши для уравнений движения, определяемых гамильтонианом (I), однозначно разрешима в целом по t при произвольных начальных данных.

Это значит, что уравнения движения определяют динамику $S_t:\mathcal{X}^\Gamma\longrightarrow\mathcal{X}^\Gamma:\hat{x}\longmapsto S_t\hat{x}$.

б) При фиксированном N $(N=1,2,\dots)$ для любых $\hat{x}\in\mathcal{X}^\Gamma$, $k\in B([N/2])$ справедлива оценка (см. [I] , неравенство (5.2 9)):

$$\tilde{\rho}((S_t\hat{x})_k,(S_t^N\Pi_N\hat{x})_k)\leqslant C_0\frac{(Ct)^{N_1(k)}}{N_1(k)!}+\varepsilon(N_2)+\delta(N), \quad (11)$$

где $C_0, C, \varepsilon(N), \delta(N)$ - не зависят ни от $\hat{x}$, ни от k; $\varepsilon(N),\delta(N)\longrightarrow 0$ при $N\longrightarrow\infty$; $N_2<N$ - выбирается произвольно; $N_1(k)=\left[\frac{N/2-dist(k,k_0)}{N_2}\right]$ (квадратные скобки означают целую часть числа).

Замечание. Из (II) следует, что $\tilde{\rho}((S_t\hat{x})_k,(S_t^N\Pi_N\hat{x})_k)\longrightarrow 0$ при $N\longrightarrow\infty$ для любого $k\in\Gamma$, равномерно по $\hat{x}\in\mathcal{X}^\Gamma$. Действительно, пусть $N\longrightarrow\infty$. Выбирая $N_2=N_2(N)$, так чтобы $N_2\longrightarrow\infty$, $N/N_2\longrightarrow\infty$, получим, что $N_1(k)\longrightarrow\infty$. Следовательно, правая часть (II) стремится к 0.

В заключение данного пункта отметим, что задача построения динамики для модели бесконечного ангармонического кристалла (без связей $(Q=\mathbb{R}^d)$ и при других условиях на взаимодействие)

исследована в [4]. Эта работа продолжена в [5, 6], где для модели кристалла доказывается существование сильного и слабого решений цепочки уравнений Боголюбова.

2. Обозначения и соглашения.

а) Если (X,μ) – пространство с мерой и $f: X \to Y$, то $f_*\mu$ – индуцированная отображением f мера на Y: $(f_*\mu)(A) = \mu(f^{-1}(A))$, $A \subset Y$. Справедлива формула $\int_Y \varphi(y)\, d(f_*\mu)(y) = \int_X \varphi(f(x))\, d\mu(x)$.

б) Пусть на $\mathcal{X}^\Gamma$ задана вероятностная мера μ, определенная на естественной σ-алгебре $\mathcal{S}$, порожденной цилиндрическими множествами. Ниже (п.5б) будет показано, что преобразования S_t измеримы относительно $\mathcal{S}$. Поэтому динамика порождает эволюцию меры μ: $\mu(\cdot,t) = (S_t)_*\mu$, $\mu(\cdot,0) = \mu$.

в) Для любых $\Lambda \subset \Omega \subset \Gamma$ определены проекции:

$$\Pi_\Lambda^\Omega : \mathcal{X}^\Omega \to \mathcal{X}^\Lambda : x_\Omega \mapsto \Pi_\Lambda^\Omega x_\Omega \equiv x_\Omega|_\Lambda,$$

$$\Pi_\Lambda \equiv \Pi_\Lambda^\Gamma : \mathcal{X}^\Gamma \to \mathcal{X}^\Lambda : \hat{x} \mapsto \Pi_\Lambda \hat{x} \equiv \hat{x}|_\Lambda.$$

$\mu_\Lambda = (\Pi_\Lambda)_*\mu$, $\mu_\Lambda(\cdot,t) = (\Pi_\Lambda)_*\mu(\cdot,t)$ – проекции мер μ, $\mu(\cdot,t)$ на $\mathcal{X}^\Lambda$.

Определим на $\mathcal{X}^\Lambda$ также меры: $\mu^\Lambda(\cdot,t) = (S_t^\Lambda)_*\mu_\Lambda$, $\mu_\Lambda^\Omega(\cdot,t) = (\Pi_\Lambda^\Omega)_*\mu^\Omega(\cdot,t)$.

г) Пусть $\Lambda \subset \Gamma, |\Lambda| < \infty$. dx_Λ – мера Лиувилля на $\mathcal{X}^\Lambda$, порожденная естественной симплектической структурой на $\mathcal{X}$. Она инвариантна относительно динамики S_t^Λ: $(S_t^\Lambda)_* dx_\Lambda = dx_\Lambda$. $\{\cdot,\cdot\}_\Lambda$ – скобка Пуассона функций на $\mathcal{X}^\Lambda$: $\{\cdot,\cdot\}_\Lambda = \sum_{k\in\Lambda} \{\cdot,\cdot\}_k$, где $\{\cdot,\cdot\}_k$ – скобка Пуассона, вычисленная по переменной x_k.

д) Введем формально плотности определенных выше мер относительно меры Лиувилля (они потребуются для разъяснения основного результата работы): $d\mu_\Lambda(x_\Lambda) = \rho_\Lambda(x_\Lambda)dx_\Lambda$; $d\mu_\Lambda(x_\Lambda,t) = \rho_\Lambda(x_\Lambda,t)dx_\Lambda$, $\rho_\Lambda(x_\Lambda,0) = \rho_\Lambda(x_\Lambda)$; $d\mu^\Lambda(x_\Lambda,t) = \rho^\Lambda(x_\Lambda,t)dx_\Lambda$; $d\mu_\Lambda^\Omega(x_\Lambda,t) = \rho_\Lambda^\Omega(x_\Lambda,t)\,dx_\Lambda$.

Поскольку $(S_t^\Lambda)_* dx_\Lambda = dx_\Lambda$, справедливы формулы:

$$\rho^\Lambda(x_\Lambda,t) = \rho_\Lambda(S_{-t}^\Lambda x_\Lambda); \quad \rho_\Lambda^\Omega(x_\Lambda,t) = \int_{\mathcal{X}^{\Omega\setminus\Lambda}} \rho^\Omega(x_\Omega,t)\,dx_{\Omega\setminus\Lambda}.$$

е) Если $\Omega = B(N)$, $\Lambda = B(M)$ $(M < N;\ M, N = 0, 1, \ldots)$, то будем писать $dx_{\Omega \setminus \Lambda} = dx_{N,M}$. Во всех остальных введенных выше обозначениях будем писать N вместо Ω и M вместо Λ. Заметим, что меры $\mu_M(\cdot, t) = (\Pi_M)_* \mu(\cdot, t)$ $(M = 0, 1, \ldots)$ образуют согласованный набор мер (если $M < N$, то $(\Pi_M^N)_* \mu_N(\cdot, t) = \mu_M(\cdot, t)$) по которому $\mu(\cdot, t)$ восстанавливается однозначно, согласно теореме Колмогорова.

3. Формулировка результата.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия теоремы I. Для любой вероятностной меры μ на $(\mathcal{X}^\Gamma, \mathfrak{S})$ последовательность конечномерных проекций $\mu_M(\cdot, t) = (\Pi_M S_t)_* \mu$ меры $\mu(\cdot, t) = (S_t)_* \mu$ на $\mathcal{X}^{B(M)}$ $(M = 0, 1, \ldots)$ является слабым решением цепочки уравнений Боголюбова:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \varphi_M d\mu_M = \int \{H_M, \varphi_M\}_M d\mu_M + \sum_{L=1}^{R} \int \{\mathcal{U}_M^{M+L}, \varphi_M\}_M d\mu_{M+L}, \quad (I2)$$

где

$$\mathcal{U}_M^{M+L}(q_{M+L}) = \sum_{\substack{\Lambda \subseteq B(M+L) \\ \Lambda \cap B(M) \neq \emptyset \\ \Lambda \cap S(M+L) \neq \emptyset}} \Phi_\Lambda(q_\Lambda), \quad q_{M+L} \in Q^{B(M+L)}, \ q_\Lambda = q_{M+L|\Lambda}, \quad (I3)$$

φ_M – произвольная гладкая финитная функция на $\mathcal{X}^{B(M)}$, $R \leq \infty$ – радиус взаимодействия (см.п.I).

Замечание. Требование финитности φ_M является чрезмерным. При доказательстве теоремы будут использованы лишь следующие свойства φ_M:

$$\sup_{x_M \in \mathcal{X}^{B(M)}} |\varphi_M(x_M)| < \infty; \quad \sup_{k \in B(M), x_M \in \mathcal{X}^{B(M)}} (|p_k|_g |P_1 \tilde{D}_k \varphi_M(x_M)|_g) < \infty;$$
$$\sup_{k \in B(M), x_M \in \mathcal{X}^{B(M)}} |P_2 \tilde{D}_k \varphi_M(x_M)|_g \equiv c_1(M) < \infty; \quad (I4)$$

$$\sup_{k,m\in B(M),\, x_M\in \mathcal{X}^{B(M)}} \left\| \tilde{D}_m P_2 \tilde{D}_k \varphi_M(x_M) \right\|_{\tilde{g}} \equiv C_2(M) < \infty. \qquad (15)$$

Обозначения: $\tilde{D}_k \varphi_M(x_M)$ - градиент функции φ_M, определяемый римановой метрикой $\tilde{g}$ на $\mathcal{X}$ и вычисленный по переменной x_k; $P_1, P_2 : T\mathcal{X}_x = T(T^*(Q)_{(q,p)} \to TQ_q, T^*Q_q$ - проекторы на горизонтальное и вертикальное подпространства, соответствующие связности Леви-Чивита метрики g; $P_1\tilde{D}_k$, $P_2\tilde{D}_k$ - "производные по координатам и по импульсам".

4. Комментарий.

Содержащееся в формулировке теоремы 2 определение слабого решения цепочки уравнений Боголюбова нуждается в пояснении.

Напомним, как выглядит для рассматриваемой модели формальный вывод цепочки уравнений Боголюбова.

Зафиксируем $\Omega \subset \Gamma$, $|\Omega| < \infty$. Плотность $\rho^{\Omega}(x_\Omega, t) = \rho_\Omega(S^{\Omega}_{-t} x_\Omega)$ (см.п.2д) удовлетворяет уравнению Лиувилля:

$$\frac{\partial \rho^{\Omega}}{\partial t} = \left\{\rho^{\Omega}, H_\Omega\right\}_\Omega . \qquad (16)$$

Пусть $\Lambda \subset \Omega$. Представим H_Ω в виде:

$$H_\Omega(x_\Omega) = H_\Lambda(x_\Lambda) + H_{\Omega\setminus\Lambda}(x_{\Omega\setminus\Lambda}) + \tilde{U}^{\Omega}_{\Lambda}(q_\Omega), \qquad (17)$$

где $x_\Omega = (q_\Omega, p_\Omega) \in \mathcal{X}^{\Omega}$, $x_\Lambda = x_\Omega|_\Lambda$, $x_{\Omega\setminus\Lambda} = x_\Omega|_{\Omega\setminus\Lambda}$,

$$\tilde{U}^{\Omega}_{\Lambda}(q_\Omega) = \sum_{\substack{\Lambda' \subseteq \Omega \\ \Lambda' \cap \Lambda \neq \emptyset \\ \Lambda' \cap (\Omega\setminus\Lambda) \neq \emptyset}} \Phi_{\Lambda'}(q_{\Lambda'}), \quad q_{\Lambda'} = q_\Omega|_{\Lambda'} . \qquad (18)$$

Подставляя (17) в (16), получим:

$$\frac{\partial \rho^{\Omega}}{\partial t} = \left\{\rho^{\Omega}, H_\Lambda\right\}_\Lambda + \left\{\rho^{\Omega}, H_{\Omega\setminus\Lambda}\right\}_{\Omega\setminus\Lambda} + \left\{\rho^{\Omega}, \tilde{U}^{\Omega}_{\Lambda}\right\}_\Omega . \qquad (19)$$

Подействуем на обе части (19) оператором $\int_{\mathcal{X}^{\Omega\setminus\Lambda}} dx_{\Omega\setminus\Lambda}$. Учи-

тывая, что $\int\{\rho^{\Omega}, H_{\Omega\setminus\Lambda}\}_{\Omega\setminus\Lambda}\, dx_{\Omega\setminus\Lambda}=0$ (см.пояснение ниже), получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho^{\Omega}_{\Lambda} = \{\rho^{\Omega}_{\Lambda}, H_{\Lambda}\}_{\Lambda} + \int\{\rho^{\Omega}, \tilde{\mathcal{U}}^{\Omega}_{\Lambda}\}_{\Omega}\, dx_{\Omega\setminus\Lambda}. \quad (20)$$

Пусть теперь $\Omega = B(N)$, $\Lambda = B(M)$, $M<N$. Тогда

$$\tilde{\mathcal{U}}^{\Omega}_{\Lambda}(q_{\Omega}) \equiv \tilde{\mathcal{U}}^{N}_{M}(q_N) = \sum_{L=1}^{\min(R,N-M)} \mathcal{U}^{M+L}_{M}(q_{M+L}),\ q_{M+L}=q_N|_{B(M+L)}, \quad (21)$$

где $\mathcal{U}^{M+L}_{M}$ определяется формулой (13), $R\leqslant\infty$. Учитывая (21) и принятое в п.2е соглашение об обозначениях, получим из (20):

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho^{N}_{M} = \{\rho^{N}_{M}, H_M\}_M + \sum_{L=1}^{\min(R,N-M)} \int\{\rho^{N}_{M+L}, \mathcal{U}^{M+L}_{M}\}_{M+L}\, dx_{M+L,M}. \quad (22)$$

Теперь зафиксируем M и осуществим в (22) формальный предельный переход $N\to\infty$. Предполагая, что $\lim\limits_{N\to\infty}\rho^{N}_{M}(x_M,t)=\rho_M(x_M,t)$, получим из (22) цепочку уравнений Боголюбова для бесконечной системы:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_M = \{\rho_M, H_M\}_M + \sum_{L=1}^{R} \int\{\rho_{M+L}, \mathcal{U}^{M+L}_{M}\}_{M+L}\, dx_{M+L,M};\ M=0,1,\ldots \quad (23)$$

В приведенном выводе есть момент требующий разъяснения. При переходе от (19) к (20) использовался тот факт, что интеграл по фазовому пространству от скобки Пуассона двух (достаточно быстро убывающих) функций равен 0. Поясним это в случае произвольного симплектического многообразия. (По поводу используемых ниже фактов, см., например, [7]).

Пусть $(\mathcal{M},\omega)$ – симплектическое многообразие. Каждой функции f на $\mathcal{M}$ сопоставляется (строго) гамильтоново векторное поле ξ_f по правилу: $\omega(\xi_f,\eta)=\eta f$ для любого векторного поля η. Скобка Пуассона: $f,h \equiv \xi_f h = dh(\xi_f) = i_{\xi_f} dh$ (символом $i_\xi \alpha$ обозначается свертка дифференциальной формы α с векторным полем ξ). Пусть $\tilde{\omega}$ – форма объема на

$\mathcal{M}$, порожденная симплектической формой ω. Для любых функций f и h форма $\{f,h\}\omega$ точна: $\{f,h\}\tilde{\omega}=d(h i_{\xi_f}\tilde{\omega})$. Убедимся в этом. $dh\wedge\tilde{\omega}=0$ так, как $deg\tilde{\omega}=dim\,\mathcal{M}$. Следовательно, $i_{\xi_f}(dh\wedge\tilde{\omega})=0$. С другой стороны $i_{\xi_f}(dh\wedge\tilde{\omega})=$ $=(i_{\xi_f}dh)\tilde{\omega}-dh\wedge i_{\xi_f}\tilde{\omega}$. Поэтому, $\{f,h\}\tilde{\omega}=dh\wedge i_{\xi_f}\tilde{\omega}$. Остается проверить, что $dh\wedge i_{\xi_f}\tilde{\omega}=d(h i_{\xi_f}\tilde{\omega})$. Имеем, $d(h i_{\xi_f}\tilde{\omega})=dh\wedge i_{\xi_f}\tilde{\omega}+h d(i_{\xi_f}\tilde{\omega})$. Но $d(i_{\xi_f}\tilde{\omega})=0$. Это вытекает из следующих фактов: производная Ли $L_{\xi_f}\tilde{\omega}=d(i_{\xi_f}\tilde{\omega})+$ $+i_{\xi_f}(d\tilde{\omega})$; $d\tilde{\omega}=0$; $L_{\xi_f}\tilde{\omega}=0$.

Интегрируя соотношение $\{f,h\}\tilde{\omega}=d(h i_{\xi_f}\tilde{\omega})$ по $\mathcal{M}$ и применяя формулу Стокса, получим: $\int\{f,h\}\tilde{\omega}=0$, если f,h – достаточно быстро убывают (например, одна из них финитна). (Не будем выяснять, что в точности означает быстрое убывание, так как сделанный вывод потребуется только в формальных рассуждениях.)

Из доказанного утверждения и соотношения $\{f,h_1h_2\}=$ $=\{f,h_1\}h_2+h_1\{f,h_2\}$ следует формула "интегрирования по частям": $\int\{f,h_1\}h_2\tilde{\omega}=-\int h_1\{f,h_2\}\tilde{\omega}$.

Теперь можно пояснить определение (I2). (I2) получается из (23) следующим образом. Нужно умножить (23) на φ_M, проинтегрировать по $\mathcal{X}^{B(M)}$ по мере dx_M, применить в каждом члене приведенную выше формулу интегрирования по частям, вспомнить определение плотностей ρ_M и учесть, что $\{U_M^{M+L},\varphi_M\}_{M+L}=\{U_M^{M+L},\varphi_M\}_M$.

5. <u>Доказательство теоремы 2</u>.

а) Пусть $\Lambda\subset\Omega\subset\Gamma$, $|\Omega|<\infty$, φ_Λ – гладкая финитная функция на $\mathcal{X}^\Lambda$. Вспоминая соотношения из п.2в: $\mu_\Lambda^\Omega(\cdot,t)=$ $=(\Pi_\Lambda^\Omega)_*\mu^\Omega(\cdot,t)=(\Pi_\Lambda^\Omega S_t^\Omega)_*\mu_\Omega$, определение динамики S_t^Ω и формулу из п.2а, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\varphi_\Lambda(x_\Lambda)d\mu_\Lambda^\Omega(x_\Lambda,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int\varphi_\Lambda(\Pi_\Lambda^\Omega S_t^\Omega x_\Omega)d\mu_\Omega(x_\Omega)=$$

$$=\int\{H_\Omega,\varphi_\Lambda\circ\Pi_\Lambda^\Omega\}_\Omega(S_t x_\Omega)d\mu_\Omega(x_\Omega)=\int\{H_\Omega,\varphi_\Lambda\circ\Pi_\Lambda^\Omega\}_\Lambda(x_\Omega)d\mu^\Omega(x_\Omega,t).$$

Подставляя сюда (I7) и учитывая очевидные соотношения

$\{H_\Lambda \circ \Pi^\Omega_\Lambda, \varphi_\Lambda \circ \Pi^\Omega_\Lambda\}_\Lambda = \{H_\Lambda, \varphi_\Lambda\}_\Lambda \circ \Pi^\Omega_\Lambda$, $\{H_{\Omega\setminus\Lambda} \circ \Pi^\Omega_{\Omega\setminus\Lambda}, \varphi_\Lambda \circ \Pi^\Omega_\Lambda\}_\Lambda = 0$, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \varphi_\Lambda \, d\mu^\Omega_\Lambda = \int \{H_\Lambda, \varphi_\Lambda\}_\Lambda \, d\mu^\Omega_\Lambda + \int \{\tilde{U}^\Omega_\Lambda, \varphi_\Lambda \circ \Pi^\Omega_\Lambda\}_\Lambda \, d\mu^\Omega . \qquad (24)$$

Пусть теперь $\Lambda = B(M)$, $\Omega = B(N)$, $M < N$. Учитывая соглашение об обозначениях п.2е и подставляя (2I) в (24), получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \varphi_M \, d\mu^N_M = \int \{H_M, \varphi_M\}_M \, d\mu^N_M + \sum_{L=1}^{\min(R, N-M)} \int \{U^{M+L}_M, \varphi_M\}_M \, d\mu^N_{M+L} . \qquad (25)$$

Теперь для того, чтобы получить (I2), нужно оправдать возможность предельного перехода $N \to \infty$ в (25).

б) ЛЕММА. S_t – измеримые преобразования $(\mathcal{X}^\Gamma, \sigma)$ (см. п.2б), так что определение меры $\mu(\cdot, t) = (S_t)_* \mu$ корректно. Для любого $M = 0, 1, \ldots$ меры $\mu^N_M(\cdot, t) = (\Pi^N_M S^N_t \Pi_N)_* \mu$ слабо сходятся к мере $\mu_M(\cdot, t) = (\Pi_M S_t)_* \mu$ при $N \to \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f – непрерывная ограниченная функция на $\mathcal{X}^{B(M)}$. Заметим, что $\int_{\mathcal{X}^{B(M)}} f(x_M) \, d\mu^N_M(x_M, t) =$ $= \int_{\mathcal{X}^\Gamma} f(\Pi^N_M S^N_t \Pi_N \hat{x}) \, d\mu(\hat{x})$ (см.п.2а). Из теоремы 2 и непрерывности f следует, что $f \circ \Pi^N_M \circ S^N_t \circ \Pi_N \to f \circ \Pi_M \circ S_t$ при $N \to \infty$ всюду на $\mathcal{X}^\Gamma$. Учитывая это обстоятельство, а также тот факт, что функции $f \circ \Pi^N_M \circ S^N_t \circ \Pi_N$ ограничены той же константой, что и f, с помощью теоремы Лебега приходим к следующим заключениям. I) Функция $f \circ \Pi_M \circ S_t$ на $\mathcal{X}^\Gamma$ суммируема по мере μ. Отсюда следует, что S_t – измеримо и $\int f(\Pi_M S_t \hat{x}) \, d\mu(\hat{x}) =$ $= \int f(x_M) \, d\mu_M(x_M, t)$. 2) $\int f(x_M) \, d\mu^N_M(x_M, t) \to \int f(x_M) \, d\mu_M(x_M, t)$

при $N \to \infty$. Заметим, что в силу (II) сходимость равномерна по t на любом промежутке $[0, t_0]$ $(t_0 < \infty)$, если f – равномерно непрерывна. Лемма доказана.

Из доказанной леммы немедленно следует теорема 2 для случая конечного радиуса взаимодействия: $R < \infty$. Действительно, в каждом слагаемом правой части (25) можно сделать предельный переход $N \to \infty$. В результате получим правую часть (I2). Возможность предельного перехода в левой части (25) вытекает из следующих

замечаний: $\int \varphi_M d\mu_M^N \to \int \varphi_M d\mu_M$ при $N\to\infty$ равномерно по $t\in[0,t_0]$ $(t_0<\infty)$ в силу леммы; $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi_M d\mu_M^N$ существует в силу сходимости правой части (25); функция $\int \varphi_M(x_M)d\mu_M(x_M,t)=\int \varphi_M(\Pi_M S_t\hat{x})d\mu(\hat{x})$ дифференцируема по t.

в) Перейдем к общему случаю: $R=\infty$. Сначала докажем, что ряд в правой части (12) сходится.

Заметим, что

$$\left\{\mathcal{U}_M^{M+L},\varphi_M\right\}_M=\sum_{K\in B(M)} g\left(D_K\mathcal{U}_M^{M+L},P_2\tilde{D}_K\varphi_M\right). \tag{26}$$

Представим $D_K\mathcal{U}_M^{M+L}$ в виде:

$$D_K\mathcal{U}_M^{M+L}(q_{M+L})=\sum_{i=1}^{|B(M+L)|+1}\sum_{\substack{\Lambda\subseteq B(M+L)\setminus\{K\}\\ \Lambda\cap S(M+L)\neq\emptyset\\ |\Lambda|=i}} D_K\Phi_{\{K\}\cup\Lambda}(q_K,q_\Lambda),\ q_\Lambda=q_{M+L|\Lambda}. \tag{27}$$

Из $K\in B(M)$, $\Lambda\cap S(M+L)\neq\emptyset$ следует: $diam(\{K\}\cup\Lambda)\geq L$. Поэтому $D_K\Phi_{\{K\}\cup\Lambda}(q_K,q_\Lambda)_g\leq C_{i+1}(L)$ в силу (5). Число слагаемых во второй сумме в (27) равно: $\beta(L,i)=\binom{|B(M+L)|-1}{i}-\binom{|B(M+L-1)|-1}{i}$ (будем считать, что $\binom{N}{M}\equiv\frac{N!}{M!(N-M)!}$ при $N\geq M$, $\binom{N}{M}\equiv 0$ при $N<M$). Заметим, что

$$\beta(L,i)=\sum_{j=1}^{|S(M+L)|}\binom{|B(M+L)|-1-j}{i-1}\leq\sum_{j=1}^{s(M+L)}\binom{B(M+L)-1-j}{i-1}\leq\frac{1}{(i-1)!}s(M+L)B(M+L)^{i-1}$$

(здесь использовано (4)). Учитывая сказанное и вспоминая (6), (4), получим из (27) оценку:

$$|D_K\mathcal{U}_M^{M+L}|_g\leq\sum_{i=1}^{|B(M+L)|-1}\beta(L,i)C_{i+1}(L)\leq\frac{s(M+L)}{s(L)}\alpha(L)\sum_{i=2}^{B(M+L)}\frac{a(i)}{(i-2)!}\left(\frac{B(M+L)}{B(L)}\right)^{i-2}\leq \tag{28}$$

$$\leq s(1)^M\alpha(L)\sum_{i=2}^{B(M+L)}\frac{a(i)}{(i-2)!}\left(1+\frac{s(L)}{B(L)}Ms(1)^M\right)^{i-2}\equiv s(1)^M A^{(1)}(M,L).$$

Здесь на последнем шаге учтено, что $s(M+L) \leqslant s(L)\, s(1)^M$ (это следует из (3), (4) и очевидного неравенства: $|S_K(N)| \leqslant |S_K(N-1)| \times \max_{m \in S_K(N-1)} |S_m(1)|$) и $b(M+L) = b(L) + \sum_{L'=1}^{M} s(L+L') \leqslant b(L) + s(L) \sum_{L'=1}^{M} s(1)^{L'} \leqslant$ $\leqslant b(L) + s(L) M s(1)^M$. Оценивая (26) с помощью неравенства Коши и учитывая (28), (I4), (4), получим:

$$\left| \sum_{L=1}^{\infty} \int \{ \mathcal{U}_M^{M+L}, \varphi_M \}_M d\mu_{M+L} \right| \leqslant b(M)\, c_1(M)\, s(1)^M \sum_{L=1}^{\infty} A^{(1)}(M,L). \quad (29)$$

Остается убедиться, что $\sum_{L=1}^{\infty} A^{(1)}(M,L) < \infty$. Пусть выполнено условие (8). Выберем $r_0 : 1 < r_0 < r$. Существует номер $L_0(M)$ такой, что из $L > L_0(M)$ следует: $1 + \frac{s(L)}{b(L)} M s(1)^M \leqslant r_0$. Поэтому

$$\sum_{L=1}^{\infty} A^{(1)}(M,L) \leqslant \sum_{L=1}^{L_0(M)} A^{(1)}(M,L) + \sum_{L > L_0(M)} \alpha(L) \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a(i)}{(i-2)!} r_0^{i-2} < \infty.$$

Если выполнено (9), то $\sum_{L=1}^{\infty} A^{(1)}(M,L) \leqslant \sum_{L=1}^{\infty} \alpha(L) \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a(i)}{(i-2)!} \left(1 + M s(1)^M\right)^{i-2} < \infty$.

(Здесь было учтено (7), а также тот факт, что радиус сходимости ряда $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{a(i)}{(i-2)!} z^{i-2}$ равен r).

г) Введем обозначения: $f \equiv \{ \mathcal{U}_M^{M+L}, \varphi_M \}_M$,

$$J(N,M,L) \equiv \int f(x_{M+L})\, d\mu_{M+L}(x_{M+L}, t) - \int f(x_{M+L})\, d\mu^N_{M+L}(x_{M+L}, t).$$

Для завершения доказательства теоремы 2 остается убедиться что $\lim_{N \to \infty} \sum_{L=1}^{N-M} J(N,M,L) = 0$. Для этого достаточно проверить, что $\lim_{N \to \infty} \sum_{L=1}^{[N/2]-M} J(N,M,L) = 0$. Действительно

$\lim_{N \to \infty} \sum_{L > [N/2]-M} J(N,M,L) = 0$, так как в силу (29)

$\sum_{L=1}^{\infty} J(N,M,L) < \infty$.

Из определения мер $\mu_{M+L}(\cdot, t)$, $\mu^N_{M+L}(\cdot, t)$ и формулы из п.2а, следует

$$J(N,M,L) = \int_{\mathcal{X}^\Gamma} [f(\Pi_{M+L} S_t \hat{x}) - f(\Pi^N_{M+L} S^N_t \Pi_N \hat{x})]\, d\mu(\hat{x}). \quad (30)$$

Пусть $A_K(M,L) \equiv \sup_{x_{M+L} \in \mathcal{X}^{B(M+L)}} |\tilde{D}_K f(x_{M+L})|_{\tilde{g}}$, $K \in B(M+L)$. (31)

Оценивая (30) с помощью очевидного неравенства

$$|f(\Pi_{M+L} S_t \hat{x}) - f(\Pi^N_{M+L} S^N_t \Pi_N \hat{x})| \leq \sum_{K \in B(M+L)} A_K(M,L) \tilde{\rho}((S_t \hat{x})_K, (S^N_t \Pi_N \hat{x})_K)$$

и учитывая (II) ($K \in B(M+L) \subset B([N/2])$, так как $L \leq [N/2]-M$), получим

$$\left| \sum_{L=1}^{[N/2]-M} J(N,M,L) \right| \leq C_0 J_1(N,M) + J_2(N,M)(\varepsilon(N_2) + \delta(N)), \tag{32}$$

где

$$J_1(N,M) \equiv \sum_{L=1}^{[N/2]-M} \sum_{K \in B(M+L)} A_K(M,L) \frac{(Ct)^{N_1(K)}}{N_1(K)!} , \tag{33}$$

$$J_2(N,M) \equiv \sum_{L=1}^{[N/2]-M} \sum_{K \in B(M+L)} A_K(M,L). \tag{34}$$

Нужно доказать, что правая часть (32) стремится к 0 при $N \to \infty$. Сначала оценим $A_K(M,L)$. Из (26) следует:

$$\tilde{D}_K \{\mathcal{U}^{M+L}_M, \varphi_M\}_M = \sum_{m \in B(M)} (D_K D_m \mathcal{U}^{M+L}_M \cdot P_2 \tilde{D}_m \varphi_M + \tilde{D}_K P_2 \tilde{D}_m \varphi_M \cdot D_m \mathcal{U}^{M+L}_M) \tag{35}$$

(точка означает действие оператора на вектор).

Пусть $K \in S(M+L)$. Тогда

$$D_K D_m \mathcal{U}^{M+L}_M (q_{M+L}) = \sum_{i=0}^{|B(M+L)|-2} \sum_{\substack{\Lambda \subseteq B(M+L) \setminus \{K,m\} \\ |\Lambda| = i}} D_K D_m \Phi_{\{K,m\} \cup \Lambda}(q_K, q_m, q_\Lambda), \tag{36}$$

где $q_\Lambda = q_{M+L}|_\Lambda$. Из $K \in S(M+L)$, $m \in B(M)$ следует: $\mathrm{diam}(\{K,m\} \cup \Lambda) \geq L$. Поэтому $\|D_K D_m \Phi_{\{K,m\} \cup \Lambda}\|_g \leq C_{i+2}(L)$ в силу (5). Число слагаемых во второй сумме в (36) равно : $\binom{|B(M+L)|-2}{i} \leq \binom{B(M+L)-2}{i} \leq \frac{1}{i!} B(M+L)^i$. Учитывая сказанное и вспоминая (6), (4), (28), получаем из (36):

$$\|D_K D_m \mathcal{U}^{M+L}_M\|_g \leq \frac{1}{s(L)} \alpha(L) \sum_{i=2}^{B(M+L)} \frac{\alpha(i)}{(i-2)!} \left(\frac{B(M+L)}{B(L)}\right)^{i-2} \leq \frac{1}{s(L)} A^{(1)}(M,L). \tag{37}$$

Пусть $\kappa \in B(M+L-1)$. Тогда

$$D_\kappa D_m \mathcal{U}_M^{M+L}(q_{M+L}) = \sum_{i=1}^{|B(M+L)|-2} \sum_{\substack{\Lambda \subseteq B(M+L)\setminus\{\kappa,m\} \\ \Lambda \cap S(M+L) \neq \emptyset \\ |\Lambda| = i}} D_\kappa D_m \Phi_{\{\kappa,m\}\cup\Lambda}(q_\kappa, q_m, q_\Lambda), \quad (38)$$

где $q_\Lambda = q_{M+L|\Lambda}$. Из $\Lambda \cap S(M+L) \neq \emptyset$, $m \in B(M)$ следует: $diam(\{\kappa,m\} \cup \Lambda) \geqslant L$. Поэтому $\|D_\kappa D_m \Phi_{\{\kappa,m\}\cup\Lambda}\|_g \leqslant C_{i+2}(L)$ в силу (5). Число слагаемых во второй сумме в (38) равно:

$$\binom{|B(M+L)|-2}{i} - \binom{|B(M+L-1)|-2}{i} \leqslant \frac{1}{(i-1)!} s(M+L) b(M+L)^{i-1} \quad \text{(см. п. (в))}$$

Учитывая сказанное и вспоминая (6), (4), получаем из (38):

$$\|D_\kappa D_m \mathcal{U}_M^{M+L}\|_g \leqslant \frac{1}{b(L)} \frac{s(M+L)}{s(L)} a(L) \sum_{i=3}^{b(M+L)} \frac{a(i)}{(i-3)!} \left(\frac{b(M+L)}{b(L)}\right)^{i-3} \leqslant \quad (39)$$

$$\leqslant s(1)^M \frac{1}{b(L)} a(L) \sum_{i=3}^{b(M+L)} \frac{a(i)}{(i-3)!} \left(1 + \frac{s(L)}{b(L)} M s(1)^M\right)^{i-3} \equiv s(1)^M \frac{1}{b(L)} A^{(2)}(M,L).$$

Собирая вместе неравенства (I4), (I5), (28), (37), (39) и оценивая с их помощью (35), получим

$$A_\kappa(M,L) \leqslant b(M) s(1)^M [c_1(M) b(L)^{-1} A^{(2)}(M,L) + c_2(M) A^{(1)}(M,L) \delta_M(\kappa)], \kappa \in B(M+L-1);$$

$$A_\kappa(M,L) \leqslant b(M) c_1(M) s(L)^{-1} A^{(1)}(L,M), \quad (40)$$

$$(\delta_M(\kappa) = 1, \ \kappa \in B(M); \ \delta_M(\kappa) = 0, \ \kappa \notin B(M)).$$

Вернемся к (32)-(34). Оценим $J_2(N,M)$ с помощью (40), учитывая (4) и $b(M+L)/b(L) \leqslant 1 + M s(1)^M$. В результате получим:

$$J_2(N,M) \leqslant b(M) s(1)^M \left[c_1(M)(1+M s(1)^M) \sum_{L=1}^{\infty} A^{(2)}(M,L) + (b(M) c_2(M) + c_1(M)) \sum_{L=1}^{\infty} A^{(1)}(M,L)\right] < \infty. \quad (4I)$$

($\sum_{L=1}^{\infty} A^{(2)}(M,L) < \infty$ – доказывается так же, как и $\sum_{L=1}^{\infty} A^{(1)}(M,L) < \infty$ в п. (в).) Из (4I) следует, что $J_2(N,M)(\varepsilon(N_2) + \delta(N)) \to 0$ при $N \to \infty$ (см. (II)).

Остается доказать, что $\lim_{N\to\infty} J_1(N,M) = 0$. Оценим $J_1(N,M)$

так же, как и $J_2(N,M)$, с помощью (40). Получим:

$$J_1(N,M) \leqslant b(M)\, s(1)^M c_1(M) J_1^{(1)}(N,M) + b(M)^2 c_2(M)\, s(1)^M J_1^{(2)}(N,M), \qquad (42)$$

где

$$J_1^{(1)}(N,M) \equiv \sum_{L=1}^{[N/2]-M} \left((1+M s(1)^M) A^{(2)}(M,L) + A^{(1)}(M,L)\right) \frac{(Ct)^{[(N/2-M-L)/N_2]}}{[(N/2-M-L)/N_2]!}, \qquad (43)$$

$$J_1^{(2)}(N,M) \equiv \sum_{L=1}^{[N/2]-M} A^{(1)}(M,L) \frac{(Ct)^{[(N/2-M)/N_2]}}{[(N/2-M)/N_2]!}. \qquad (44)$$

(Здесь учтено, что $N_1(k) \geqslant [(N/2-M-L)/N_2]$ при $k \in B(M+L)$, $N_1(k) \geqslant [(N/2-M)/N_2]$ при $k \in B(M)$).

Из $\sum_{L=1}^{\infty} A^{(1)}(M,L) < \infty$ следует $\lim_{N\to\infty} J_1^{(2)}(N,M) = 0$ (напомним, что $N/N_2 \to \infty$). Докажем, что $\lim_{N\to\infty} J_1^{(1)}(N,M) = 0$. Рассмотрим случай, когда выполняется условие (8). Случай (9) рассматривается аналогично. Пусть $1 < r_0 < r$ и номер $L_0(M)$ таков, что из $L > L_0(M)$ следует: $1 + \frac{s(L)}{b(L)} M s(1)^M \leqslant r_0$ (см.п.(в)). Вспоминая определения $A^{(1)}(M,L)$, $A^{(2)}(M,L)$ в (28), (39), получим:

$$J_1^{(1)}(N,M) \leqslant \sum_{L=1}^{L_0(M)} \left((1+Ms(1)^M) A^{(2)}(M,L) + A^{(1)}(M,L)\right) \frac{(Ct)^{[(N/2-M-L_0(M))/N_2]}}{[(N/2-M-L_0(M))/N_2]!} +$$

$$+ \left((1+M s(1)^M) \sum_{i=3}^{\infty} \frac{a(i)}{(i-3)!} r_0^{i-3} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a(i)}{(i-2)!} r_0^{i-2}\right) \sum_{L=1}^{[N/2]-M} \alpha(L) \frac{(Ct)^{[(N/2-M-L)/N_2]}}{[(N/2-M-L)/N_2]!}. \qquad (45)$$

Из $\sum_{L=1}^{\infty} A^{(j)}(M,L) < \infty$ $(j=1,2)$ следует, что первое слагаемое в (45) стремится к 0 при $N \to \infty$. Поскольку ряды в первом сомножителе второго слагаемого сходятся, остается проверить, что второй сомножитель стремится к 0 при $N \to \infty$. Имеем:

$$\sum_{L=1}^{[N/2]-M} \alpha(L) \frac{(Ct)^{[(N/2-M-L)/N_2]}}{[(N/2-M-L)/N_2]!} \leqslant \max_L \alpha(L) \sum_{L=1}^{[N/4]-M} \frac{(Ct)^{[(N/2-M-L)/N_2]}}{[(N/2-M-L)/N_2]!} + \max_N \frac{(Ct)^N}{N!} \sum_{L>[N/4]-M} \alpha(L).$$

Теперь остается заметить, что $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{L>[N/4]-M} \alpha(L) = 0$ в силу (7) и $\sum\limits_{L=1}^{[N/4]-M} \frac{(Ct)^{[(N/2-M-L)/N_2]}}{[(N/2-M-L)/N_2]!} \leqslant \frac{N}{4} \frac{(Ct)^{[N/4N_2]}}{[N/4N_2]!} \longrightarrow 0$ при $N\to\infty$ если, например, $N_2=N_2(N)\sim\sqrt{N}$ (напомним, что N_2 выбирается произвольно: $N_2\to\infty$, $N/N_2\to\infty$ при $N\to\infty$).

Теорема 2 доказана.

Автор благодарен О.А.Ладыженской за внимание к работе.

Литература

1. Ш у б о в В.И. О динамике бесконечных классических ангармонических систем со связями. - Труды Мат.ин-та АН СССР, 1986, т.179, с.285-310.
2. Ш у б о в В.И. О динамике бесконечных классических ангармонических систем со связями. - В сб.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций.17. Зап.научн. семин.ЛОМИ, 1985, т.147, с.190-195.
3. Б е с с е А. Многообразия с замкнутыми геодезическими.М., 1981.
4. L a n f o r d O.E., L e b o w i t z J.L., L i e b E.H. Time evolution of infinite anharmonic system. - Journal of Statistical Physics, 1977, v.16, N 6, p.453.
5. E s p o s i t o R., P u l v i r e n t i M. Hierarchical equations of evolution of an anharmonic system. - Journal of Math.Phys., 1980, v.21, N 5, p.1194-1200.
6. M a r c h i o r o C., P e l l e g r i n o t t i A., P u l v i r e n t i M. On the dynamics of infinite anharmonic systems. - Journal of Math.Phys., 1981, v.22, N 8, p.1740-1745.
7. Г о д б и й о н К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М., 1973.

Shubov V.I. Existence of the weak solution of the Bogolubov's hierarchical equations for infinite classical anharmonic systems with constraints.

For a system of infinitely many classical constrained anharmonic oscillators the existence of the weak solution of the Bogolubov's hierarchical equations is proved.