ТЕПЛОФИЗИКА ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР
Том 17 1979 № 1

УДК 536.24

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ТЕПЛООБМЕН В ОРЕБРЕННОЙ ТОНКОСТЕННОЙ ОБОЛОЧКЕ ВРАЩЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕРМИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ В ЗОНЕ СОПРЯЖЕНИЯ

Макаров А. М., Романовский В. Р.

Рассмотрена задача нестационарной теплопроводности в геометрически разнородных неидеально сопряженных оболочках вращения.

Актуальность исследования нестационарных температурных полей в оребренных оболочках [1] обусловлена важностью проблем прочности и устойчивости конструкций при воздействии термических напряжений и интенсификации процессов теплопередачи в теплообменниках. Для получения наиболее полных результатов следует учитывать сопряжение температурных полей в разнородных геометрических областях и особенности физической неоднородности поверхности соприкосновения. Последние можно учесть феноменологически введением термического сопротивления контакта [2].

Методы решения задач теплопроводности при сопряжении областей одной геометрической структуры (пакет пластин, цилиндрические и сферические слои и т. п.) при идеальном и неидеальном тепловом контакте соприкасающихся поверхностей известны [3—6]. В настоящей работе на примере звездообразного сопряжения геометрически разнородных тонкостенных оболочек вращения с неидеальным тепловым контактом представлено решение линейных задач теплопроводности с учетом физической и геометрической неоднородности сопрягаемых областей.

Пусть тонкостенная осесимметричная составная цилиндрическая оболочка радиуса a подкреплена плоским осесимметричным шпангоутом с внешним радиусом a_2. Оболочка простирается на высоту a_1 над поверхностью шпангоута и на расстояние a_3 под поверхностью шпангоута (рис. 1). Тепловое взаимодействие шпангоута и оболочки описывается моделью неидеального теплового контакта. Торцевые поверхности оболочки и шпангоута (внешняя граница сопрягаемых областей) теплоизолированы, а оболочка и шпангоут обмениваются теплом с окружающей средой заданной температуры по закону Ньютона. Задана поверхностная плотность источников тепла. Начальное распределение температуры в каждой области однородно.

Математическая формулировка задачи имеет вид

$$c^{(i)}\rho^{(i)}\frac{\partial u^{(i)}}{\partial t}=\lambda^{(i)}L^{(i)}u^{(i)}-\alpha^{(i)}u^{(i)}+f^{(i)},\quad t>0,\quad i=\overline{1,3},$$

$$L^{(1)}=\partial^2/\partial z^2,\qquad z\in(0,\ a_1),$$

$$L^{(2)}=1/r[\partial/\partial r(r\partial/\partial r)],\qquad r\in(a,\ a_2),\tag{1}$$

$$L^{(3)}=\partial^2/\partial z^2,\qquad z\in(-a_3,\ 0),$$

$$u^{(i)}|_{t=0}=0,\qquad i=\overline{1,\ 3},\tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u^{(1)}}{\partial z}\right|_{z=a_1}=\left.\frac{\partial u^{(2)}}{\partial r}\right|_{r=a_2}=\left.\frac{\partial u^{(3)}}{\partial z}\right|_{z=-a_3}=0, \tag{3}$$

$$u^{(1)}-u^{(3)}|_{z=0}=0,$$

$$u^{(1)}|_{z=0}-u^{(2)}|_{r=a}=-\lambda^{(2)}R_c\left.\frac{\partial u^{(2)}}{\partial r}\right|_{r=a}, \tag{4}$$

$$\lambda^{(1)}\left.\frac{\partial u^{(1)}}{\partial z}\right|_{z=0}+\lambda^{(2)}\left.\frac{\partial u^{(2)}}{\partial r}\right|_{r=a}-\lambda^{(3)}\left.\frac{\partial u^{(3)}}{\partial z}\right|_{z=0}=0.$$

Задачи теории теплопроводности вида (1)–(4) ранее, по-видимому, не рассматривались. Их специфика состоит в том, что операторы $L^{(i)}$ ($i=\overline{1,3}$) записываются в различных системах координат, а условия сопряжения учитывают контактное термическое сопротивление.

Для решения задачи (1)–(4) используем метод конечного интегрального преобразования с модификацией, учитывающей отмеченную специфику. Ядра интегрального преобразования определим как решение вспомогательной задачи

$$\lambda^{(i)}L^{(i)}Q_m^{(i)}+(c^{(i)}\rho^{(i)}\mu_m^2-\alpha^{(i)})Q_m^{(i)}=0; \tag{5}$$

$$i=\overline{1,3},\quad m=1,2,\ldots$$

$$\frac{dQ_m^{(1)}}{dz}(a_1)=\frac{dQ_m^{(2)}}{dr}(a_2)=\frac{dQ_m^{(3)}}{dz}(-a_3)=0, \tag{6}$$

$$Q_m^{(1)}(0)-Q_m^{(3)}(0)=0,$$

$$Q_m^{(1)}(0)-Q_m^{(2)}(a)=-\lambda^{(2)}R_c\frac{dQ_m^{(2)}}{dr}(a), \tag{7}$$

$$\lambda^{(1)}\frac{dQ_m^{(1)}}{dz}(0)+\lambda^{(2)}\frac{dQ_m^{(2)}}{dr}(a)-\lambda^{(3)}\frac{dQ_m^{(3)}}{dz}(0)=0.$$

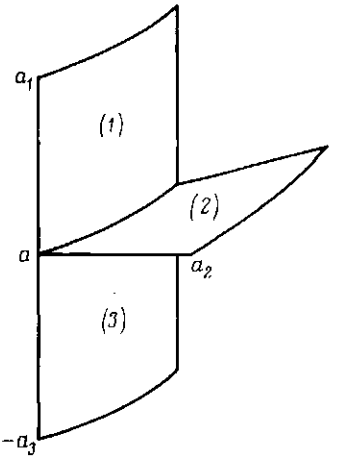

Рис. 1. Исследуемая область

Уравнениям (5) удовлетворяют (в зависимости от области) либо тригонометрические функции, либо функции Бесселя действительного аргумента нулевого порядка первого и второго рода

$$Q_m^{(i)}=A_m^{(i)}q_{1,m}^{(i)}+B_m^{(i)}q_{2,m}^{(i)}, \tag{8}$$

$$q_{1,m}^{(i)}=\begin{cases}\cos\xi_m^{(i)}z\\ J_0(\xi_m^{(2)}r)\end{cases}\qquad q_{2,m}^{(i)}=\begin{cases}\sin\xi_m^{(i)}z, & i=1,3,\\ Y_0(\xi_m^{(2)}r), & i=2,\end{cases}$$

$$\xi_m^{(i)}=\sqrt{(c^{(i)}\rho^{(i)}\mu_m^2-\alpha^{(i)})/\lambda^{(i)}},$$

при $\xi_m^{(i)}>0$.

Последовательность собственных функций $Q_m^{(i)}$ на рассматриваемом пространственном элементе обладает следующим свойством ортогональности:

$$c^{(1)}\rho^{(1)}a\int_0^{a_1}Q_k^{(1)}Q_m^{(1)}dz+c^{(2)}\rho^{(2)}\int_a^{a_2}Q_k^{(2)}Q_m^{(2)}r\,dr+ \tag{9}$$

$$+c^{(3)}\rho^{(3)}a\int_{-a_3}^{0}Q_k^{(3)}Q_m^{(3)}dz=0,\quad k\neq m.$$

Неизвестные постоянные $A_m^{(i)}$ и $B_m^{(i)}$ и собственные числа μ_m можно получить, подставляя решение (8) в граничные условия (6) и условия сопряжения (7). Поскольку получающаяся при этом система линейных алгебраических уравнений однородна, решение ее определено с точностью до нормирующего множителя, а условие нетривиальности решения составляет трансцендентное уравнение для нахождения μ_m. Условие нормировки естественно следует из условия ортогональности при $k=m$.

Заметим, что условие ортогональности (9) содержит масштабные множители в первом и третьем слагаемом. Необходимость их введения обусловлена различием геометрической структуры сопрягаемых областей.

Принимая последовательность функций $Q_{(m)}^{(i)}$ за ядра конечного интегрального преобразования, исключим из уравнений (1) дифференциальные операции по пространственным переменным, переводя исходную задачу из пространства оригиналов в пространство изображений. После несложных преобразований относительно трансформанты искомого решения

$$T_m(t)=c^{(1)}\rho^{(1)}a\int_0^{a_1}u^{(1)}Q_m^{(1)}\,dz+c^{(2)}\rho^{(2)}\int_a u^{(2)}Q_m^{(2)}\,r\,dr+$$

$$+c^{(3)}\rho^{(3)}a\int_{-a_3}^{0}u^{(3)}Q_m^{(3)}\,dz$$

получим следующую задачу Коши:

$$\frac{dT_m}{dt}+\mu_m^2T_m=\Phi_m,\quad T_m(0)=0,\quad m=1,2,3,\ldots,$$

$$\Phi_m(t)=a\int_0^{a_1}f^{(1)}Q_m^{(1)}\,dz+\int_a^{a_2}f^{(2)}Q_m^{(2)}\,r\,dr+a\int_{-a_3}^{0}f^{(3)}Q_m^{(3)}\,dz. \tag{10}$$

Решение задачи (10) имеет вид

$$T_m(t)=\int_0^t\Phi_m(\tau)\,e^{-\mu_m^2(t-\tau)}d\tau. \tag{11}$$

Осуществляя обратное преобразование трансформанты (11), получим решение исходной задачи

$$u^{(i)}=\sum_{m=1}^{\infty}T_mQ_m^{(i)},\quad i=\overline{1,3}. \tag{12}$$

На рис. 2, 3 показано распределение полей температуры в системе, представленной на рис. 1, рассчитанное по предложенному методу при следующих значениях геометрических и теплофизических величин:

$$a_1=a_3=0{,}03\ \text{м};\qquad a=0{,}1\ \text{м};\qquad a_2=0{,}12\ \text{м},$$

$$\lambda^{(1)}=\lambda^{(3)}=22{,}2\ \text{Вт/(м}\cdot\text{град)};\quad \lambda^{(2)}=51{,}9\ \text{Вт/(м}\cdot\text{град)},$$

$$c^{(1)}=c^{(3)}=494\ \text{Дж/(кг}\cdot\text{град)};\quad c^{(2)}=486\ \text{Дж/(кг}\cdot\text{град)},$$

$$\rho^{(1)}=\rho^{(3)}=7850\ \text{кг/м}^3;\qquad \rho^{(2)}=7820\ \text{кг/м}^3,$$

$$\alpha^{(1)}=\alpha^{(3)}=4{,}852\cdot10^6\ \text{Вт/(м}^3\cdot\text{град)};$$

$$\alpha^{(2)}=0{,}4\cdot10^6\ \text{Вт/(м}^3\cdot\text{град)},$$

$$f^{(1)}=f^{(3)}=93{,}04\cdot10^6\ \text{Вт/м}^3;\qquad f^{(2)}=0.$$

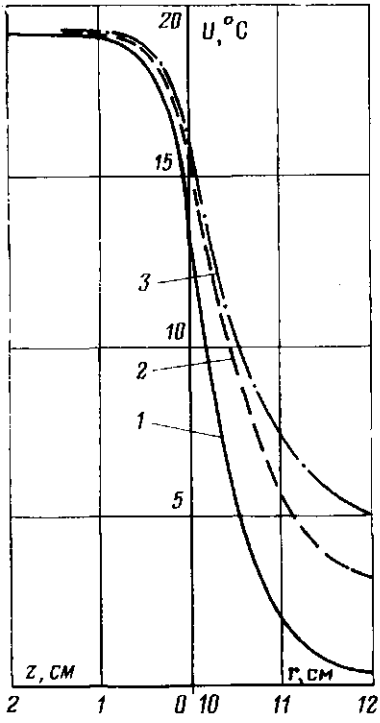

Рис. 2. Температурное поле при идеальном контакте: *1* – t=3с; *2* – 10; *3* – 60

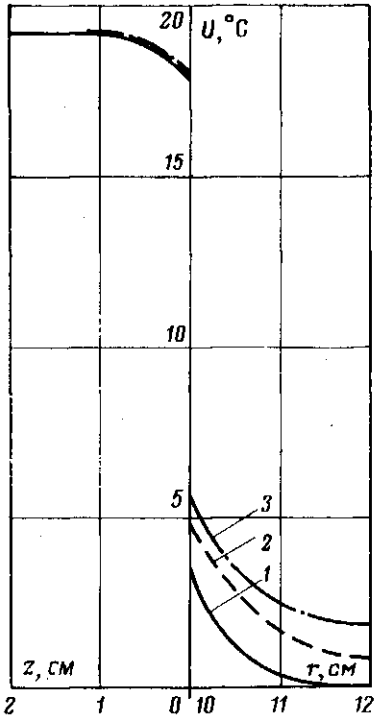

Рис. 3. Температурное поле при наличии теплового сопротивления (R_c=5·10⁻⁴ м²·град/Вт): *1* – t=3с; *2* – 10; *3* – 60

Таким образом, решение задачи (1)–(4), описывающей распределение температуры в цилиндрической тонкостенной тепловыделяющей оболочке с поперечным подкреплением, построено методом конечного интегрального преобразования с ядром, определенным на комплексе геометрически разнородных неидеально сопряженных областей. Аналогично могут быть решены нестационарные задачи теплопроводности для сопряжения типа «звезда» или «отрезок» с иным набором геометрических структур и числом зон сопряжения как для идеального, так и неидеального теплового контакта.

Балашихинское НПО криогенного машиностроения им. 40-летия Октября

Поступила в редакцию 3 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. В. Лыков*. В сб. Проблемы тепломассопереноса, «Наука и техника», Минск, 1976.
2. *В. М. Попов*. Теплообмен в зоне контакта разъемных и неразъемных соединений. «Энергия», 1971.
3. *К. В. Лакуста, М. П. Ленюк*. ИФЖ, *31*, № 4, 1976.
4. *П. С. Самойленко*. ИФЖ, *32*, № 1, 1977.
5. *А. М. Макаров, В. Р. Романовский*. ТВТ, *15*, № 1, 1977.
6. *А. М. Макаров, В. Р. Романовский*. ИФЖ, *32*, № 6, 1977.