Доклады Академии наук СССР
1960. Том 131, № 6

ГИДРОМЕХАНИКА

В. С. ИМШЕННИК

ИЗОТЕРМИЧЕСКИЙ РАЗЛЕТ ГАЗОВОГО ОБЛАКА

(Представлено академиком А. Д. Сахаровым 25 XII 1959)

1. Для ряда астрофизических проблем представляет интерес задача о разлете газового облака, происходящем в условиях внешнего облучения. Закон сохранения энергии в облаке при этом не выполняется, и энтропия частиц газа возрастает по мере увеличения степени расширения. Вообще говоря, разлет такого рода носит сложный характер, но существует простой предельный случай неизэнтропического разлета — изотермический разлет. При этом полагается, что температура газа не зависит от пространственной координаты, а зависит произвольным образом от времени, т. е. $\theta = \theta(t)$. Зависимость температуры газового облака от времени определяется характером внешнего облучения. Изотермическое приближение уже использовалось ранее для получения некоторых точных решений одномерных газодинамических уравнений [1-4].

В данной заметке мы покажем, что в изотермическом случае существует асимптотическое решение для задачи разлета газового облака. Силы собственного тяготения и магнитное поле не будут учитываться.

2. Если ввести безразмерные переменные $\xi = x/l$, $\tau = c_0\, t/l$, $u = v/c_0$, $\delta = \rho/\rho_0$, где l — характерный размер облака, ρ — начальная плотность газа в нем, c_0— изотермическая скорость звука $c_0 = \sqrt{A\theta}$ (A — газовая постоянная в уравнении состояния $p = A\rho\theta$), и искать частное решение одномерных газодинамических уравнений с $\theta = \mathrm{const}$ в виде, предложенном А. Д. Сахаровым *:

$$\delta = \frac{B}{[\xi_0(\tau)]^\nu}\,\Phi\left[\frac{\xi}{\xi_0(\tau)}\right], \qquad u = u_0(\tau)\, V\left[\frac{\xi}{\xi_0(\tau)}\right], \tag{1}$$

$\left(B = \dfrac{1}{\nu\int\limits_0^\infty \Phi(\eta)\,\eta^{\nu-1}d\eta}\right.$; полная масса облака, например, в плоском случае $\left.M = 2\rho_0 l\right)$, то получим:

$$\delta = \frac{1}{[\xi_0(\tau)]^\nu}\exp\left\{-\left[\frac{\nu\Gamma(\nu/2)}{2}\right]^{2/\nu}\left[\frac{\xi}{\xi_0(\tau)}\right]^2\right\},$$

$$u = \left[2^{\nu-1}\nu\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]^{1/\nu}\sqrt{\ln\xi_0(\tau)}\,\frac{\xi}{\xi_0(\tau)}. \tag{2}$$

Функция $\xi_0(\tau)$ в (2) определяется из уравнения

$$\int\limits_1^{\xi_0(\tau)}\frac{d\xi_0}{\sqrt{\ln\xi_0}} = \left[2^{\nu-1}\nu\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]^{1/\nu}\tau. \tag{3}$$

* Частное сообщение.

Параметр ν равен, соответственно, 1, 2, 3 для случаев плоской, цилиндрической и сферической симметрии.

Решению (2) — (3) соответствуют начальные условия

$$\tau = 0, \quad u = 0, \quad \delta = \exp\left\{-\left[\frac{\nu\Gamma(\nu/2)}{2}\right]^{2/\nu}\xi^2\right\}. \tag{4}$$

Решение типа (2), (3) уже известно в литературе ([1-3]). В решении (2), (3) скорость u линейно зависит от пространственной координаты ξ. Такого рода решение для изэнтропических движений газа было получено и исследовано еще в работах Л. И. Седова и др. (см., например, ([5])). В изотермическом случае возможность такого решения была ранее отмечена в ([1]); там же исследован общий вид уравнений состояния, допускающих подобное решение. Решение (2), (3) для цилиндрического случая приводится в работах ([2,3]). Можно убедиться, что переход к температуре газового облака, зависящей от времени, не изменяет формулы (2), но приводит для определения функции $\xi_0(\tau)$ к иному уравнению, нежели (3). Для цилиндрического случая это следует из ([2,3]). Решение (2), (3) весьма просто обобщается на случай более общего уравнения состояния, допускаемого по ([1]), чем уравнение состояния идеального газа.

3. Важной особенностью решения (2), (3) является его асимптотический характер для любого начального распределения плотности и скорости движения в газе. Известно, что при изэнтропическом разлете газа асимптотического решения не существует ([5,6]). В случае изотермического разлета непрерывное поступление в газ дополнительных порций энергии за счет энергии внешнего излучения в конце концов приводит к тому, что начальная энергия газового облака становится меньше кинетической энергии разлета. На этой стадии разлета естественно забываются начальные условия.

Для разлета плоского слоя газа можно непосредственно показать асимптотический характер решения (2), (3), используя решение изотермического разлета для начального распределения плотности газа в виде «полочки». Это решение можно найти путем преобразования годографа ([6]), сведя систему газодинамических уравнений к уравнению типа телеграфного, для которого задача Коши решается с использованием известной функции Римана ([7]). Здесь мы приведем только результат решения:

$$\begin{aligned} z(\alpha, \beta) = e^{2\alpha}\int_{-2\alpha}^{0} e^{x} I_0(x)\,dx + e^{2\alpha}\int_{-2\beta}^{0} e^{y} I_0(y)\,dy - \\ -2\int_{\alpha}^{\beta} e^{2x} J_0\left(2\sqrt{-(x-\alpha)(x-\beta)}\right)dx + \end{aligned} \tag{5}$$

$$+\int_{\alpha}^{\beta}(\alpha-\beta)e^{2x}\left(\int_{-2x}^{0} e^{y} I_0(y)\,dy\right) J_1\left(2\sqrt{-(x-\alpha)(x-\beta)}\right)\frac{1}{\sqrt{-(x-\alpha)(x-\beta)}}\,dx,$$

причем

$$\begin{aligned} \xi = \frac{1}{2}e^{-\alpha-\beta}\left\{\left[(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}\right]\frac{\partial z}{\partial\alpha} + \left[(\alpha-\beta)+\frac{1}{2}\right]\frac{\partial z}{\partial\beta} - 2z(\alpha-\beta)\right\}, \\ t = \frac{1}{4}e^{-\alpha-\beta}\left(\frac{\partial z}{\partial\alpha} + \frac{\partial z}{\partial\beta} - 2z\right), \\ u = 2(\alpha-\beta), \qquad \ln\delta = 2(\alpha+\beta). \end{aligned} \tag{6}$$

В решении для начального распределения плотности газа в виде «полочки» получаются при $\tau \gg 1$ две области: область падающей изотермической волны разрежения и область отраженной от центра слоя волны. Решение для области отраженной волны приводится выше (5), (6), Простой вид это решение имеет в центре слоя, где $\alpha=\beta$. Из (5), (6) получаем

$$\sqrt{\frac{1}{\delta}}\, I_0\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{\delta}\right)=\tau, \quad \tau \gg 1. \tag{7}$$

Формула (7) также получена в ([6]) (стр. 168).

Докажем асимптотическое совпадение $\delta(\tau)$ из (7) с $\delta(0,\tau)$ из (2). Используя асимптотический вид функции Бесселя $I_0(x)=e^x/\sqrt{2\pi x}$, получим из (7)

$$\frac{1}{\delta}\frac{1}{\sqrt{-\ln\delta}}\simeq\sqrt{\pi\tau}. \tag{7'}$$

С другой стороны, при $\tau\to\infty$ и $\nu=1$ вместо (3) имеем

$$\frac{\xi_0(\tau)}{\sqrt{\ln\xi_0(\tau)}}\simeq\sqrt{\pi\tau}. \tag{3'}$$

При подстановке в (3') $\xi_0(\tau)=1/\delta(0,\tau)$ по (2), получаем полное совпадение (3') с (7').

Области падающей волны разрежения и отраженной от центра слоя волны разделяет слабый разрыв, распространяющийся по направлению движения газа со скоростью звука c_0. Координата ξ этого слабого разрыва, а также значения δ, u на нем имеют вид

$$\xi=\tau(2\ln\tau-1)+1, \quad \delta=\frac{1}{\tau^2}, \quad u=2\ln\tau. \tag{8}$$

В (8) $\xi=0$ соответствует центру слоя. Рассмотрим далее асимптотический вид (2) на этой границе, подставляя туда $\xi(\tau)$ из (8):

$$\delta=\frac{1}{\xi_0(\tau)}\exp\left\{-\frac{\pi}{4}\left[\frac{\tau(2\ln\tau-1)+1}{\xi_0(\tau)}\right]^3\right\}.$$

Воспользовавшись (3'), перейдем к пределу $\tau\to\infty$; получим:

$$\delta\simeq\frac{1}{\xi_0(\tau)}\exp\left[-\frac{\ln^2\tau}{\ln\xi_0(\tau)}\right]\simeq\frac{\pi\ln\xi_0(\tau)}{\xi_0^2(\tau)}\simeq\frac{1}{\tau^2},$$

т. е. на границе (8) асимптотически совпадают значения плотности газа в обоих решениях. Можно доказать совпадение и скоростей газа, которые в обоих решениях ведут себя асимптотически, как $u=\xi/\tau$. Из того, что решение изотермического разлета для «полочки» совпадает с решением (2), (3) в центре слоя и на границе (8), строго следует их асимптотическое совпадение во всей области отраженной волны. Характер установления асимптотического режима можно определить путем детального сравнения решения (2), (3) с решением (5), (6) во всей области отраженной волны. В области падающей волны разрежения не получается асимптотического совпадения обоих решений. Это видно из того, что в падающей волне разрежения профиль плотности газа в каждый момент времени $\tau\delta\sim e^{-\alpha\xi}$, тогда как в решении (2), (3) этот профиль $\delta\sim e^{-b\xi^2}$. Однако при $\tau\to\infty$ количество вещества в этой области становится пренебрежимо мало по сравнению с количеством вещества в области отраженной волны. Из (8) можно легко найти, что

$$\frac{M(\tau)}{M_0}=\frac{1}{\tau}, \quad \tau\gg 1,$$

где $M(\tau)/M_0$ — относительное количество вещества в области падающей волны.

Таким образом, область, носящая отпечаток начальных условий, при $\tau\to\infty$ исчезает, а область отраженной волны асимптотически совпадает с (2), (3).

Мы полагаем, что решение (2), (3) является также асимптотическим для любых начальных распределений плотности и скорости движения газа. Цилиндрический и сферический случаи, естественно, ничем не отличаются в этом отношении от плоского.

4. В заключение запишем критерий применимости формул изотермического разлета, учитывая лишь процессы так называемого истинного поглощения излучения в газе ([8]):

$$\frac{1}{\beta} > \frac{l}{\lambda} > \beta, \tag{9}$$

где

$$\beta = \frac{1}{\sigma c}\frac{\rho_0 c_0^3}{\theta}.$$

Температура газового облака θ связана с температурой излучающих поверхностей T при помощи фактора дилюции W ($\theta^4 = WT^4$ ([8])).

В ([9]) λ при $l/\lambda < 1$ определяется как средний пробег поглощения фотонов в разлетающемся облаке по спектру внешнего излучения, при $l/\lambda > 1$ λ — средний росселандов пробег поглащения излучения в облаке при плотности ρ_0 и температуре газа θ.

Критерий (9) получается из того простого соображения, что перепад температур между краем и центром облака должен быть мал. Это означает одновременно, что доля потока лучистой энергии, поглощаемая в разлетающемся облаке и превращающаяся в кинетическую энергию, должна быть мала по сравнению с проходящим через облако потоком лучистой энергии. Кинетическую энергию облака можно легко найти из (2), а проходящий через облако поток лучистой энергии оценивается из элементарных соображений по отдельности для двух предельных случаев: оптически толстого и оптически тонкого облаков. В случае оптически тонкого облака при выводе (9) необходимо также сформулировать дополнительное условие, обеспечивающее фактическое поглощение доли лучистой энергии, равной кинетической энергии разлета облака.

Когда критерий (9) не выполняется, формулы изотермического разлета могут быть полезными в том отношении, что они определяют наискорейший разлет при данных начальной плотности газа в облаке ρ_0 и начальной температуре θ.

За полезные обсуждения вопросов, излагаемых в данной заметке, искренне благодарю А. Д. Сахарова, Ю. А. Романова и И. Н. Михайлова.

Поступило
5 III 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Г. Куликовский, ДАН, **120**, № 3 (1958). [2] В. П. Коробейников, Е. В. Рязанов, ДАН, **124**, № 1 (1959). [3] Е. В. Рязанов, ДАН, **126**, № 6 (1959). [4] Е. В. Рязанов, ДАН, **126**, № 5 (1959). [4] Л. И. Седов, Методы подсбия и размерности в механике, 4-е изд., 1957, [9] К. П. Станюкович, Неустановившиеся движения сплошной среды, 1955. [7] Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, **2**, 1951. [8] В. А. Амбарцумян и др., Теоретическая астрофизика, 1952.