



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Сардыко, Решение обыкновенных дифференциальных уравнений
методом матричных преобразований,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 3, 419–422

<https://www.mathnet.ru/de11251>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

26 апреля 2025 г., 23:23:50



УДК 517.923

РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ МАТРИЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

© 2005 г. В. И. Сардыко

Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение

$$e' = ue, \quad (') = d/dx, \quad (1)$$

где

$$e' = (e'_1, e'_2)^T, \quad u = (u_{ij}(x))_{i,j=1}^2, \quad e = (e_1, e_2)^T,$$

а t означает операцию транспонирования. По теореме существования и единственности [1, 2] это уравнение имеет единственное решение

$$e(x) = U(x, x_0)e(x_0), \quad (2)$$

где матрицант (матрица эволюции) $U(x, x_0)$ [2, 3] вычисляется по формуле

$$U(x, x_0) = e^{(\int u)} \equiv \sum_{m=0}^{\infty} (\int u)^m; \quad (3)$$

здесь $\int u = \int_{x_0}^x u(t) dt$, $(\int u)^m = \int u (\int u)^{m-1}$.

1. Положим сначала в матрице u диагональные элементы $u_{11} = u_{22} = 0$. Прямое вычисление матрицанта (3) приводит к результату

$$U = \left[1 + \begin{pmatrix} 0 & \int u_{12} \\ \int u_{21} & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} e^{(\int u_{12}/u_{21})} & 0 \\ 0 & e^{(\int u_{21}/u_{12})} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где

$$U_{11,22} = \int_{x_0}^x dt_{2n} u_{12,21}(t_{2n}) \int_{x_0}^{t_{2n}} dt_{2n-1} u_{21,12}(t_{2n-1}) \dots \int_{x_0}^{t_3} dt_2 u_{12,21}(t_2) \int_{x_0}^{t_2} dt_1 u_{21,12}(t_1), \quad (5)$$

$$U_{12,21} = \int_{x_0}^x dt_{2n+1} u_{21,12}(t_{2n+1}) \times$$

$$\times \int_{x_0}^{t_{2n+1}} dt_{2n} u_{12,21}(t_{2n}) \int_{x_0}^{t_{2n}} dt_{2n-1} u_{21,12}(t_{2n-1}) \dots \int_{x_0}^{t_3} dt_2 u_{12,21}(t_2) \int_{x_0}^{t_2} dt_1 u_{21,12}(t_1), \quad (6)$$

В теории матриц эффективным методом исследования является использование базиса собственных векторов [2–5]. Переход к базису собственных векторов можно осуществить с помощью преобразования

$$e = SE, \quad (7)$$

в силу которого уравнение (1) принимает вид $E' = vE$, где $E' = (E'_1, E'_2)^T$, $v = (v_{ij}(x))_{i,j=1}^2$, $E = (E_1, E_2)^T$. При этом

$$v = S^{-1}(uS - S'). \quad (8)$$

Двумерную матрицу S возьмем в виде

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где столбцы матрицы (9) пропорциональны собственным векторам матрицанта U . В силу (9) матрица (8) принимает вид

$$v = (y_1 - y_2)^{-1} \begin{pmatrix} -y_2 u_{12} y_1 + u_{21} - y_1' & -y_2^2 u_{12} + u_{21} - y_2' \\ y_1^2 u_{12} - u_{21} + y_1' & y_1 u_{12} y_2 - u_{21} + y_2' \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Собственные значения матрицы U , т.е. корни характеристического уравнения

$$|U - \lambda I| = 0, \quad (11)$$

где I – единичная матрица, имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(U_{11} + U_{22} \pm ((U_{11} - U_{22})^2 + 4U_{12}U_{21})^{1/2}). \quad (12)$$

Матрица U имеет различные собственные значения при условии, что дискриминант характеристического уравнения (11), а именно

$$(U_{22} - U_{11})^2 + 4U_{12}u_{21} \equiv (\text{sp } U)^2 - 4 \det U \neq 0. \quad (13)$$

В силу (12) и (13) собственные векторы матрицы U можно принять в виде $(1, y_1)^T$, $(1, y_2)^T$, где $y_{1,2}$ находятся по любой из следующих формул:

$$y_{1,2} = \frac{1}{2U_{12}}[U_{22} - U_{11} \pm ((U_{22} - U_{11})^2 + 4U_{12}U_{21})^{1/2}], \quad (14)$$

$$y_{1,2} = 2U_{21}[U_{11} - U_{22} \pm ((U_{11} - U_{22})^2 + 4U_{12}U_{21})^{1/2}]^{-1}, \quad (15)$$

U_{ij} вычисляются по формулам (5), (6).

Это решение было анонсировано в работе [6]. Приравняв к нулю недиагональные элементы матрицы v , получим специальное уравнение Риккати

$$y_{1,2}' = -y_{1,2}^2 u_{12} + u_{21}. \quad (16)$$

Матрицант $V = e^{(/v)}$, где матрица v удовлетворяет (10), (16), легко вычисляется, так как v диагональна.

Таким образом, частные решения специального уравнения Риккати (16) могут быть найдены по формулам (14), (15).

Однако если два решения совпадают ($y_1 = y_2$), преобразование (7), (9) непригодно. Тогда необходимо применить другие преобразования [2–5], приводящие матрицу к каноническому виду, но на этом останавливаться не будем.

2. В случае произвольной матрицы u матрица v имеет вид

$$v = (y_1 - y_2)^{-1} \begin{pmatrix} -y_2(u_{11} + u_{12}y_1) + u_{21} + u_{22}y_1 - y_1' & -y_2(u_{11} + u_{12}y_2) + u_{21} + u_{22}y_2 - y_2' \\ y_1(u_{11} + u_{12}y_1) - u_{21} - u_{22}y_1 - y_1' & y_1(u_{11} + u_{12}y_2) - u_{21} - u_{22}y_2 - y_2' \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Приравняв к нулю недиагональные элементы матрицы (17), получим общее уравнение Риккати

$$y_{1,2}' = u_{12}y_{1,2}^2 + (u_{11} + u_{22})y_{1,2} + u_{21}. \quad (18)$$

Найдем представления решений для уравнений (1) и (18) и в этом случае. Применим к уравнению (1) диагональное преобразование

$$e = S_1 f, \quad (19)$$

где

$$f = (f_1, f_2)^T, \quad S_1 = \text{diag}(e^{(/u_{11})}, e^{(/u_{22})}).$$

Операторы $e^{(/u_{11,22})}$ являются матрицантами, которые в данном случае обращаются в матричные экспоненты. Уравнение (1) преобразуется в уравнение

$$f' = w f, \quad (20)$$

где матрица w косоугольна:

$$w = s_1^{-1}(uS_1 - S_1') = \begin{pmatrix} 0 & w_{12} \\ w_{21} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-(/u_{11})}u_{12}e^{(/u_{22})} \\ e^{-(/u_{22})}u_{21}e^{(/u_{11})} & 0 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Решение уравнения (20) можно представить в виде

$$f(x) = W(x, x_0)f(x_0), \quad (22)$$

где матрицант $W(x, x_0)$ для матрицы w представим в виде

$$W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \equiv \left[1 + \begin{pmatrix} 0 & /w_{12} \\ /w_{21} & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} e^{(/w_{12}/w_{21})} & 0 \\ 0 & e^{(/w_{21}/w_{12})} \end{pmatrix}, \quad (23)$$

причем

$$W_{11,22}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \int_{x_0}^x dt_{2(k+1)} w_{12,21}(t_{2(k+1)}) \int_{x_0}^x dt_{2k} w_{21,12}(t_{2(k+1)}) \times \\ \times \prod_{k=1}^{n-1} \int_{x_0}^{t_{2k+1}} dt_{2k} w_{12,21}(t_{2k}) \int_{x_0}^{t_{2k}} dt_{2k-1} w_{21,12}(t_{2k-1}) + 1, \quad (24)$$

$$W_{12,21}(x) = \int_{x_0}^x dt w_{12,21}(t) W_{22,11}(t). \quad (25)$$

Следует отметить, что элементы W_{ij} не равны $e^{(/w_{12}/w_{21})}$, $/w_{12}e^{(/w_{21}/w_{12})}$, $/w_{21}e^{(/w_{12}/w_{21})}$, $e^{(/w_{21}/w_{12})}$. Эти экспоненты являются мажорирующими функциями для скалярных матрицантных рядов (24), (25). Суммы этих рядов не выражаются через элементарные функции. Но они выражаются сходящимися рядами от мультипликативных интегралов.

Возвратившись опять к переменной e , в силу (19) и (22) получим следующее выражение для $U(x, x_0)$:

$$U(x, x_0) = S_1(x, x_0)W(x, x_0)S_1^{-1}(x, x_0). \quad (26)$$

Формула (26) дает представление решения уравнения (1).

Для нахождения решения уравнения (18) преобразуем его в специальное уравнение Риккати. Это можно сделать, например, следующим образом. Преобразуем матричное уравнение (20) к диагональному виду подстановкой

$$f = \sigma F, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix}, \quad z_1 \neq z_2,$$

где матрица σ состоит из собственных векторов матрицанта W . Имеем последовательно

$$F' = \omega F, \quad \omega = \sigma^{-1}(w\sigma - \sigma'),$$

$$\omega = (z_1 - z_2)^{-1} \begin{pmatrix} -z_2 w_{12} z_1 + w_{21} - z_1' & -z_2^2 w_{12} + w_{21} - z_2' \\ z_1^2 w_{12} - w_{21} + z_1' & z_1 w_{12} z_2 - w_{21} + z_2' \end{pmatrix}.$$

Матрица ω становится диагональной, если $z_{1,2}$ удовлетворяют специальному уравнению Риккати

$$z'_{1,2} = -z_{1,2}^2 w_{12} + w_{21}. \quad (27)$$

Частные решения уравнения (27) можно представить любой из формул (см. для сравнения (14), (15))

$$z_{1,2} = \frac{1}{2W_{12}} [W_{22} - W_{11} \pm ((W_{22} - W_{11})^2 + 4W_{12}W_{21})^{1/2}], \quad (28)$$

$$z_{1,2} = 2W_{21} [W_{11} - W_{22} \pm ((W_{11} - W_{22})^2 + 4W_{12}W_{21})^{1/2}]^{-1},$$

где W_{ij} удовлетворяют формулам (24), (25). Так как матрицы $U(x, x_0)$ и $W(x, x_0)$ подобны и, следовательно, характеристические уравнения $|U - \lambda_{1,2}I| = 0$, $|W - \lambda_{1,2}I| = 0$ совпадают, то решения общего уравнения Риккати (18) можно представить в виде $y_{1,2} = e^{/u_{22}} z_{1,2} e^{-/u_{11}}$, где $z_{1,2}$ находятся по любой из формул (28).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1976.
2. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 1988.
3. *Лаппо-Данилевский И.А.* Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1953.
4. *Еругин Н.П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск, 1979.
5. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М., 1969.
6. *Сардыко В.И.* // VIII Бел. мат. конф.: Тез. докл. Ч. 1. 19–24 июля 2000 г. С. 153.

г. Минск

Поступила в редакцию
03.01.2003 г.