Дискретная математика

том 2 выпуск 2 * 1990

УДК 519.2

НЕКОТОРЫЕ УСЛОВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ГРАФОВ

Ш. М. Агаджанян, Г. И. Ивченко

Предлагается общий подход к исследованию условных распределений количественных характеристик случайного графа при условии, что граф имеет некоторую заданную структуру. С помощью этого подхода изучается асимптотическое поведение условных распределений чисел компонент фиксированного объема в случайном графе Γ_{np} при $n \to \infty$ и $p = p(n)$.

§ 1. Введение

При асимптотическом исследовании структуры случайных графов обычно ограничиваются рассмотрением таких целочисленных случайных характеристик, распределение которых с ростом числа вершин графа не вырождается в нуле. В то же время могут представлять интерес и «редкие» события в случайном графе. Как и в других областях теории вероятностей (например, в предельных теоремах для критических ветвящихся процессов), для выяснения структуры случайного графа в таких «нетипичных» реализациях можно изучать условные распределения соответствующих характеристик при условии, что произошло «редкое» событие.

Такой подход развивается в данной работе на примере исследования классического случайного графа Γ_{np} (неориентированный граф без параллельных ребер и петель с n занумерованными вершинами, в котором ребро между каждой парой вершин существует с вероятностью $p = 1 - q$ независимо от существования остальных ребер). Именно, обозначим через μ_{nr} число компонент объема r в графе Γ_{np}, и пусть $\mathcal{F}$ означает некоторый тип связного графа (дерево, цикл и т. д.). Запись $\Gamma_{np} \in \mathcal{F}$ будет в дальнейшем означать, что все компоненты связности графа Γ_{np} имеют тип $\mathcal{F}$ (будем в этом случае говорить также, что граф имеет структуру $\mathcal{F}$). Мы будем интересоваться условным распределением $\mathcal{L}(\mu_{nr} \mid \Gamma_{np} \in \mathcal{F}) \equiv \mathcal{L}(\mu_{nr}^{\mathcal{F}})$ и исследовать его асимптотическое поведение при $n \to \infty$ и $p = p(n)$ для следующих типов связных графов $\mathcal{F}$: деревьев (T), циклов (Z), графов с единственным циклом (H), а также их парных сочетаний, например, $\mathcal{F} = (T, H)$ и т. д. Обозначим

$$a_n^{\mathcal{F}} = \mathsf{P}(\Gamma_{np} \in \mathcal{F}), \qquad b_n^{\mathcal{F}} = \mathsf{P}(\Gamma_{np} \text{ связен и } \Gamma_{np} \in \mathcal{F}).$$

Если $a_n^{\mathcal{F}} \to 1$ при $n \to \infty$, т. е. структура $\mathcal{F}$ является асимптотически «типичной» для графа Γ_{np}, то асимптотические распределения случайных величин (с. в.) $\mu_{nr}^{\mathcal{F}}$ и μ_{nr} совпадают. Изучению структуры «типичных» реализаций графа Γ_{np} посвящено большое число работ (достаточно полный обзор соответствующих результатов можно найти в [1]). В частности, известно,

© Ш. М. Агаджанян, Г. И. Ивченко, 1990

что если $p=y/n$, то при $y=O(1)$ граф Γ_{np} с вероятностью, близкой к 1 при $n\to\infty$, будет не связен. При этом значение $y=1$ является критическим в том смысле, что при $y<1$ и $y>1$ асимптотическое строение графа существенно различается. Например, при $y<1$ он будет иметь асимптотически тип $\mathcal{F}=(T, H)$, т. е. будет представлять собой объединение деревьев и компонент с одним циклом. Таким образом, если $y<1$, то $\mathcal{L}(\mu_{nr}^{T,H})\sim\mathcal{L}(\mu_{nr})$. Нашей основной задачей будет исследование асимптотического поведения распределений $\mathcal{L}(\mu_{nr}^{\mathcal{F}})$ для «нетипичных» структур $\mathcal{F}$ при $p=y/n$, $y=O(1)$.

§ 2. Точные формулы и производящие функции

Пусть $N(k_1, \ldots, k_n)$ есть число разбиений множества вершин на непересекающиеся подмножества, содержащих k_j подмножеств объема j, $k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n$. Тогда

$$N(k_1, \ldots, k_n)=\frac{n!}{\prod\limits_{j=1}^{n} k_j!\,(j!)^{k_j}},$$

и совместный закон распределения с. в. $\mu_{nj}^{\mathcal{F}}$ имеет, очевидно, вид

$$\mathsf{P}(\mu_{nj}^{\mathcal{F}}=k_j,\ j=1, \ldots, n)=N(k_1, \ldots, k_n)\,q^{\binom{n}{2}-\sum\limits_{j=1}^{n}\binom{j}{2}k_j}\prod_{j=1}^{n}(b_j^{\mathcal{F}})^{k_j}/a_n^{\mathcal{F}}=$$

$$=\frac{n!}{a_n^{\mathcal{F}}\,q^{-\binom{n}{2}}}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{k_j!}\left(\frac{1}{j!}\,b_j^{\mathcal{F}}\,q^{-\binom{j}{2}}\right)^{k_j}. \qquad (1)$$

Так как

$$\exp\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{z_j v^j}{j!}\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}v^n\sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{k_j!}\left(\frac{z_j}{j!}\right)^{k_j},$$

то из (1), положив $a_0^{\mathcal{F}}=1$, $b_0^{\mathcal{F}}=0$, получим равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{\mathcal{F}}q^{-\binom{n}{2}}\frac{v^n}{n!}\sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}\mathsf{P}(\mu_{nj}^{\mathcal{F}}=k_j,\ j=1, \ldots, n)\prod_{j=1}^{n}x_j^{k_j}=$$

$$=\exp\left\{\sum_{j=0}^{\infty}b_j^{\mathcal{F}}q^{-\binom{j}{2}}\frac{x_j v^j}{j!}\right\}. \qquad (2)$$

Из (2), придавая переменным x_j специфические значения, можно получать производящие функции для различных конкретных характеристик графа Γ_{np} при условии, что $\Gamma_{np}\in\mathcal{F}$.

Обозначим

$$A^{\mathcal{F}}(v)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{\mathcal{F}}q^{-\binom{n}{2}}\frac{v^n}{n!},\qquad B^{\mathcal{F}}(v)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{\mathcal{F}}q^{-\binom{n}{2}}\frac{v^n}{n!}.$$

Тогда из (2) при $x_j=1$ $(j=1, 2, \ldots)$ находим, что

$$A^{\mathcal{F}}(v)=\exp\{B^{\mathcal{F}}(v)\}.$$

Это соотношение позволяет выразить вероятность $a_n^{\mathcal{F}}$ через контурный интеграл от функции $\exp\{B^{\mathcal{F}}(v)\}$ и применить метод перевала для исследования асимптотики $a_n^{\mathcal{F}}$ при $n\to\infty$.

Если

$$\varphi_{nr}^{\mathcal{F}}(x)=\sum_{m}x^m\mathsf{P}(\mu_{nr}^{\mathcal{F}}=m),$$

то из (2), положив $x_r = x$, $x_j = 1$, $j \neq r$, получим, что

$$\Phi_r^{\mathcal{F}}(x;\ v) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{nr}^{\mathcal{F}}(x)\, a_n^{\mathcal{F}}\, q^{-\binom{n}{2}} \frac{v^n}{n!} = \exp\left\{(x-1)\, b_r^{\mathcal{F}}\, q^{-\binom{r}{2}} \frac{v^r}{r!} + B^{\mathcal{F}}(v)\right\}. \quad (3)$$

Вообще, если

$$\varphi_{nr_1\ldots r_k}^{\mathcal{F}}(x_1,\ \ldots,\ x_k) = \sum_{m_1,\ \ldots,\ m_k} \mathsf{P}\left(\mu_{nr_j}^{\mathcal{F}} = m_j,\ j = 1,\ \ldots,\ k\right) \prod_{j=1}^{k} x_j^{m_j},$$

то

$$\Phi_{r_1\ldots r_k}^{\mathcal{F}}(x_1,\ \ldots,\ x_k;\ v) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{nr_1\ldots r_k}^{\mathcal{F}}(x_1,\ \ldots,\ x_k)\, a_n^{\mathcal{F}}\, q^{-\binom{n}{2}} \frac{v^n}{n!} =$$

$$= \exp\left\{\sum_{j=1}^{k} (x_j - 1)\, b_{r_j}^{\mathcal{F}}\, q^{-\binom{r_j}{2}} \frac{v^{r_j}}{r_j!} + B^{\mathcal{F}}(v)\right\}. \quad (4)$$

Для изучения общего числа компонент $\mu_n^{\mathcal{F}} = \sum_{r=1}^{n} \mu_{nr}^{\mathcal{F}}$ следует ввести производящую функцию

$$\varphi_n^{\mathcal{F}}(x) = \sum_m x^m \mathsf{P}\left(\mu_n^{\mathcal{F}} = m\right),$$

и тогда, положив в (2) $x_j = x$, $j = 1,\ 2,\ \ldots$, получим соотношение

$$\Phi^{\mathcal{F}}(x;\ v) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{\mathcal{F}}(x)\, a_n^{\mathcal{F}}\, q^{-\binom{n}{2}} \frac{v^n}{n!} = \exp\left\{x B^{\mathcal{F}}(v)\right\}. \quad (5)$$

Поскольку для вероятности $b_n^{\mathcal{F}}$ имеет место представление

$$b_n^{\mathcal{F}} = \sum_{l=n-1}^{\binom{n}{2}} C_{nl}^{\mathcal{F}} p^l q^{\binom{n}{2}-l}, \quad (6)$$

где $C_{nl}^{\mathcal{F}}$ — число графов типа $\mathcal{F}$ с n вершинами и l ребрами, то производящие функции (3)—(5) выражаются через числа $C_{nl}^{\mathcal{F}}$, и если для этих чисел имеется явное выражение, то формулы (3)—(5) с применением формулы Коши и метода перевала дают возможность изучать асимптотическое (при $n \to \infty$) поведение с. в. $\mu_{nr}^{\mathcal{F}}$ и $\mu_n^{\mathcal{F}}$.

Пример 1. Пусть $\mathcal{F} = T$. Тогда по формуле Кэли для числа деревьев с n вершинами $C_{n,\,n-1}^{T} = n^{n-2}$ и по формуле (6) $b_n^T = n^{n-2}(p/q)^{n-1} q^{\binom{n}{2}}$. Обозначая $\theta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} x^n$ функцию, являющуюся решением уравнения Пойа

$$\theta(x)\, e^{-\theta(x)} = x, \qquad |x| \leqslant e^{-1},$$

и учитывая формулу Реньи [2]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-2}}{n!} x^n = \theta(x) - \frac{1}{2}\theta^2(x),$$

находим, что в данном случае

$$B^T(v) = \frac{q}{p}\left[\theta\left(\frac{pv}{q}\right) - \frac{1}{2}\theta^2\left(\frac{pv}{q}\right)\right]. \quad (7)$$

Отсюда и из (3)

$$\Phi^T(x;\ v) = \exp\left\{(x-1)\frac{q}{p}\frac{r^{r-2}}{r!}\left(\frac{pv}{q}\right)^r + B^T(v)\right\}. \quad (8)$$

Аналогично конкретизируется в данном случае и совместная производящая функция (4).

Пример 2. Пусть $\mathcal{F}=Z$. В этом случае $C_{nn}^{Z}=\frac{(n-1)!}{2}$ при $n\geqslant 3$, $b_n^Z=\frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{p}{q}\right)^n q^{\binom{n}{2}}$ и

$$B^Z(v)=\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{pv}{q}\right)^n=-\frac{1}{2}\left[\ln\left(1-\frac{pv}{q}\right)+\frac{pv}{q}+\frac{1}{2}\left(\frac{pv}{q}\right)^2\right]. \tag{9}$$

Отсюда и из (3) находим, что

$$\Phi_r^Z(x;\ v)=\exp\left\{(x-1)\frac{1}{2r}\left(\frac{pv}{q}\right)^r+B^Z(v)\right\}. \tag{10}$$

Пример 3. Пусть $\mathcal{F}=H$—связные графы с единственным циклом. У таких графов числа вершин и ребер совпадают, и их число при $n\geqslant 3$ равно [3]

$$C_{nn}^H=A_n=\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}A_{nk},\qquad A_{nk}=kn^{n-k}\frac{(n-1)!}{(n-k)!};$$

при этом числа A_{nk} удовлетворяют соотношению [2]

$$\theta^k(x)=\sum_{n=k}^{\infty}A_{nk}\frac{x^n}{n!}.$$

Отсюда находим, что $b_n^H=A_n\left(\frac{p}{q}\right)^n q^{\binom{n}{2}}$ и

$$B^H(v)=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{A_n}{n!}\left(\frac{pv}{q}\right)^n=\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{A_{nk}}{n!}\left(\frac{pv}{q}\right)^n=$$
$$=-\frac{1}{2}\left[\ln\left(1-\theta\left(\frac{pv}{q}\right)\right)+\theta\left(\frac{pv}{q}\right)+\frac{1}{2}\theta^2\left(\frac{pv}{q}\right)\right]. \tag{11}$$

Наконец,

$$\Phi_r^H(x;\ v)=\exp\left\{(x-1)\frac{A_r}{r!}\left(\frac{pv}{q}\right)^r+B^H(v)\right\}. \tag{12}$$

Заметим в заключение, что если тип $\mathcal{F}$ «сложный», т. е. представляет собой объединение нескольких попарно несовместных типов $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots$: $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots)$, то $a_n^{\mathcal{F}}=\sum_i a_n^{\mathcal{F}_i}$, $b_n^{\mathcal{F}}=\sum_i b_n^{\mathcal{F}_i}$, и формула (3) принимает вид

$$\Phi_r^{\mathcal{F}}(x;\ v)=\prod_i\Phi_r^{\mathcal{F}_i}(x;\ v). \tag{13}$$

Пример 4. Пусть $\mathcal{F}=(T,\ H)$, тогда из (13) находим, что

$$\Phi_r^{T,\,H}(x;\ v)=\Phi_r^T(x;\ v)\,\Phi_r^H(x;\ v), \tag{14}$$

где $\Phi_r^T(x;\ v)$ дано в (8), а $\Phi_r^H(x;\ v)$—в (12).

§ 3. Асимптотический анализ

Как уже отмечалось выше, естественный путь асимптотического (при $n\to\infty$) анализа распределений характеристик типа $\mu_{nr}^{\mathcal{F}}$ состоит в использовании формулы Коши для записи их производящих (или характеристических) функций в виде контурного интеграла с последующим применением метода перевала. Здесь мы продемонстрируем эту методику на перечисленных выше примерах конкретизации структуры $\mathcal{F}$. Ниже мы будем предпо-

лагать выполняющимися условия

$$n \to \infty, \quad p = p(n) \to 0, \quad np/q = c = \text{const} > 0. \tag{15}$$

Рассмотрим сначала ситуацию, описанную в примере 1.

Теорема 1. *В асимптотике* (15) *распределение с. в.* μ_{nr}^T *для любого фиксированного* $r \geqslant 2$ *асимптотически нормально с параметрами* $n\lambda_r$ *и* $n\sigma_r^2$, *где при* $c < 1$

$$\lambda_r = \frac{r^{r-2}}{r!c}(ce^{-c})^r, \qquad \sigma_r^2 = \lambda_r - (1-c)\, r^2\lambda_r^2, \tag{16}$$

а при $c > 1$

$$\lambda_r = \sigma_r^2 = \frac{r^{r-2}}{r!c}e^{-r}. \tag{17}$$

Доказательство. Обозначим $\eta_{nr} = (\mu_{nr}^T - n\lambda_r)/\sqrt{n}\sigma_r$, и пусть $f_n(t)$ — ее характеристическая функция. Тогда по формуле Коши

$$f_n(t) = \frac{n!}{a_n^T} q^{\binom{n}{2}} e^{-it\sqrt{n}\lambda_r/\sigma_r} \frac{1}{2\pi i} \oint \Phi_r^T(x;\, v) \frac{dv}{v^{n+1}}, \tag{18}$$

где $x = e^{it/\sqrt{n}\sigma_r}$, вид функции Φ_r^T дается выражениями (7)—(8) и интегрирование ведется по любой окружности с центром в нуле и радиусом $|v| \leqslant q/(pe)$. Учитывая свойства функции $\theta(x)$ и произведя в (18) замену переменных по формуле $z = \theta(pv/q)$, в условиях (15), получим исходное для применения метода перевала представление

$$f_n(t) = \frac{n!}{a_n^T} q^{\binom{n}{2}} \left(\frac{p}{q}\right)^n e^{-it\sqrt{n}\lambda_r/\sigma_r} I_n(t), \tag{19}$$

где

$$I_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\rho \leqslant 1} \frac{1-z}{z} \exp\left\{n(x-1)\frac{r^{r-2}}{r!c}(ze^{-z})^r + n\psi(z)\right\} dz,$$

$$\psi(z) = z - \ln z + (z - z^2/2)/c.$$

Асимптотический анализ интеграла $I_n(t)$ проводится отдельно для случаев $c < 1$ и $c > 1$.

Пусть сначала $c < 1$. Поскольку $\psi'(c) = 0$, то путь интегрирования выбираем в виде $z = c + iu/\sqrt{n}$, $u \in \mathbf{R}^1$. В области влияния точки перевала

$$n(x-1)\frac{r^{r-2}}{r!c}(ze^{-z})^r = it\sqrt{n}\frac{\lambda_r}{\sigma_r} - \frac{t^2\lambda_r}{2\sigma_r^2} - \frac{(1-c)\, r\lambda_r}{c\sigma_r} tu + o(1),$$

$$n\psi(z) = n\left(1 + \frac{c}{2} - \ln c\right) - \frac{1-c}{2c^2}u^2 + o(1);$$

поэтому

$$I_n(t) \sim \frac{1-c}{c\sqrt{n}} \exp\left\{n\left(1 + \frac{c}{2} - \ln c\right) + it\sqrt{n}\frac{\lambda_r}{\sigma_r} - \frac{t^2\lambda_r}{2\sigma_r^2}\right\} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1-c}{2c^2}u^2 - \frac{(1-c)\, r\lambda_r}{c\sigma_r} tu\right\} du.$$

Здесь интеграл равен $\sqrt{2\pi c}\,(1-c)^{-1/2} \exp\{(1-c)(tr\lambda_r)^2/(2\sigma_r^2)\}$; поэтому окончательно с учетом обозначений (16) получаем, что

$$I_n(t) \sim \left(\frac{1-c}{2\pi n}\right)^{1/2} \exp\left\{n\left(1 + \frac{c}{2} - \ln c\right) + it\sqrt{n}\frac{\lambda_r}{\sigma_r} - \frac{t^2}{2}\right\}. \tag{20}$$

Подставив (20) в (19), применив формулу Стирлинга и вытекающее из (15) соотношение

$$q^{\binom{n}{2}} = \exp\left\{-\frac{nc}{2} + \frac{c}{2}\left(1 + \frac{c}{2}\right) + o(1)\right\}, \tag{21}$$

придем к представлению

$$f_n(t) \sim \frac{\sqrt{1-c}}{a_n^T} \exp\left\{\frac{c}{2}\left(1+\frac{c}{2}\right)-\frac{t^2}{2}\right\}. \tag{22}$$

Поскольку $f_n(0)=1$, то отсюда, в частности, находим асимптотику вероятности a_n^T того, что граф Γ_{np} будет состоять лишь из деревьев: в условиях (15) при $c<1$

$$a_n^T \sim \sqrt{1-c}\exp\left\{\frac{c}{2}\left(1+\frac{c}{2}\right)\right\}. \tag{23}$$

С учетом (23) соотношение (22) доказывает теорему при $c<1$.

Перейдем теперь к рассмотрению случая $c>1$. Отличие от предыдущего случая состоит здесь в выборе пути интегрирования: теперь мы его выберем состоящим из отрезка вертикальной прямой $z=1-\tau/\sqrt{n}$, $\operatorname{Re}\tau=1$, заключенного внутри единичного круга, и большой дуги единичной окружности. Основной вклад в значение интервала $I_n(t)$ при $n\to\infty$ вносит прямолинейный участок контура, при этом вблизи точки $z=1$

$$\frac{1-z}{z}=\frac{\tau}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{\tau}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

$$\exp\left\{n(x-1)\frac{r^{r-2}}{r!c}(ze^{-z})^r\right\}=\exp\{it\sqrt{n\lambda_r}-t^2/2\}\left(1-irt\tau^2\sqrt{\lambda_r/n}+O(1/n)\right),$$

$$e^{n\psi(z)}=\exp\left\{n\left(1+\frac{1}{2c}\right)+\frac{c-1}{2c}\tau^2\right\}\left(1+\frac{\tau^3}{3\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Отсюда получаем, что

$$I_n(t)\sim\exp\left\{it\sqrt{n\lambda_r}-\frac{t^2}{2}+n\left(1+\frac{1}{2c}\right)\right\}\times$$
$$\times\frac{1}{2n\pi i}\int\limits_{1-i\infty}^{1+i\infty}\left(\tau+\frac{\tau^2}{\sqrt{n}}-irt\tau^3\sqrt{\frac{\lambda_r}{n}}+\frac{\tau^4}{3\sqrt{n}}\right)e^{\frac{c-1}{2c}\tau^2}d\tau.$$

Так как при нечетных k

$$\int\limits_{1-i\infty}^{1+i\infty}\tau^k e^{\frac{c-1}{2c}\tau^2}d\tau=0,\quad \int\limits_{1-i\infty}^{1+i\infty}\left(\tau^2+\frac{\tau^4}{3}\right)e^{\frac{c-1}{2c}\tau^2}d\tau=i\sqrt{2\pi}c^{3/2}(c-1)^{-5/2},$$

то окончательно

$$I_n(t)\sim\frac{c^{3/2}(c-1)^{-5/2}}{\sqrt{2\pi}n^{3/2}}\exp\left\{it\sqrt{n\lambda_r}-\frac{t^2}{2}+n\left(1+\frac{1}{2c}\right)\right\}. \tag{24}$$

Подставив (24) в (19) и воспользовавшись формулой Стирлинга и соотношением (21), получим представление

$$f_n(t)\sim\frac{\exp\{n(\ln c+1/(2c)-c/2)+c(1+c/2)/2-t^2/2\}}{a_n^T nc(1-1/c)^{5/2}}, \tag{25}$$

как доказывающее утверждение теоремы, так одновременно дающее и асимптотику вероятности a_n^T при $c>1$:

$$a_n^T\sim\frac{\exp\{n(\ln c+1/(2c)-c/2)+c(1+c/2)/2\}}{nc(1-1/c)^{5/2}}. \tag{26}$$

Подчеркнем, что если при $c<1$ вероятность a_n^T имеет при $n\to\infty$ положительный предел (см. (23)), то, как следует из (26), при $c>1$ она экспоненциально убывает (значение $c=1$ — критическое в асимптотике (15) для графа Γ_{np}).

Замечание. Используя соотношение (4), нетрудно также убедиться в том, что с. в. $\eta_{nr_1},\ldots,\eta_{nr_k}$ совместно асимптотически нормальны, при

этом при $c<1$ их асимптотические корреляции равны

$$\rho_{r_j r_s} = -(1-c)\, r_j r_s \lambda_{r_j} \lambda_{r_s} / (\sigma_{r_j} \sigma_{r_s}), \qquad j \neq s,$$

а при $c>1$ они асимптотически независимы.

Совершенно аналогично, отправляясь от соотношения (5), можно показать, что в асимптотике (15) общее число компонент μ_n^T асимптотически нормально $\mathcal{N}(n\lambda, n\sigma^2)$, где $\lambda = 1-c/2$, $\sigma^2 = c/2$ при $c<1$ и $\lambda = \sigma^2 = 1/(2c)$ при $c>1$ [4].

Следующее утверждение говорит о наличии в графе гигантских деревьев.

Теорема 2. *Если в* (15) *параметр* $c<1$, *то при* $r = r(n) = \left[\left(\ln n - \frac{5}{2}\ln\ln n\right)\Big/\alpha\right] + k$, *где* $\alpha = c - 1 - \ln c$, $[\cdot]$ — *целая часть и* $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, *распределение с. в.* μ_{nr}^T *аппроксимируется распределением Пуассона с параметром*

$$\lambda_1 = \lambda_1(n) = \frac{\alpha^{5/2} e^{-\alpha(k-\varepsilon_n)}}{c\sqrt{2\pi}},$$

где ε_n — *дробная часть числа* $\left(\ln n - \frac{5}{2}\ln\ln n\right)\Big/\alpha$; *если же* $c>1$, *то при* $r = [an^{2/5}]$, *где* $a>0$ — *произвольное действительное число, распределение с. в.* μ_{nr}^T *сходится к распределению Пуассона с параметром* $\lambda_2 = (ca^{5/2}\sqrt{2\pi})^{-1}$.

Доказательство теоремы повторяет ход рассуждений при доказательстве теоремы 1, если учесть, что при $c<1$

$$n\frac{r^{r-2}}{r!c}(ce^{-c})^r = \lambda_1 + o(1),$$

а при $c>1$

$$n\frac{r^{r-2}}{r!c}e^{-r} = \lambda_2 + o(1).$$

Рассмотрим теперь вопрос о циклах (ситуация примера 2). Здесь имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Если* $n\to\infty$, *то распределение с. в.* μ_{nr}^Z $(r \geqslant 3)$ *сходится к распределению Пуассона с параметром* $\lambda_r = 1/(2r)$.

Доказательство. Из (9), (10) находим, что

$$\varphi_{nr}^Z(x) = \frac{n!}{a_n^Z} q^{\binom{n}{2}} \left(\frac{p}{q}\right)^n J_n(x), \tag{27}$$

где

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\rho<1} \exp\left\{(x-1)\lambda_r z^r + \frac{1}{2}\left[-\ln(1-z) - z - \frac{z^2}{2}\right]\right\}\frac{dz}{z^{n+1}}.$$

Оценим интеграл $J_n(x)$. Для этого выберем в качестве контура интегрирования границу круга $|z|\leqslant a$, $a>1$, с радиальным разрезом $(1, a)$. Таким образом, интеграл складывается из трех частей: интеграла по окружности $|z|=a$, интеграла по верхнему берегу разреза $(1, a)$ и интеграла по нижнему берегу этого разреза.

Выберем для функции $-\ln(1-z)$ ту ветвь, которая положительна при $0<z<1$. Тогда при $z>1$ функция $-\ln(1-z)$ имеет вид $-\ln(z-1) - i\arg(1-z)$; поэтому на верхнем берегу разреза $-\ln(1-z) = -\ln(z-1) + i\pi$, а на нижнем берегу $-\ln(1-z) = -\ln(z-1) - i\pi$.

Далее, интеграл по окружности $|z|=a$ при больших a есть величина $O(a^{-n})$; поэтому

$$J_n(x) = \frac{e^{i\pi/2} - e^{-i\pi/2}}{2\pi i}\int\limits_1^a \frac{\exp\left\{(x-1)\lambda_r z^r - \frac{z}{2}\left(1+\frac{z}{2}\right)\right\}}{\sqrt{z-1}\, z^{n+1}}\, dz + O(a^{-n})$$

или, после замены $z=1+t/n$,

$$J_n(x)=\frac{e^{-3/4}}{\pi\sqrt{n}}\int\limits_0^{(a-1)n}\frac{\exp\left\{(x-1)\lambda_r\left(1+\frac{t}{n}\right)^r-\frac{t}{2n}\left(2+\frac{t}{2n}\right)\right\}}{\sqrt{t}\,(1+t/n)^{n+1}}\,dt+O(a^{-n})\sim$$

$$\sim\frac{e^{(x-1)\lambda_r-3/4}}{\pi\sqrt{n}}\int\limits_0^{\infty}t^{-1/2}e^{-t}\,dt=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}e^{(x-1)\lambda_r-3/4}. \qquad (28)$$

Из (27), (28) при $x=1$ и с учетом (21) получаем асимптотику чисел a_n^Z:

$$a_n^Z\sim\frac{n!e^{-3/4}}{\sqrt{\pi n}}q^{\binom{n}{2}}\left(\frac{p}{q}\right)^n\sim\sqrt{2}\exp\left\{-n\left(1+\frac{c}{2}-\ln c\right)+\frac{c}{2}\left(1+\frac{c}{2}\right)-\frac{3}{4}\right\},$$

из которой следует, что вероятность получения структуры $\mathcal{T}=Z$ в графе Γ_{np} в условиях (15) экспоненциально мала.

Объединяя полученные оценки, получаем равенство

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{nr}^Z(x)=e^{\lambda_r(x-1)},$$

что и требовалось.

Замечание. На этом же пути, используя соотношение (4), легко также получить, что для разных r с. в. μ_{nr}^Z асимптотически независимы.

Что касается общего числа компонент μ_n^Z, то, используя соотношение (5), аналогично теореме 3 можно показать, что эта с. в. при $n\to\infty$ асимптотически нормальна $\mathcal{N}\left(\frac{1}{2}\ln n,\ \frac{1}{2}\ln n\right)$ [4].

Аналогично, исходя из (11), (12), (4), (5), доказывается

Теорема 4. *При $n\to\infty$ распределение с. в. μ_{nr}^H $(r\geqslant 3)$ сходится к распределению Пуассона с параметром $\lambda_r=A_re^{-r}/r!$, где числа A_r определены в примере 3, при этом для разных r с. в. μ_{nr}^H асимптотически независимы; общее же число компонент μ_n^H асимптотически нормально* $\mathcal{N}\left(\frac{1}{4}\ln n,\frac{1}{4}\ln n\right)$.

В заключение отметим, что рассмотрение «сложных» структур типа указанных в примере 4 проводится по той же схеме. Так, основываясь на (14), аналогично доказательству теорем 1 и 2 можно убедиться в том, что асимптотически (в условиях этих теорем) с. в. $\mu_{nr}^{T,H}$ распределены так же, как и с. в. μ_{nr}^T.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степанов В. Е. Случайные графы//Вопросы кибернетики. Труды семинара по комбинаторной математике.— М., 1973.— С. 164—185.
2. Renyi A. Some remarks on the theory of trees//Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.— 1959.— N 4.— P. 73—85.
3. Renyi A. On connected graphs. I//Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.— 1959.—N 4.— P. 385—388.
4. Агаджанян Ш. М., Ивченко Г. И. Предельные распределения числа компонент случайного графа//Вероятностные процессы и их приложения.— МИЭМ.— 1985.— С. 76—83.

Статья поступила 17.08.89