

УДК 519.634

ПРЯМОЙ МЕТОД ПРОФИЛИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ФОРМ¹⁾

© 2012 г. Н. П. Исакова, А. А. Крайко, К. С. Пьянков

(111116 Москва, ул. Авиамоторная, 2, ЦИАМ им. П.И. Баранова)

e-mail: Alya_Kraiko@ciam.ru

Поступила в редакцию 17.05.2012 г.

Разработан прямой метод оптимизации широкого класса пространственных аэродинамических форм, основанный на аппроксимации искомой геометрии поверхностями Бернштейна–Безье. Тестирование метода на задаче профилирования оптимальной сверхзвуковой части осесимметричного сопла Лавалья максимальной тяги показало его высокую эффективность. Предложенный метод апробируется на задаче профилирования сверхзвуковой части пространственного сопла в плотной многосопловой компоновке. Помимо сверхзвуковых частей пространственных сопел с круглой формой критического сечения в работе рассматриваются сопла с варьируемой формой критического сечения. Полученные результаты демонстрируют возможности применения предложенного метода к различным задачам оптимизации пространственных конфигураций. Библ. 9. Фиг. 3. Табл. 1.

Ключевые слова: полиномы Бернштейна, поверхности Бернштейна–Безье, прямые методы оптимизации, пространственные сопла, многосопловая компоновка.

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматривается прямой метод профилирования широкого класса оптимальных пространственных форм, основанный на “удачной” аппроксимации искомой геометрии. Возможности предложенного метода демонстрируются на примере решения задачи оптимизации сверхзвуковой части сопла в плотной многосопловой компоновке. Несмотря на то что задача в приводимой постановке носит не столько прикладной, сколько методический характер, это ни в коем случае не умаляет ее ценности, так как именно при ее решении были выявлены основные “тонкие моменты” решения задач пространственного профилирования в целом, а полученные результаты, после сравнения с результатами других специалистов, позволили говорить об эффективности предложенного подхода.

Как было показано авторами ранее (см. [1]), удачной аппроксимацией в случае осесимметричной сверхзвуковой части сопла Лавалья максимальной тяги оказалась аппроксимация формы образующей кривыми Бернштейна–Безье (КББ). Задача оптимизации осесимметричной сверхзвуковой части сопла Лавалья заданной длины была выбрана в качестве тестовой, так как для нее существует точное решение, полученное методом контрольного контура (МКК) (см. [2], [3]). Сравнение результатов оптимизации, найденных предложенным прямым методом, с точным решением подтвердило высокую эффективность первого. При малом числе варьируемых параметров (2–3), что соответствует невысокому порядку аппроксимирующей КББ, предложенный метод позволял получать сопла, близкие к оптимальным, с точностью, не меньшей 0.03% по коэффициенту тяги (отношение тяги сопла к тяге идеального сопла с расчетным перепадом и равномерным выходом), в широком диапазоне длин. Необходимо отметить, что в [1] нет ссылки на более раннюю работу [4], в которой задача профилирования осесимметричной сверхзвуковой части сопла Лавалья с использованием аппроксимации искомого контура КББ также была рассмотрена в качестве тестового примера при апробации метода имитации отжига. Однако в [5] при решении задачи оптимизации пространственного эллиптического сопла авторы предпочли использовать бикубические сплайны для аппроксимации искомой поверхности сверхзвуковой части сопла. Следует отметить, что одним из главных выводов данной статьи, по мнению авторов, должен стать вывод о том, что эффективность прямой оптимизации, в первую очередь, будет зависеть от того, насколько корректно описана геометрия оптимизируемого объекта и выполнен

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 11-01-00668-а) и АВЦП РНП ВШ 2.1.1/12968.

расчет значения критерия. Именно эти два условия вместе с выбором подходящего для данной конкретной задачи прямого метода оптимизации являются необходимыми для получения за разумное время решения, близкого к оптимальному.

2. АППРОКСИМАЦИЯ ПОВЕРХНОСТЯМИ БЕРНШТЕЙНА–БЕЗЬЕ

При переходе от оптимизации двумерных объектов к пространственным использовалась аппроксимация уже не кривыми, а поверхностями Бернштейна–Безье (ПББ). ПББ порядка (n, m) задается массивом $[n + 1] \times [m + 1]$ контрольных точек \mathbf{P}_{ij} . Одномерный набор контрольных точек будем называть *контрольной ломаной* (КЛ), таким образом, можно сказать, что ПББ задается одномерным массивом КЛ. Точки поверхности задаются следующей параметризацией:

$$\mathbf{P}(s, t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(s) B_j^m(t) \mathbf{P}_{ij}, \quad s, t \in [0, 1], \quad (1)$$

где $B_i^n(s)$ – полиномы Бернштейна:

$$B_i^n(s) = \frac{n!}{i!(n-i)!} s^i (1-s)^{n-i}. \quad (2)$$

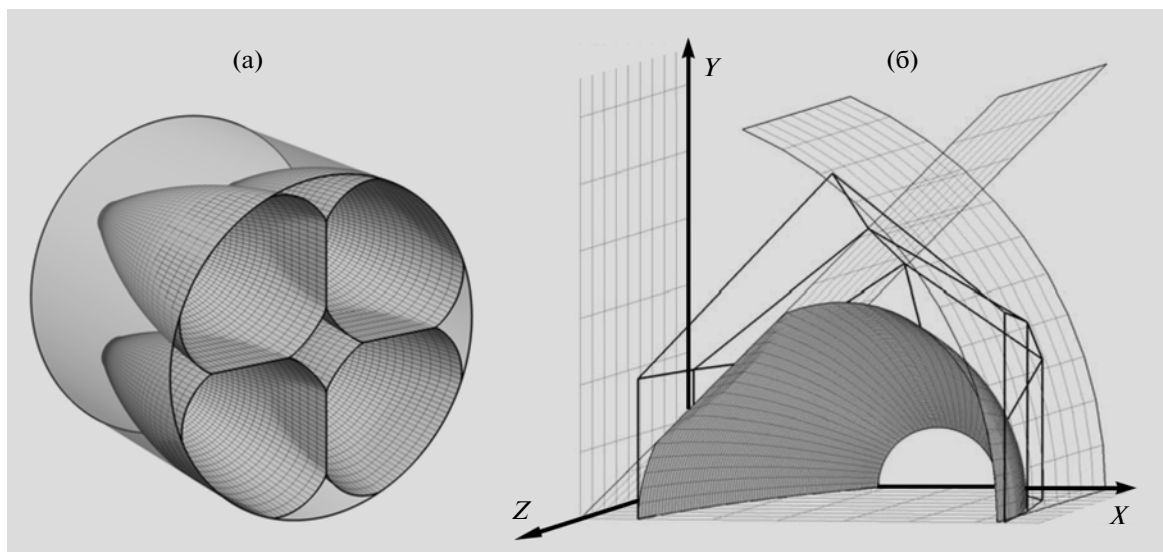
КББ есть частный случай ПББ порядка $(n, 0)$ с одной криволинейной координатой, например, $\mathbf{P}(s)$. Заметим, что в рассматриваемом случае расположение контрольных точек в направлениях i и j не является равнозначным: массив контрольных точек задается так, что каждая КЛ одного семейства, например, с фиксированным j , является плоской, и все варьирования координат вершин этой КЛ происходят только в соответствующей плоскости. КЛ лежат в плоскостях, перпендикулярных оси аппарата, а сечения этими плоскостями называются *контрольными сечениями*.

3. ОПТИМИЗАЦИЯ СВЕРХЗВУКОВОЙ ЧАСТИ СОПЛА В ПЛОТНОЙ МНОГОСОПЛОВОЙ КОМПОНОВКЕ

Задача профилирования пространственных сверхзвуковых частей сопел уже рассматривалась ранее разными группами исследователей. Выше уже отмечалась работа [5], посвященная профилированию эллиптического сопла. Здесь основной упор сделан на параллельные вычисления, способствующие уменьшению времени получения результата, однако вопрос о том, насколько полученное в процессе оптимизации решение близко к оптимальному, остается открытым. В конце статьи авторы отмечают, что в дальнейшем необходимо изучить влияние выбора способа аппроксимации геометрии на значение критерия, однако в более поздних публикациях тех же авторов, насколько нам известно, не содержится результатов исследований подобного рода. В [6] приведены результаты ученых из Германии по оптимизации сверхзвукового сопла ВРД с прямоугольной формой поперечного сечения камеры сгорания. Здесь применялась методика выделения линий тока: сопло строилось “вырезкой” из осесимметричного поля течения. В [5] и [6] вопрос об оптимальности полученных сопел должным образом не ставился и, соответственно, не освещался. Много ранее задачами профилирования пространственных сопел занимался коллектив в составе В.М. Борисова, М.П. Левина и И.Е. Михайлова, в результате чего был опубликован ряд работ, в том числе [7]. Здесь приведена сверхзвуковая часть пространственного сопла, вписанного в сектор кругового цилиндра, полученная прямым методом, использующим аппроксимацию поверхности сопла кубическим сплайном при заданных формах критического и выходного сечений. Полученное сопло сравнивается с осесимметричным соплом той же длины, вписанным в те же габариты, и показано, что спрофилированная пространственная сверхзвуковая часть выигрывает у осесимметричной, полученной с помощью МКК. Ниже приводится сравнение с результатом из [7].

3.1. Постановка задачи

В работе исследуется компоновка из N идентичных пространственных сопел, ограниченных цилиндрической поверхностью (фиг. 1а). В такой постановке цилиндрическая поверхность описывает, например, внутренний габарит пусковой установки (шахты). Каждое из N сопел располагается в ограничивающем секторе цилиндра с углом $\varphi = 2\pi/N$. При заданных внешних габаритах и дозвуковой части, начиная с некоторой степени расширения, оптимальная форма сопла перестает быть осесимметричной. Такую компоновку сопел будем называть *плотной*. При



Фиг. 1.

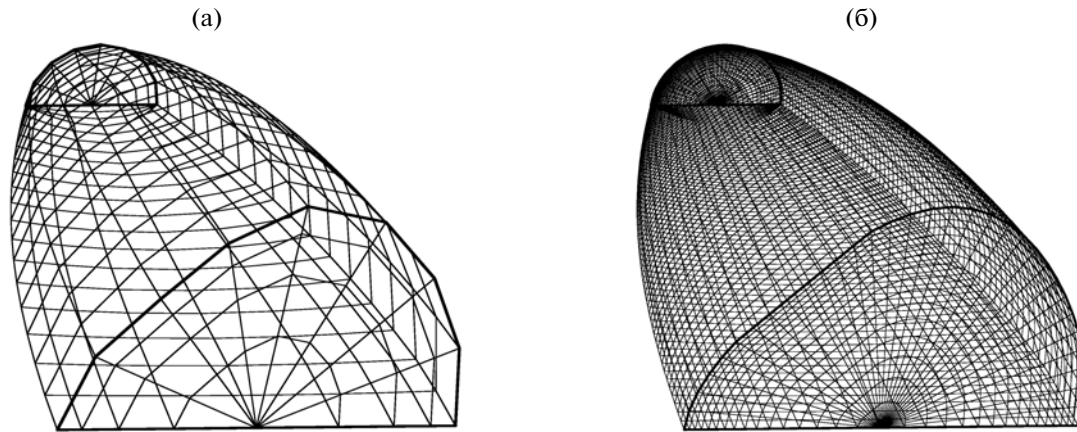
оптимизации заданными считаются: радиус шахты r_t (для удобства выбран за единицу длины $r_t \equiv 1$), число сопел (далее $N = 4$), суммарный массовый расход газа через сопла, максимальная длина сверхзвуковой части сопел L , полные параметры однородного осевого потока в критическом сечении p_0 ($p_0 \equiv 1$) и T_0 ($T_0 \equiv 1$), перепад давлений $\Pi = p_0/p_a$, где p_a – внешнее статическое давление, а критерием оптимизации является значение удельной тяги $R_{уд}$ (отношение тяги к расходу).

Поверхность образующей сверхзвуковой части сопла, удовлетворяющая всем наложенным габаритным ограничениям, получается в результате усечения аппроксимирующей ПББ, ограничивающей ее цилиндрической поверхностью сектора (фиг. 1б). Математическая постановка задачи оптимизации сводится к определению координат контрольных точек ПББ и построенной на ее основе форме сверхзвуковой части сопла (с учетом всех наложенных ограничений), имеющей максимальную удельную тягу.

Для решения поставленной задачи достаточно рассмотреть одно из сопел компоновки, которое, в свою очередь, имеет плоскость симметрии, поэтому в итоге задача решается для одной из “половинок” сверхзвуковой части сопла. Естественно предположить гладкую стыковку двух “половинок” одного сопла, таким образом, в каждом контрольном сечении КЛ подходит по нормали к плоскости симметрии. Последнее равносильно тому, что в каждой КЛ абсциссы крайних контрольных точек совпадают с абсциссами ближайших к ним точек, а ординаты крайних точек нулевые. Подобные допущения позволяют избавиться от лишних произвольных.

В отличие от двумерного, в пространственном случае при довольно сложной форме ограничивающей поверхности обойтись минимально возможным числом произвольных не удастся. Поэтому встает вопрос о выборе минимального эффективного числа варьируемых параметров. Выше уже были высказаны некоторые соображения о том, как можно убрать из рассмотрения лишние произвольные для конкретного случая оптимизации сверхзвуковой части сопла многосопловой компоновки. В качестве общих рекомендаций можно предложить располагать контрольные сечения равномерно по длине сопла. Кроме того, в каждом контрольном сечении не обязательно варьировать и абсциссы, и ординаты контрольных точек, можно ограничиться варьированием ординат всех внутренних контрольных точек и абсцисс крайних при равномерном распределении абсцисс внутренних точек. Может оказаться полезным добавление в качестве дополнительного произвола сдвига всего сопла вдоль оси X : сначала он может показаться избыточным, однако, как показал опыт нашей работы, его введение ускоряет сходимость.

Все вышеперечисленные соображения не дают четкого ответа на поставленный вопрос об универсальном минимальном эффективном наборе варьируемых параметров: в каждом конкретном случае такой набор будет своим. При выборе произвольных необходимо понимать, что результат оптимизации в значительной степени будет зависеть от того, насколько полно выбранный набор параметров будет описывать искомую геометрию, т.е. выбранный способ аппроксими-



Фиг. 2.

мации должен позволять получать как можно большее многообразие допустимых форм. При этом необходимо освобождаться от избыточных произволов, которые в задачах прямого профилирования могут оказаться не просто лишними, но и вредными в смысле сходимости процесса к решению. Проще говоря, при выборе большого количества произволов, помимо увеличения временных затрат на отдельную итерацию, может также увеличиться число итераций, необходимых для сходимости к решению с заданной точностью. Однако, с другой стороны, недостаточно полное описание геометрии оптимизируемого объекта приведет к тому, что заданная точность достигнута не будет. Разумеется, в данном случае можно говорить только о некоей гипотетической “точности”, так как точного решения задачи пространственного профилирования не существует, поэтому очень много будет зависеть от опыта исследователя и от его “чутья” при выборе произволов.

Исходя из сказанного, в рассматриваемом примере сопла компоновки для начала разумно выбрать минимальный набор варьируемых параметров (минимальный порядок ПББ по каждой криволинейной координате), а затем, по мере сходимости процесса оптимизации для заданного набора произволов, наращивать порядок аппроксимирующей поверхности до тех пор, пока результат не будет приемлемым для поставленных практических целей. Здесь стоит отметить, что КББ обладают удобным свойством: для кривой порядка n всегда можно построить кривую порядка $n + 1$, которая будет в точности совпадать с первой (это утверждение справедливо и для ПББ).

3.2. Результаты оптимизации

Результаты оптимизации, приводимые ниже, получены для следующих параметров: $P = 500$, $\varphi = \pi/2$, радиус критического сечения $r_{in} = 0.1442$, $L = 10 r_{in}$.

Для расчета критерия выполнялось численное интегрирование уравнений Эйлера методом установления, использовалась “распадная” расчетная схема (см. [8], [9]), обеспечивающая второй порядок аппроксимации по пространству на гладких решениях. В качестве метода оптимизации применялась авторская реализация метода исчерпывающего градиентного спуска.

Сделаем здесь еще одно важное замечание: в [1] продемонстрирована эффективность использования очень грубых сеток на начальных этапах оптимизации. Такой прием позволяет существенно сократить время получения решения. Однако необходимо понимать, что ошибки численного расчета критерия при таком подходе должны носить систематический характер. Таким образом, в рассматриваемом примере оптимизация начиналась на очень грубых сетках, а переход на новую, более тонкую сетку осуществлялся по мере сходимости процесса на текущей. Оптимальный контур должен иметь излом в точке стыковки профилируемого участка с заданным контуром дозвуковой части. В связи с этим, для улучшения качества счета, пространственная расчетная сетка в диаметральной сечении являлась сеткой O-типа, а в меридиональном – состояла из двух блоков: полярной сетки на начальном участке и пристыкованной H-сетки. Самая грубая сетка, с которой начинался процесс оптимизации, содержала 640 ($8 \times 4 \times 20$) ячеек (фиг. 2а), а самая тонкая сетка – 40960 ($32 \times 16 \times 80$) ячеек (фиг. 2б). При этом увеличение тяги,

Таблица

$\Delta R, \%$	ПББ _{3×8}	ПББ _{4×7} *	ВС-4	ВС-1
ПББ _{3×4}	-0.16	-0.23	0.44	1.81
ПББ _{3×5}	-0.08	-0.15	0.52	1.89
ПББ _{3×6}	-0.03	-0.1	0.57	1.95
ПББ _{3×8}	0	-0.07	0.60	1.97
КББ _{4(3D)}	-0.32	-0.4	0.28	1.65
ПББ _{4×7} *	0.07	0	0.68	2.05
ВС-4	-0.60	-0.68	0	1.35
ВС-1	-1.97	-2.05	-1.35	0

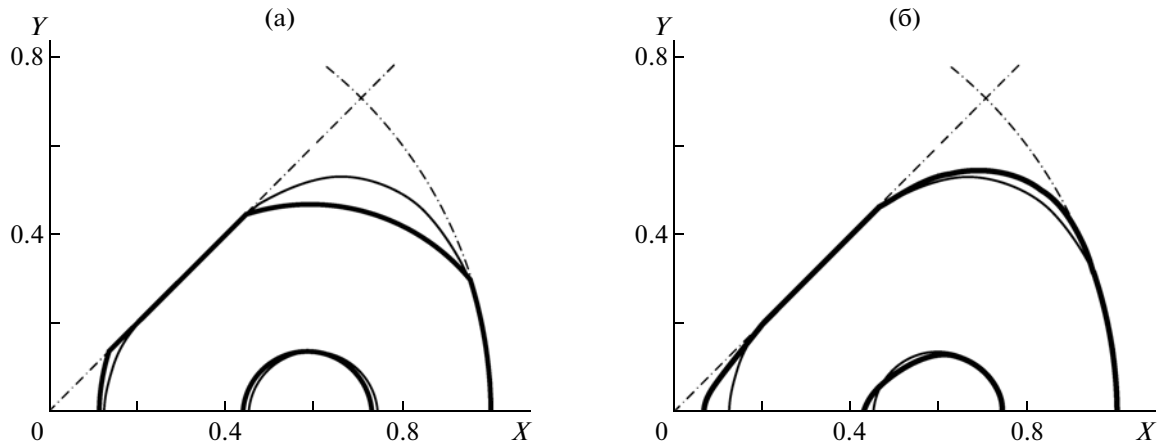
полученное за счет оптимизации на самой тонкой сетке, составляло менее 0.005% от тяги сопла, полученного после оптимизации на сетках меньшей мощности (вплоть до 13310 (22 × 11 × 55) ячеек). Общее число итераций (сумма итераций на всех сетках), необходимое для получения сопла, близкого к оптимальному, не превосходило 100 (под итерацией понимается 1 “исчерпывающий” шаг по градиенту). При этом основная часть итераций выполнялась на сетках, содержащих малое число ячеек, а дальнейшее итерирование на тонких сетках уже не приводило к существенному изменению формы сопла. Общее время процесса оптимизации в рассмотренных случаях составляло от 5 до 15 часов.

Первым исследовалось влияние числа контрольных точек ПББ на значение удельной тяги сверхзвуковых частей сопел, получаемых в результате оптимизации. Аппроксимирующая ПББ задавалась массивами из (3 × 4), (3 × 5), (3 × 6) и (3 × 8) контрольных точек при фиксированной (круглой) форме критического сечения и варьируемом положении этого сечения вдоль оси X . Последнее означает, что ПББ имели по 4 контрольных сечения: первое – фиксированное, остальные задавались КЛ разного порядка (4-го, 5-го и 7-го соответственно) с варьируемыми координатами контрольных точек. Относительные выигрыши полученных сопел по тяге ΔR показаны в сводной таблице, где приведены значения ΔR для всех рассматриваемых в работе случаев оптимизации сопел компоновки. Таблица устроена по принципу таблицы сопряженности: значение в ячейке, находящейся на пересечении строки с названием A и колонки с названием B , ΔR_{AB} есть величина относительного выигрыша компоновки сопел типа A по сравнению с компоновкой сопел типа B . Компоновка, состоящая из сопел, аппроксимированных ПББ, задаваемой массивом из $n \times m$ контрольных точек, с круглой формой критического сечения, обозначается через “ПББ _{$n \times m$} ”, а компоновка из осесимметричных сопел, вписанных в те же габариты, полученных МКК, – через “ВС-4” (т.е. компоновка из 4-х вариационных сопел, полученных МКК). Кроме того, приведено сравнение с единичным вариационным соплом, заменяющим компоновку, “ВС-1”. Для возможности проверки полученных результатов приводятся значения удельных тяг рассматриваемых вариационных сопел: $R_{ВС-4} = 2.184$, $R_{ВС-1} = 2.155$.

Итак, нас интересуют значения, расположенные в первых четырех строках колонки “ВС-4”: можно видеть, что полученные в процессе оптимизации сопла выигрывают от 0.44% до 0.6% по удельной тяге по сравнению с осесимметричными соплами, удовлетворяющими тем же ограничениям. Как и ожидалось, увеличение порядка аппроксимирующей поверхности привело к заметному улучшению значения критерия.

3.3. Результаты оптимизации псевдопространственного сопла

Помимо действительно пространственных сопел, аппроксимированных ПББ, была реализована оптимизация псевдопространственного сопла – осесимметричного сопла, степень расширения которого больше, чем у вариационного сопла. Аппроксимация поверхности сверхзвуковой части сопла ПББ заменялась здесь аппроксимацией КББ в меридиональном сечении, таким образом, поверхность сверхзвуковой части сопла получалась вращением КББ вокруг оси сопла с последующим усечением такой осесимметричной поверхности ограничивающей поверхностью сектора. Координаты контрольных точек аппроксимирующей КББ варьировались (исключая положение контрольной точки, соответствующей точке, лежащей на кривой критического сечения). Такой способ задания геометрии был обусловлен желанием существенно сократить число произволов, кроме того, такие сопла более удобны для технологического изготовления. В табли-



Фиг. 3.

це псевдопространственное сопло, аппроксимированное КББ 3-го порядка, обозначается через “КББ_{4(3D)}”. На фиг. 3а приведены двумерные проекции полученных в ходе оптимизации сопел: ПББ_{3×8} и КББ_{4(3D)} (жирный контур). Выигрыш компоновки псевдопространственных сопел относительно компоновки вариационных сопел составил 0.28% по удельной тяге, что в два раза меньше, чем выигрыш компоновки сопел ПББ_{3×8}.

3.4. Результаты оптимизации сопла с варьируемой формой критического сечения

Очевидно, что форма критического сечения пространственного оптимального сопла, в отличие от осесимметричного, вовсе не обязана быть круглой, поэтому в работе рассмотрен случай оптимизации сверхзвуковой части пространственного сопла с произвольной формой критического сечения. В этом случае форма критического сечения описывается КББ с варьируемыми координатами контрольных точек. Для того чтобы поддерживать расход через сопло постоянным, в случае профилирования только сверхзвуковой части, можно, например, после каждого варьирования критического сечения линейно менять координаты всех его контрольных точек так, чтобы площадь критического сечения оставалась заданной. Аппроксимирующая ПББ задавалась массивом из 4×7 контрольных точек: 4 контрольных сечения, каждое из которых варьировалось. В таблице сверхзвуковая часть сопла с произвольной формой критического сечения обозначается через “ПББ_{4×7}*”. В данном случае выигрыш оказался наибольшим из всех полученных: 0.68%, на фиг. 3б приведены двумерные проекции сопел ПББ_{3×8} и ПББ_{4×7}* (жирный контур).

3.5. Сравнение с результатами других авторов

Выше анонсировалось сравнение с результатом из [7], где приводится пример сопла компоновки ($N = 4$), спрофилированного для следующих параметров: $r_{in} = 1$, $r_t = 12.0711$ (что соответствует радиусу среза вписанного осесимметричного сопла $r_{BC} = 5$; все размеры указаны в масштабе, приведенном в [7]), $L = 15$, $p_0 = 1$, $T_0 = 1$ и $\Pi = \infty$. Повторим, что в [7] сверхзвуковая часть сопла имела заданную форму выходного сечения и аппроксимировалась в меридиональном направлении кубическим сплайном, на который накладывалось условие монотонности, что гарантировало выполнение накладываемых габаритных ограничений. Выигрыш по интегралу сил давления спрофилированной в [7] сверхзвуковой части пространственного сопла по сравнению с осесимметричным оптимальным соплом, вписанным в те же габариты, составил $\Delta\chi = 0.29\%$. В то же время выигрыш сверхзвуковой части сопла, аппроксимированной ПББ и полученной в результате предложенного в настоящей работе способа оптимизации, по сравнению все с тем же осесимметричным соплом, составил $\Delta\chi = 0.302\%$ ($\Delta R = 0.086\%$). Заметим, что столь незначительные величины выигрышей обусловлены следующим: в рассматриваемом случае сами условия оптимизации таковы, что даже при отмене накладываемых габаритных ограничений, исключая ограничение на максимальную длину, оптимальное сопло будет выигрывать по удельной тяге

менее 0.2% у осесимметричного сопла, оптимального для заданных значений длины и степени расширения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренный пример оптимизации сверхзвуковой части сопла плотной многосопловой компоновки продемонстрировал принципиальную возможность решения подобного рода задач с хорошей точностью за разумное время. Это стало первым шагом в разработке универсального инструмента прямого профилирования широкого класса пространственных аэродинамических форм. Предложенная методика прямой оптимизации позволяет существенно расширить круг решаемых задач оптимального профилирования. Так, именно использование прямых методов оптимизации позволяет осуществлять профилирование каналов с учетом влияния вязких эффектов, кроме того, нельзя забывать о привлекательности использования прямых методов с точки зрения универсальности их применимости. Возможность такого универсального подхода к решению разных, на первый взгляд, задач очень удобна при написании программных комплексов. Однако оригинальность изложенного в работе подхода заключается не столько в применении прямого метода исчерпывающего градиентного спуска — вместо него могут быть использованы как другие градиентные методы, так и методы нулевого и второго порядков — сколько в использовании той самой “удачной” аппроксимации, основанной на полиномах Бернштейна и позволяющей качественно описывать геометрию искомым конфигураций сравнительно небольшим числом произвольных, делая возможным получение результата, представляющего практический интерес, за сравнительно небольшое время. Помимо демонстрации возможностей предлагаемого подхода хотелось бы особо подчеркнуть те ключевые моменты, на которые необходимо обращать внимание при решении любой задачи оптимизации аэродинамических форм прямыми методами: во-первых, как было уже сказано, это вопрос выбора минимального эффективного набора произвольных задачи, т.е. аппроксимации искомой геометрии; во-вторых, корректный расчет критерия, который позволяет основную часть итераций проводить на загруженных сетках, тем самым уменьшая время, необходимое на получение результата. Дальнейшим развитием работы должно стать применение предложенной методики к задачам профилирования пространственных конфигураций как со сверхзвуковыми, так и с дозвуковыми течениями в них, что, в частности, подразумевает решение задачи в рамках уравнений Навье–Стокса.

Авторы выражают благодарность Н.И. Тилляеву и А.Н. Крайко за обсуждение проблемы и помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крайко А.А., Пьянков К.С. Эффективные прямые методы в задачах построения оптимальных аэродинамических форм // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 9. С. 1624–1631.
2. Шмыглевский Ю.Д. Аналитические исследования динамики газа и жидкости // М.: Эдиториал УРСС, 1999.
3. Крайко А.Н. Вариационные задачи газовой динамики // М.: Наука, 1979.
4. Wang X., Damodaran M. Aerodynamic shape optimization using computational fluid dynamics and parallel simulated annealing algorithms // AIAA J. 2001. V. 39. № 8. P. 1500–1508.
5. Wang X., Damodaran M. Optimal three-dimensional nozzle shape design using CFD and parallel simulated annealing // AIAA J. Propulsion and Power. 2002. V. 18. № 1. P. 217–221.
6. Reihmer J., Gülhan A. Design of a scramjet nozzle streamline tracing technique and reference temperature methode // 7-th Aerodynamics Symposium on Space Vehicles, 2011, Brügge, Belgien.
7. Борисов В.М., Михайлов И.Е. Об оптимизации сверхзвуковых частей пространственных сопел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1981. Т. 21. № 2. С. 517–519.
8. Колган В.П. Использование принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Уч. Зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 6. С. 68–77.
9. Тилляева Н.И. Обобщение модифицированной схемы С.К. Годунова на произвольные нерегулярные сетки // Уч. Зап. ЦАГИ. 1986. Т. 17. № 2. С. 18–26.