Р. Л. Добрушин, М. Я. Кельберт, Локальные аддитивные функционалы от гауссовских случайных полей, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1983, том 28, выпуск 1, 32–44

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том XXVIII И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 1
1983

ЛОКАЛЬНЫЕ АДДИТИВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ ОТ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

ДОБРУШИН Р. Л., КЕЛЬБЕРТ М. Я.

§ 1. Введение

Локальный аддитивный функционал (ЛАФ) от случайного поля — это случайная конечно-аддитивная мера Ξ, значение которой на ограниченном множестве V измеримо относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}_V$, порожденной значениями поля на этом множестве. Основной результат статьи — описание таких функционалов от гауссовских (вообще говоря, обобщенных) стационарных случайных полей в предположении, что эти функционалы квадратично интегрируемы.

Это исследование было стимулировано приложениями ЛАФ к построению негауссовских марковских полей — задаче, актуальной в связи с проблемами конструктивной теории квантовых полей (см., например, [1, 2]). Дело в том, что если рассматриваемое гауссовское поле является марковским, то вероятностная мера на σ-алгебре $\mathfrak{B}_V$, абсолютно непрерывная относительно сужения на $\mathfrak{B}_V$ соответствующей гауссовской меры и заданная плотностью вида

$$(\mathrm{E} \exp \{\Xi (V)\})^{-1} \exp \{\Xi (V)\},$$

также задает марковское поле (см., например, [2, 3]). При некоторых предположениях можно утверждать и обратное: если сужение марковского поля на $\mathfrak{B}_V$ (для ограниченных V) абсолютно непрерывно относительно сужения на $\mathfrak{B}_V$ другого марковского поля, то логарифм плотности одного сужения относительно другого является ЛАФ.

Описание ЛАФ от гауссовского случайного поля дается в терминах представления этих функционалов через кратные стохастические интегралы Винера — Ито (полиномы Вика в терминологии математической физики) и сводится к задаче об описании некоторого класса аддитивных функционалов со значениями в пространстве обобщенных функций. В важнейшем частном случае, когда рассматриваемые функционалы стационарно связаны со случайным полем, можно конкретизировать это описание и дать совсем явный ответ. Краткое изложение результатов этой статьи и последующей работы авторов на ту же тему опубликовано в [4, 5].

§ 2. Основные определения

Пусть $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(R^\nu)$ — пространство Шварца быстро убывающих бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций на ν-мерном евклидовом пространстве R^ν и $\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}'(R^\nu)$ — сопряженное к $\mathfrak{D}(R^\nu)$ пространство комплекснозначных обобщенных функций умеренного роста $\zeta = \{\zeta(\varphi), \varphi \in \mathfrak{D}\}$. Пусть $\mathfrak{B}$ — это σ-алгебра борелевских (относительно слабой топологии) подмножеств $\mathfrak{D}'$. Будем обозначать прямое и обратное преобразование Фурье обобщенной функции $\zeta \in \mathfrak{D}'$ через $F\zeta$ и $F^{-1}\zeta$, а через $*$ — операцию свертки.

Вероятностную меру $\mathbf{P}$ на измеримом пространстве $(\mathfrak{D}', \mathfrak{B})$ называют состоянием обобщенного гауссовского случайного поля (см. подробнее, например, [6, 7]), если характеристический функционал удовлетворяет равенству

$$S(\varphi) = \int_{\mathfrak{D}'} \exp\{i\zeta(\varphi)\}\,\mathbf{P}(d\zeta) = \exp\{-{}^1/_2 B(\varphi, \varphi)\} \quad \varphi \in \mathfrak{D}, \tag{2.1}$$

где $B(\varphi, \varphi)$ — непрерывная неотрицательно определенная квадратичная форма на $\mathfrak{D}$. Систему случайных величин $\zeta = \{\zeta(\varphi), \varphi \in \mathfrak{D}\}$ будем называть *гауссовским случайным полем*. Далее мы будем рассматривать стационарные гауссовские поля, заданные спектральной плотностью $f(\lambda), \lambda \in R^\nu$. Это означает, что

$$B(\varphi, \varphi) = \int_{R^\nu} |F\varphi(\lambda)|^2 f(\lambda)\,d\lambda, \quad \varphi \in \mathfrak{D}, \tag{2.2}$$

где $F\varphi$ — преобразование Фурье функции φ. Будем всегда предполагать, что выполнено условие

$$f(\lambda) \geqslant c\,(1 + |\lambda|)^{-m}, \quad \lambda \in R^\nu, \tag{2.3}$$

где $|\lambda| = (\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_\nu^2)^{1/2}$, m и $c > 0$ — некоторые константы. Условие (2.3) носит технический характер и, по-видимому, может быть ослаблено.

Обозначим $\mathcal{V}^0$ совокупность всех непустых замкнутых параллелепипедов

$$V = \{x = (x^1, \ldots, x^\nu) \in R^\nu : a^i \leqslant x^i \leqslant b^i, i = 1, \ldots, \nu\}, \quad a^i < b^i, \tag{2.4}$$

с гранями, параллельными координатным плоскостям. Пусть, далее, $\mathcal{V}$ — совокупность таких множеств V вида $V = V_1 \cup \ldots \cup V_m$, где $V_j \in \mathcal{V}^0$, $j = 1, \ldots, m$, что $\overset{0}{V}_i \cap \overset{0}{V}_j = \varnothing$ при $i \neq j$, где $\overset{0}{V}_i$ — внутренняя часть параллелепипеда V_i. Очевидно, что $\mathcal{V}$ — это кольцо множеств.

Далее, обозначим $L_2 = L_2(\mathbf{P})$ комплексное гильбертово пространство квадратично интегрируемых по мере $\mathbf{P}$ случайных величин, измеримых относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}$, норму в этом пространстве обозначим $\|\ \|$. Пусть $O \subset R^\nu$ — произвольное открытое множество. Введем σ-алгебру $\mathfrak{B}_O$ — наименьшую полную относительно меры $\mathbf{P}$ (т. е. содержащую все множества $A \in \mathfrak{B}$ с $\mathbf{P}(A) = 0$) подалгебру алгебры $\mathfrak{B}$, относительно которой измеримы все величины $\zeta(\varphi)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset O$. (Здесь и далее $\operatorname{supp}\varphi$ — носитель функции φ.). Для замкнутого множества $V \subset R^\nu$ положим $\mathfrak{B}_V = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathfrak{B}_{V_\varepsilon}$, где V_ε это ε-окрестность множества V.

Предположим, что на кольце множеств $\mathcal{V}$ задан квадратично интегрируемый функционал $\Xi = \{\Xi(V), V \in \mathcal{V}\}$, т. е. каждому множеству $V \in \mathcal{V}$ сопоставлена случайная величина $\Xi(V) \in L_2(\mathbf{P})$. Квадратично интегрируемый функционал Ξ назовем *локальным*, если для каждого $V \in \mathcal{V}$ случайная величина $\Xi(V) \in L_2(\mathbf{P})$ измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}_V$. Квадратично интегрируемый функционал Ξ назовем *ад-*

дитивным, если Р-п. н.

$$\Xi(V_1 \cup V_2) = \Xi(V_1) + \Xi(V_2) \tag{2.5}$$

для всех таких множеств $V_1, V_2 \in \mathscr{V}$, что $\overset{0}{V}_1 \cap \overset{0}{V}_2 = \varnothing$. Квадратично интегрируемый функционал Ξ назовем *стационарным*, если

$$\Xi(V+t) = \hat{U}_t \Xi(V), \quad V \in \mathscr{V}, \quad t \in R^\nu, \tag{2.6}$$

где $\hat{U}_t$ $(t \in R^\nu)$ — унитарные операторы сдвига в $L_2(\mathbf{P})$, соответствующие сдвигу $U_t\,\varphi(x) = \varphi(x-t)$, $t \in R^\nu$, функций $\varphi \in \mathfrak{D}(R^\nu)$.

Будем называть *пространством Фока* $\operatorname{Exp} H$ гильбертово пространство, элементами которого являются «фоковские столбцы» $\Psi = (\psi_0, \psi_1, \ldots)$, где ψ_0 — комплексные числа, а $\psi_n = \psi_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — такие симметричные функции от переменных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in R^\nu$ (но не от переменных λ_k^i, $k = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, \nu$), что норма $\|\Psi\|$ допускает разложение

$$\|\Psi\|^2 = |\psi_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{-1} \int \ldots \int |\psi_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)|^2 f(\lambda_1) \ldots f(\lambda_n)\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_n < \infty.$$

Известно [1, 8—11], что существует естественное унитарное отображение гильбертовых пространств $\operatorname{Exp} H \to L_2(\mathbf{P})$, которое мы будем называть *ВИВ-отображением* (Винер — Ито — Вик). Это отображение однозначно выделяется из всех унитарных отображений пространств $\operatorname{Exp} H \to L_2(\mathbf{P})$ тем, что для него полиномам $Q(\zeta(\varphi_1), \ldots, \zeta(\varphi_k))$, где $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \mathfrak{D}$, степени n от значений поля соответствуют такие фоковские столбцы, что $\psi_m \equiv 0$ при $m > n$. Образ Ξ_Ψ элемента $\Psi \in \operatorname{Exp} H$ при ВИВ-отображении можно записать в виде

$$\Xi_\Psi = \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{-1} \int \ldots \int \psi_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, z(d\lambda_1) \ldots z(d\lambda_n),$$

$$\|\Xi_\Psi\|^2 = |\psi_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{-1} \int \ldots \int |\psi_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)|^2 f(\lambda_1) \ldots f(\lambda_n)\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_n < \infty, \tag{2.7}$$

где в правую часть входят кратные интегралы Винера — Ито по спектральной мере z рассматриваемого гауссовского стационарного поля (первоначальное определение интеграла, использованное Ито [8], должно быть здесь немного модифицировано; см., например, [9, 11]). Отметим следующую формулу [11, теорема 4.2], которую мы будем неоднократно использовать ниже. Пусть функции $\chi_1, \chi_2, \ldots \in L_2(\mathscr{F}_1)$, где $\mathscr{F}_1$ — мера в R^1, заданная плотностью $f(\lambda)$, ортонормальны и $H_k(x)$ — полином Эрмита степени k со старшим коэффициентом 1. Тогда при любых $m = 1, 2, \ldots$ и $k_1, \ldots, k_m \geqslant 0$, $n = k_1 + \ldots + k_m$,

$$\prod_{j=1}^{m} H_{k_j}\left(\int \chi_j(\lambda)\, z(d\lambda)\right) = \int \ldots \int \psi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, z(d\lambda_1) \ldots z(d\lambda_n), \tag{2.8}$$

где $\psi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — симметризация функции $\prod_{j=1}^{n} \hat{\chi}_j(\lambda_j)$, $\hat{\chi}_j = \chi_l$, если $k_1 + \ldots + k_{l-1} < j \leqslant k_1 + \ldots + k_l$, $l = 1, \ldots, m$.

Чтобы избежать дополнительных оговорок, мы будем предполагать в дальнейшем, что $\mathbf{E}\Xi(V) = 0$, $V \in \mathscr{V}$. Конечно, общий случай может быть сведен к этому за счет вычитания средних значений.

Будем называть фоковский столбец $\Psi^V = (\psi_1^V, \ldots, \psi_n^V, \ldots)$ *спектральным представлением* $\Xi(V)$, а функционал

$$\Xi_n(V) = (n!)^{-1} \int \ldots \int \psi_n^V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, z(d\lambda_1) \ldots z(d\lambda_n), \quad V \in \mathscr{V},$$

— *n-й компонентой* Ξ. Нетрудно показать (ср. [3, гл. 2, § 4]), что функционал Ξ_n локален, аддитивен и стационарен. В частности, для аддитивности функционала Ξ необходимо и достаточно, чтобы

$$\psi_n^{V_1 \cup V_2} = \psi_n^{V_1} + \psi_n^{V_2}, \quad V_1, V_2 \in \mathscr{V}, \quad \overset{0}{V}_1 \cap \overset{0}{V}_2 = \varnothing, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.9}$$

п. в. по мере Лебега в $R^{n\nu}$.

§ 3. Спектральное представление функционалов

Пусть $\mathscr{F}_n$ — мера в $R^{n\nu}$, $n = 1, 2, \ldots$, заданная плотностью вида $f(\lambda_1) \ldots f(\lambda_n)$ по мере Лебега. Рассмотрим естественное вложение π_n пространства $L_2(\mathscr{F}_n)$ в пространство обобщенных функций $\mathfrak{D}'(R^{n\nu})$. Нетрудно проверить, что вложение π_n непрерывно относительно слабой топологии в $\mathfrak{D}'(R^{n\nu})$, т. е. что если последовательность ψ_k сходится к 0 в $L_2(\mathscr{F}_n)$, то для любой функции $\varphi \in \mathfrak{D}(R^{n\nu})$ последовательность $(\pi_n(\psi_k), \varphi)$ сходится к 0 при $k \to \infty$. В самом деле, используя неравенство Шварца, получаем:

$$|(\pi_n(\psi_k), \varphi)| \leqslant \|\psi_k\|_{L_2(\mathscr{F}_n)} \left[\int_{R^{n\nu}} \ldots \int \frac{|\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)|^2}{f(\lambda_1) \ldots f(\lambda_n)} d\lambda_1 \ldots d\lambda_n \right]^{1/2}, \tag{3.1}$$

причем из условия (2.3) и того, что $\varphi \in \mathfrak{D}(R^{n\nu})$, следует сходимость интеграла в правой части неравенства (3.1).

Пусть Ξ — квадратично интегрируемый функционал. ВИВ-отображение позволяет связать с этим функционалом последовательность функционалов $\overline{\Phi}_n = \{\Phi_n^V, V \in \mathscr{V}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, от $V \in \mathscr{V}$ со значениями $\Phi_n^V \in \mathfrak{D}'(R^{n\nu})$. Действительно, рассмотрим фоковский столбец $\Psi^V = (\psi_1^V, \psi_2^V, \ldots)$, задающий спектральное представление функционала Ξ, и зададим последовательность функционалов $\overline{\Phi} = \{\overline{\Phi}_n, n = 1, 2, \ldots\}$ со значениями в $\mathfrak{D}'(R^{n\nu})$ равенством

$$\overline{\Phi}_n \colon V \to \Phi_n^V = \pi_n(\psi_n^V), \quad V \in \mathscr{V}. \tag{3.2}$$

Там, где это не может вызвать недоразумений, мы не будем различать функции $\psi \in L_2(\mathscr{F}_n)$ и соответствующие обобщенные функции $\pi_n(\psi)$. В частности, совокупность $\overline{\Phi} = \{\overline{\Phi}_n, n = 1, 2, \ldots\}$ функционалов $\overline{\Phi}_n$ со значениями в $\mathfrak{D}'(R^{n\nu})$ будем называть спектральным представлением квадратично интегрируемого функционала Ξ, а $\overline{\Phi}_n$ — его n-й компонентой. Будем говорить, что квадратично интегрируемый функционал Ξ *имеет степень n*, если в его спектральном представлении $\overline{\Phi} = \{\overline{\Phi}_k, k = 1, 2, \ldots\}$ обобщенные функции Φ_k^V тождественно равны 0 при всех $V \in \mathscr{V}$, если $k \neq n$. Функционал Ξ имеет конечный порядок, если при некотором натуральном числе $N(\Xi) < \infty$

$$\Xi(V) = \sum_{n=1}^{N(\Xi)} \Xi_n(V), \quad V \in \mathscr{V},$$

где $\Xi_n = \{\Xi_n(V), V \in \mathscr{V}\}$ — функционал степени n. Наименьшее из таких чисел $N(\Xi)$ назовем *порядком функционала* Ξ.

Поскольку функционал Ξ однозначно восстанавливается по своему спектральному представлению, задача описания интересующих нас классов квадратично интегрируемых функционалов сводится к задаче описания спектральных представлений функционалов соответствующего класса. Введем некоторые классы функционалов от $V \in \mathscr{V}$ со значениями в $\mathfrak{D}'(R^{n\nu})$. Будем называть функционал $\overline{\Phi}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, *симметричным*, если при каждом $V \in \mathscr{V}$ обобщенная функция Φ_n^V симметрична по переменным $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in R^\nu$. Очевидно, что n-я компонента спектрального представления квадратично интегрируемого функционала является симметричным функционалом со значениями в $\mathfrak{D}'(R^{n\nu})$.

Функционал $\overline{\Phi}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ будем называть *локальным*, если $\operatorname{supp} F^{-1}\Phi_n^V \subseteq V^n$ для каждого $V \in \mathscr{V}$. Локальный функционал будем называть *диагональным*, если для каждого $V \in \mathscr{V}$

$$\operatorname{supp} F^{-1}\Phi_n^V \subseteq \operatorname{diag} V^n, \tag{3.3}$$

где $\operatorname{diag} V^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in V^n : x_1 = \ldots = x_n\}$.

Функционал $\overline{\Phi}_n$ называется *аддитивным*, если $\Phi_n^{V_1 \cup V_2} = \Phi_n^{V_1} + \Phi_n^{V_2}$ для всех таких множеств $V_1, V_2 \in \mathscr{V}$, что $\overset{0}{V}_1 \cap \overset{0}{V}_2 = \varnothing$.

Будем говорить, что Фурье-прообраз функционала $\overline{\Phi}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *диагонально инвариантен*, если для произвольных $t \in R^\nu$, $V \in \mathscr{V}$ и функции $\varphi \in \mathfrak{D}(R^{n\nu})$ выполняется равенство

$$(F^{-1}\Phi_n^{V+t}, U_{\bar{t}}\varphi) = (F^{-1}\Phi_n^V, \varphi), \tag{3.4}$$

где $\bar{t} = (t, \ldots, t) \in \operatorname{diag} R^{n\nu} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R^{n\nu}: x_1 = \ldots = x_n\}$.

Основным результатом этой статьи является следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть* Ξ — *квадратично интегрируемый функционал и* $\overline{\Phi} = \{\overline{\Phi}_n, n = 1, 2, \ldots\}$ — *его спектральное представление.*

А. *Для того чтобы функционал* Ξ *был локальным и аддитивным, необходимо и достаточно, чтобы все функционалы* $\overline{\Phi}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, *были диагональными и аддитивными.* ∎

Б. *Для того чтобы функционал* Ξ *был стационарным, необходимо и достаточно, чтобы все функционалы* $\overline{\Phi}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, *имели диагонально инвариантные Фурье-прообразы.*

Доказательство этой теоремы основано на ряде вспомогательных определений и утверждений. Для любого открытого или замкнутого множества $G \subseteq R^\nu$ будем обозначать $L_2^G(\mathbf{P})$ подпространство пространства $L_2(\mathbf{P})$, образованное случайными величинами, измеримыми относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}_G$. Имеет место следующий результат: если $V \subset R^\nu$ — замкнутое множество, то

$$L_2^V(\mathbf{P}) = \bigcap_{\varepsilon>0} L_2^{V_\varepsilon}(\mathbf{P})$$

(его доказательство см., например, в [12, предложение 4.3.2] [1]).

Предложение 3.1. *Пусть* V — *ограниченное замкнутое множество.*

[1] В работе [12] содержится неточность. Там аналогичный результат сформулирован не для пересечения по всем ε-окрестностям V_ε, а для пересечения по всем открытым множествам $O \supset V$.

Для того чтобы элемент $\Xi \in L_2(\mathbf{P})$ *принадлежал пространству* $L_2^V(\mathbf{P})$, *необходимо и достаточно, чтобы в его представлении* (2.7)

$$\operatorname{supp} F^{-1}\psi_n \subseteq V^n \tag{3.5}$$

при всех $n = 1,2, \ldots$, *где* $V^n = V \times \ldots \times V$.

Лемма 3.1. *Пусть* O — *некоторое открытое множество. Произвольный полином* $Q(\zeta(\varphi_1), \ldots, \zeta(\varphi_n))$ *от случайных величин* $\zeta(\varphi_1), \ldots, \zeta(\varphi_n)$, *где* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathfrak{D}(R^\nu)$ *и* $\operatorname{supp}\varphi_i \subset O$, $i = 1, \ldots, n$, *представим в виде суммы*

$$Q(\zeta(\varphi_1), \ldots, \zeta(\varphi_n)) = \sum_{k=0}^{\deg Q} \int \ldots \int \psi_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)\, z(d\lambda_1) \ldots z(d\lambda_k), \tag{3.6}$$

где $\operatorname{supp} F^{-1}\psi_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \subset O^k$, $k = 1, \ldots, \deg Q$.

Доказательство. Пусть $\chi_1, \ldots, \chi_m$ $(m \leqslant n)$ — ортогональный базис подпространства в $L_2(\mathcal{F}_1)$, порожденный элементами $F\varphi_1, \ldots, F\varphi_n$. Ясно, что $\operatorname{supp} F^{-1}\chi_j \subset O$, $j = 1, \ldots, m$, и что для некоторого полинома степени $\deg \widetilde{Q} \leqslant \deg Q$

$$Q(\zeta(\varphi_1), \ldots, \zeta(\varphi_n)) = \widetilde{Q}\left(\int \chi_1(\lambda_1)\, z(d\lambda_1), \ldots, \int \chi_m(\lambda_m)\, z(d\lambda_m)\right).$$

Для полиномов $\widetilde{Q}$, представимых в виде

$$\widetilde{Q}(x_1, \ldots, x_m) = \prod_{j=1}^{m} H_{k_j}(x_j), \quad \sum_{j=1}^{m} k_j \leqslant \deg Q, \tag{3.7}$$

утверждение леммы непосредственно следует из формулы (2.8). Так как произвольный полином $\widetilde{Q}$ степени, не большей $\deg Q$, представляется в виде суммы полиномов вида (3.7), то утверждение леммы доказано.

Лемма 3.2. *При любом* $k = 1,2, \ldots$ *и любом замкнутом множестве* $V \subset R^\nu$ *линейное пространство функций*

$$\mathfrak{N}_V^k = \{\psi_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in L_2(\mathcal{F}_k) \colon \operatorname{supp} F^{-1}\psi_k \subseteq V^k\} \tag{3.8}$$

является замкнутым подпространством пространства $L_2(\mathcal{F}_k)$.

Доказательство. Из определения носителя обобщенной функции следует, что совокупность функций $\psi_k \in \mathfrak{D}'(R^{k\nu})$, у которых $\operatorname{supp}\psi_k \subseteq V^k$, замкнута в слабой топологии пространства $\mathfrak{D}'(R^{k\nu})$. Из непрерывности преобразования Фурье F^{-1} следует, что совокупность функций $\psi_k \in \mathfrak{D}'(R^{k\nu})$, у которых $\operatorname{supp} F^{-1}\psi_k \subseteq V^k$, также замкнута в слабой топологии пространства $\mathfrak{D}'(R^{k\nu})$. Для завершения доказательства леммы остается воспользоваться отмеченной выше непрерывностью вложения пространства $L_2(\mathcal{F}_k)$ в $\mathfrak{D}'(R^{k\nu})$.

Для доказательства утверждения предложения 3.1 о необходимости заметим теперь, что если $\Xi \in L_2^V(\mathbf{P})$, то $\Xi \in L_2^{V^\varepsilon}(\mathbf{P})$ при всех $\varepsilon > 0$. Рассмотрим, далее, гауссовское случайное поле $\zeta(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}(V_\varepsilon)$, где $\mathcal{D}(V_\varepsilon) = \{\varphi \in \mathfrak{D}(R^\nu) \colon \operatorname{supp}\varphi \subset V_\varepsilon\}$. Из общих свойств гауссовских полей (см., например, предложение 2.1 в [10]) следует, что совокупность полиномов $Q(\zeta(\varphi_1), \ldots, \zeta(\varphi_k))$, где $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \mathcal{D}(V_\varepsilon)$, плотна в $L_2^{V_\varepsilon}(\mathbf{P})$. Из леммы 3.1 и леммы 3.2, примененной при V, замененном на $\overline{V}_\varepsilon$, где $\overline{V}_\varepsilon$ — замыкание V_ε, следует теперь, что $\operatorname{supp} F^{-1}\psi_n \subseteq (\overline{V}_\varepsilon)^n$. Остается заметить, что $\bigcap_{\varepsilon > 0} (\overline{V}_\varepsilon)^n = V^n$, и, следовательно, $\operatorname{supp} F^{-1}\psi_n \subseteq \subseteq V^n$, $n = 1,2, \ldots$

Лемма 3.3. *Пусть* $O \subset R^\nu$ — *ограниченное открытое множество. Рассмотрим линейное пространство* $\mathfrak{M}_O^n \subset L_2(\mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, *порожденное функциями* $\chi_1(\lambda_1), \ldots, \chi_n(\lambda_n)$, *где* $\chi_j \in L_2(\mathcal{F}_1)$, $\operatorname{supp} F^{-1}\chi_j \subset O$, $j = 1, \ldots, n$, *и линейное пространство*

$$\mathfrak{N}_O^n = \{\varphi \in L_2(\mathcal{F}_n) \colon \operatorname{supp} F^{-1}\varphi \subset O^n\},$$

где $O^n = O \times \ldots \times O$. *Пусть* $\overline{\mathfrak{M}}_0^n$ — *замыкание пространства* $\mathfrak{M}_O^n$ *в метрике* $L_2(\mathcal{F}_n)$.

Тогда

$$\mathfrak{N}_O^n \subseteq \overline{\mathfrak{M}}_O^n.$$

Доказательство. Пусть $\omega_\varepsilon(x) \in \mathcal{D}(R^{n\nu})$, где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^{n\nu}$,— стандартная «шапочка» в пространстве финитных бесконечно дифференцируемых функций

$$\omega_\varepsilon(x) = C_\varepsilon \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}\right\}\chi_{\{|x| \leqslant \varepsilon\}},$$

где постоянная C_ε выбирается из условия $\int\limits_{R^{n\nu}}\ldots\int \omega_\varepsilon(x)\,dx = 1$ (как обычно, $\chi_{\{|x|\leqslant\varepsilon\}}$ — индикатор соответствующего множества, а $|x|$ — евклидова норма $x \in R^{n\nu}$). Рассмотрим произвольную функцию $\varphi \in \mathfrak{N}_O^n$ и положим

$$\varphi^\varepsilon(\lambda) = \varphi(\lambda)\,F\omega_\varepsilon(\lambda), \quad \lambda \in R^{n\nu}.$$

Нетрудно проверить, что $\varphi^\varepsilon \to \varphi$ в $L_2(\mathcal{F}_n)$ при $\varepsilon \to 0$ и при достаточно малом ε

$$F^{-1}\varphi^\varepsilon = F^{-1}\varphi * \omega_\varepsilon \in \mathcal{D}(O^n)$$

(см., например, [13, § 1.2]). Следовательно, из известных общих результатов (см., например, [13, § 3.2]) вытекает существование последовательности элементов из множества $F^{-1}\mathfrak{M}_O^n$, сходящейся к $F^{-1}\varphi^\varepsilon$ в $\mathfrak{D}(R^{n\nu})$. Поэтому (см., например, [13, § 6.1]) преобразования Фурье этих элементов образуют последовательность функций из $\mathfrak{M}_O^n$, сходящуюся к φ^ε в $\mathfrak{D}(R^{n\nu})$. Поскольку, как известно, (см. [6, гл. 3]), спектральная плотность $f(\lambda)$, $\lambda \in R^\nu$, обобщенного случайного поля ζ имеет степенной рост, построенная последовательность функций из $\mathfrak{M}_O^n$ сходится к φ^ε и в $L_2(\mathcal{F}_n)$, что и доказывает лемму.

Для доказательства утверждения предложения 3.1 о достаточности заметим, что, как следует из условия (3.5), $\psi_n \in \mathfrak{N}_O^n$, $n = 1, 2, \ldots$, для каждого ограниченного открытого множества $O \supset V$. Представляя функции $\chi \in L_2(\mathcal{F}_1)$ как линейные комбинации функций из некоторого ортонормального базиса в $L_2(\mathcal{F}_1)$, убеждаемся, что линейное пространство $\mathfrak{M}_O^n$ порождается такими функциями вида $\chi_1(\lambda_1), \ldots \chi_n(\lambda_n)$, что $\chi_1, \ldots, \chi_n$ ортонормальны в $L_2(\mathcal{F}_1)$ и $\operatorname{supp} F^{-1}\chi_j \subset O$, $j=1, \ldots, n$. Согласно лемме 3.3 при произвольном $\varepsilon > 0$ существует такая конечная сумма вида

$$\hat{\chi}_n^\varepsilon(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_i c_i\chi_1^i(\lambda_1)\ldots\chi_n^i(\lambda_n) \in \mathfrak{M}_O^n,$$

что при каждом i функции χ_j^i, $j = 1, \ldots, n$, ортонормальны, $\operatorname{supp} F^{-1}\chi_j^i \subset O$ и для симметризации этой суммы $\chi_n^\varepsilon = \sigma\hat{\chi}_n^\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\|\psi_n - \chi_n^\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{F}_n)} < \varepsilon. \tag{3.9}$$

Заметим теперь, что случайные величины $\int \chi_j^i(\lambda)\, z(d\lambda)$ — $\mathfrak{B}_O$-измеримы. Действительно, функция $\chi_j^i \in L_2(\mathcal{F}_1)$ является пределом при $k \to \infty$ в $L_2(\mathcal{F}_1)$ последовательности функций $\varphi_k = \chi_j^i F \omega_{k^{-1}} \in \mathfrak{D}(R^\nu)$, а случайные величины $\int \varphi_k(\lambda)\, z(d\lambda) = \zeta(F^{-1}\varphi_k)$ — $\mathfrak{B}$-измеримы при достаточно больших k. Пользуясь формулами (2.8) и (3.9), заключаем, что случайная величина

$$\int \ldots \int \psi_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, z(d\lambda_1) \ldots z(d\lambda_n)$$

также $\mathfrak{B}_O$-измерима для каждого ограниченного открытого множества $O \supset V$, а значит, и $\mathfrak{B}_V$-измерима. Следовательно, $\mathfrak{B}_V$-измерима и случайная величина Ξ.

Предложение 3.1 доказано.

Доказательство теоремы 3.1. Докажем утверждение А. Достаточность условий утверждения А следует из предложения 3.1 и соотношения (2.9). Для доказательства необходимости условий утверждения А представим множество $V \in \mathcal{V}$ в виде объединения некоторого числа m параллелепипедов $V = V_1 \cup \ldots \cup V_m$, $V_i \in \mathcal{V}$, $\overset{0}{V}_i \cap \overset{0}{V}_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Из аддитивности функционала $\overline{\Phi}_n$ следует, что $\Phi_n^V = \Phi_n^{V_1} + \ldots$ $\ldots + \Phi_n^{V_m}$, так что, в силу предложения 3.1, $\operatorname{supp} F^{-1}\Phi_n^V \subseteq V_1^n \cup \ldots \cup V_m^n$. Рассматривая последовательность таких разбиений множества V описанного выше типа

$$V = V_1(i) \cup V_2(i) \cup \ldots \cup V_{m(i)}(i),$$

что $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m(i)} \operatorname{diam} V_j(i) \to 0$ при $i \to \infty$, убеждаемся, что выполнено соотношение (3.3).

Утверждение А доказано.

Для доказательства утверждения Б заметим, что при любом $t \in R^\nu$ квадратично интегрируемый функционал $\Xi_t = \{\Xi_t(V) = \hat{U}_t \Xi(V),\ V \in \mathcal{V}\}$ допускает спектральное представление, которое мы обозначим $\Psi_t^V = (\psi_{t,0}^V, \psi_{t,1}^V, \ldots)$, и при этом

$$\psi_{t,n}^V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = e^{i(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)t}\psi_n^V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

(см., например, [11, теорема 4.3]). Однако стационарная связанность функционала Ξ с полем ζ эквивалентна тому, что

$$\psi_{t,n}^V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \psi_n^{V+t}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad t \in R^\nu, \quad V \in \mathcal{V},$$

и следовательно, тому, что

$$\psi_n^{V+t}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = e^{i(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)t}\psi_n^V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad t \in R^\nu, \quad V \in \mathcal{V}, \tag{3.10}$$

при всех $n = 1, 2, \ldots$ Непосредственно проверяется, что при всех $\varphi \in \mathfrak{D}(R^{n\nu})$

$$(F^{-1}\psi_n^{V+t}, U_{\bar{t}}\varphi) = (F^{-1}(e^{-i(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)t}\psi_n^{V+t}), \varphi),$$

так что определение (3.4) эквивалентно равенству (3.10).

Теорема доказана.

§ 4. Спектральные функции

Введем следующую простую конструкцию. Рассмотрим некоторое разбиение пространства R^ν на параллелепипеды $V(i) \in \mathcal{V}^0$, $i = 1, 2, \ldots$, (т. е. такое семейство параллелепипедов $\{V(i) \in \mathcal{V}^0,\ i = 1, 2, \ldots\}$, что

$\bigcup_{i=1}^{\infty} V(i) = R^{\nu}$, $\overset{0}{V}(i) \cap \overset{0}{V}(j) = \varnothing$ при $i \neq j$), обладающее тем свойством, что лишь конечное число параллелепипедов $V(i)$ имеет непустое пересечение с любым ограниченным множеством.

Пусть $\overline{\Phi}_n$ — диагональный аддитивный функционал со значениями в $\mathfrak{Y}'(R^{n\nu})$, $n = 1,2, \ldots$ Определим на пространстве финитных бесконечно дифференцируемых функций функционал $\widetilde{\Phi}_n$ равенством

$$(\widetilde{\Phi}_n, \varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} (F^{-1}\Phi_n^{V(i)}, \varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}(R^{n\nu}). \tag{4.1}$$

Поскольку носитель $F^{-1}\Phi_n^{V}$ в силу диагональности функционала $\overline{\Phi}_n$ должен лежать в V^n, лишь конечное число слагаемых в этой сумме отлично от нуля, а из аддитивности функционала $\overline{\Phi}_n$ следует, что выражение (4.1) не зависит от выбора разбиения пространства и поэтому такое определение функционала $\widetilde{\Phi}_n$ корректно. Для любого ограниченного открытого множества $O \subset R^{\nu}$ сужение функционала $\widetilde{\Phi}_n$ на совокупность $\mathscr{D}(O^n)$ функций $\varphi \in \mathscr{D}(R^{n\nu})$ с носителем $\operatorname{supp} \varphi \subset O^n$ совпадает при $O \subset V$ с сужением на $\mathscr{D}(O^n)$ обобщенной функции $F^{-1}\Phi_n^{V} \in \mathfrak{Y}'(R^{n\nu})$. Поэтому $\widetilde{\Phi}_n$ является непрерывным функционалом от $\varphi \in \mathscr{D}(R^{n\nu})$, и следовательно, $\widetilde{\Phi}_n \in \mathscr{D}'(R^{n\nu})$ — обобщенная функция.

Обобщенную функцию $\widetilde{\Phi}_n \in \mathscr{D}'(R^{n\nu})$, сопоставленную при помощи приведенной выше конструкции диагональному аддитивному функционалу $\overline{\Phi}_n$ со значениями в $\mathfrak{Y}'(R^{n\nu})$, будем называть *спектральной функцией* диагонального аддитивного функционала $\overline{\Phi}_n$. Носитель спектральной функции удовлетворяет соотношению

$$\operatorname{supp} \widetilde{\Phi}_n \subseteq \mathscr{L} = \operatorname{diag} R^{n\nu} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R^{n\nu}\colon x_1 = \ldots = x_n\} \tag{4.2}$$

в силу диагональности функционала $\overline{\Phi}_n$. Если функционал $\overline{\Phi}_n$ симметричен, то спектральная функция $\widetilde{\Phi}_n \in \mathscr{D}'(R^{n\nu})$ симметрична по переменным $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in R^{\nu}$. Спектральную функцию $\widetilde{\Phi}_n$, сопоставленную n-й компоненте спектрального представления локального аддитивного квадратично интегрируемого функционала Ξ, будем называть *n-й спектральной функцией функционала* Ξ.

Будем называть *сдвигом* обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(R^{n\nu})$ на вектор $t \in R^{n\nu}$ обобщенную функцию $U_t f \in \mathscr{D}'(R^{n\nu})$, для которой имеет место равенство

$$(U_t f, \varphi) = (f, U_t \varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}(R^{n\nu}). \tag{4.3}$$

Будем говорить, что обобщенная функция $f \in \mathscr{D}'(R^{n\nu})$ *инвариантна относительно сдвигов* из множества T, если $U_t f = f$ при всех $t \in T$.

Предложение 4.1. *Пусть $\widetilde{\Phi}_n \in \mathscr{D}'(R^{n\nu})$ — спектральная функция диагонального аддитивного функционала $\overline{\Phi}_n$ со значениями в $\mathfrak{Y}'(R^{n\nu})$. Если Фурье-прообраз функционала $\overline{\Phi}_n$ диагонально инвариантен, то обобщенная функция $\widetilde{\Phi}_n$ инвариантна относительно сдвигов из гиперплоскости* $\mathscr{L} = \operatorname{diag} R^{n\nu}$.

Доказательство. Фиксировав функцию $\varphi \in \mathscr{D}(R^{n\nu})$, выберем множество $V \in \mathscr{V}^0$ так, чтобы $\operatorname{supp} \varphi \subset V^n$. Пусть $\bar{t} = (t, \ldots, t) \in \mathscr{L}$, тогда $\operatorname{supp} U_{\bar{t}}\varphi \subset (V + t)^n$. Согласно определению (2.1) получаем:

$$(\widetilde{\Phi}_n, U_{\bar{t}}\varphi) = (F^{-1}\Phi_n^{V+t}, U_{\bar{t}}\varphi), \quad (\widetilde{\Phi}_n, \varphi) = (F^{-1}\Phi_n^{V}, \varphi)$$

что влечет равенство (4.3) при $f = \widetilde{\Phi}_n$, поскольку Фурье-прообраз функционала $\widetilde{\Phi}_n$ диагонально инвариантен (см. (3.4)).

Предложение доказано.

Далее нам понадобится один простой факт из теории обобщенных функций. Пусть $u = (u_1, \ldots, u_\nu) \in R^\nu$, $v = (v_{\nu+1}, \ldots, v_m) \in R^{m-\nu}$, $1 \leqslant \nu \leqslant m$, $(u, v) \in R^m = R^\nu \times R^{m-\nu}$. Предположим, что в пространстве R^m фиксирована гиперплоскость $\mathcal{M} = \{(u, v) \in R^m\colon v = 0\}$. Будем обозначать α мультииндексы $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, где α_i — целые неотрицательные числа. Пусть A_v^N — совокупность таких мультииндексов α, что $\alpha_1 = \ldots = \alpha_\nu = 0$ и $\alpha_{\nu+1} + \ldots + \alpha_m \leqslant N$. Через D^α будем обозначать дифференциальные операторы $D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_m}}{\partial^{\alpha_1}x_1 \ldots \partial^{\alpha_m}x_m}$. Через $1_u \in \mathcal{D}'(R^\nu)$ будем обозначать единичную обобщенную функцию (см., например, [13, § 3.3]), через $\delta_v \in \mathcal{D}'(R^{m-\nu})$ будем обозначать δ-функцию по переменным v и, наконец, через $f \times g$, $f \in \mathcal{D}'(R^\nu)$, $g \in \mathcal{D}'(R^{m-\nu})$, как и обычно, будем обозначать прямое произведение обобщенных функций f и g (см., например, [13, § 3.1]).

Лемма 4.1. *Обобщенная функция $f \in \mathcal{D}'(R^m)$ с носителем на гиперплоскости $\mathcal{M}$ инвариантна относительно сдвигов из гиперплоскости $\mathcal{M}$ в том и только в том случае, когда она допускает представление вида*

$$f = 1_u \times \sum_{\alpha \in A_v^N} a_\alpha D^\alpha \delta_v, \tag{4.4}$$

где a_α — некоторые комплексные числа, N — некоторое натуральное число.

Доказательство. Обобщенная функция $f = f(u, v) \in \mathcal{D}'(R^m)$ инвариантна относительно сдвигов из гиперплоскости $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда она представима в виде прямого произведения обобщенных функций $f(u, v) = 1_u \times g$, где g — некоторая обобщенная функция из пространства $\mathcal{D}'(R^{m-\nu})$ (см., например, [13, § 3.3]). Условие $\operatorname{supp} f \subseteq \mathcal{M}$ означает, что носителем обобщенной функции g является точка $v = 0$. Для завершения доказательства леммы остается воспользоваться известной теоремой о строении обобщенной функции с носителем в точке (см. например, [13, § 2.6]).

Лемма доказана.

Нам понадобятся в дальнейшем следующие обозначения. Пусть J — множество всех 2^ν подмножеств множества индексов $I_0 = \{1, \ldots, \nu\}$, $J' = J \diagdown I_0$. Пусть $\bar{I} = I_0 \diagdown I$, $|I|$ — число элементов в $I \in J$ и $J_k \subset J$ — совокупность таких $I \in J$, что $|I| = k$. При $\lambda = (\lambda^1, \ldots, \lambda^\nu) \in R^\nu$ и $I \in J$ обозначим $\lambda^I \in R^\nu$ вектор $\lambda^I = (\lambda^1(I), \ldots, \lambda^\nu(I))$, где $\lambda^j(I) = \lambda^j$, если $j \in I$, $\lambda^j(I) = 0$ в противном случае; $\lambda_I \in R^{|I|}$ — совокупность переменных $(\lambda^j, j \in I)$. В частности, $\lambda^{I_0} = \lambda_{I_0} = \lambda$. Наконец, обозначим $\mathcal{L}_I \subseteq \mathcal{L} = \operatorname{diag} R^{n\nu}$, $I \in J$, гиперплоскость размерности $|I|$, определяемую равенством

$$\mathcal{L}_I = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in R^{n\nu}\colon \lambda_1 = \ldots = \lambda_n,\ (\lambda_1)_{\bar{I}} = \ldots = (\lambda_n)_{\bar{I}} = 0\}.$$

Под полиномами $P(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ от переменных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in R^\nu$ будем подразумевать полиномы от $n\nu$ переменных $\lambda_i^1, \ldots, \lambda_i^\nu$, $i = 1, \ldots, n$, где $\lambda_i = (\lambda_i^1, \ldots, \lambda_i^\nu)$. Будем говорить, что полином $P(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *симметричен* по переменным $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in R^\nu$, если $P(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = P(\lambda_{i_1}, \ldots$

$\ldots, \lambda_{i_n})$, (где $i_1, \ldots, i_n$) — произвольная перестановка индексов $(1, \ldots \ldots, n)$. Будем говорить, что полином $P(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *постоянен вдоль I-диагонали*, $I \in J$, если

$$P(\lambda_1 + \lambda^I, \ldots, \lambda_n + \lambda^I) = P(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda \in R^\nu. \tag{4.5}$$

Полином, постоянный вдоль I_0 - диагонали, будем называть *постоянным* вдоль диагонали. Отметим, что при $n = 1$ полином, постоянный вдоль диагонали, тождественно равен некоторой константе.

Нам будет удобно иногда вместо координат $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in R^\nu$, в пространстве $R^{n\nu}$ использовать систему координат $(\hat\lambda_0, \hat\lambda_1, \ldots, \hat\lambda_{n-1})$, $\hat\lambda_0, \ldots, \hat\lambda_{n-1} \in R^\nu$, заданную соотношениями

$$\hat\lambda_0 = n^{-1}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n), \quad \hat\lambda_i = \lambda_i - n^{-1}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n), \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{4.6}$$

Ясно, что полином $P(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ постоянен вдоль I-диагонали тогда и только тогда, когда существует такой полином $\hat P((\hat\lambda_0)_{\bar I}, \hat\lambda_1, \ldots, \hat\lambda_{n-1})$, что

$$P(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \hat P((\hat\lambda_0)_{\bar I}, \hat\lambda_1, \ldots, \hat\lambda_{n-1}). \tag{4.7}$$

Если $P(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — некоторый полином, постоянный вдоль I-диагонали и обобщенная функция f принадлежит $\mathscr{D}'(R^{|I|})$, то через

$$f((\lambda_1)_I + \ldots + (\lambda_n)_I) \times P(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

будем обозначать обобщенную функцию из $\mathscr{D}'(R^{n\nu})$, совпадающую при переходе к системе координат (4.6) с функцией $f((\hat\lambda_0)_I) \times \hat P((\hat\lambda_0)_{\bar I}, \hat\lambda_1, \ldots, \hat\lambda_{n-1})$. В случае, когда обобщенная функция f является на самом деле обычной функцией (т. е., как иногда говорят, регулярной обобщенной функцией, см., например, [13, § 1.6]), то $f((\lambda_1)_I + \ldots + (\lambda_n)_I) \times P(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — это просто произведение $f((\lambda_1)_I + \ldots + (\lambda_n)_I) P(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Лемма 4.2. *Обобщенная функция $f \in \mathscr{D}'(R^{n\nu})$ с носителем на гиперплоскости $\mathscr{L}_I$ инвариантна относительно сдвигов из этой гиперплоскости в том и только в том случае, когда ее преобразование Фурье имеет вид*

$$Ff = \delta((\lambda_1)_I + \ldots + (\lambda_n)_I) \times P(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \tag{4.8}$$

где $P(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — некоторый полином от переменных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in R^\nu$, постоянный вдоль I-диагонали. Для любой такой функции f представление вида (4.8) единственно.

Доказательство. Перейдем к системе координат $(\hat x_0, \hat x_1, \ldots, \hat x_{n-1})$, заданной формулами (4.6) с λ_i и $\hat\lambda_i$, замененными на x_i и $\hat x_i$, и применим лемму 4.1 при $m = n\nu$, $u = (\hat x_0)_I \in R^{|I|}$, $v = ((\hat x_0)_{\bar I}, \hat x_1, \ldots, \hat x_{n-1}) \in R^{n\nu-|I|}$. Переходя к преобразованию Фурье в формуле (4.4) и пользуясь известными свойствами преобразования Фурье (см., например, [13, § 6.3]), получаем, что

$$Ff = \delta((\hat\lambda_0)_I) \times \hat P((\hat\lambda_0)_{\bar I}, \hat\lambda_1, \ldots, \hat\lambda_{n-1}), \tag{4.9}$$

где $\hat P$ — некоторый полином от соответствующих переменных, что эквивалентно формуле (4.8). Единственность представления вида (4.8) следует из очевидной единственности способа представления обобщенной функции в виде прямого произведения обобщенных функций при заданном разбиении переменных на две группы.

Используя лемму 4.2 (точнее, ее частный случай при $I = I_0$), легко доказать следующую теорему, дающую описание класса спектральных функций.

Теорема 4.1. А. *Пусть* $\widetilde{\Phi}_n \in \mathscr{D}'(R^{n\nu})$ — *спектральная функция такого симметричного диагонального аддитивного функционала* $\overline{\Phi}_n$ *со значениями в* $\mathfrak{Y}'(R^{n\nu})$, *что его Фурье-прообраз диагонально инвариантен.*

Тогда обобщенная функция $F\widetilde{\Phi}_n$ *допускает представление*

$$F\widetilde{\Phi}_n = \delta(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) \times P(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \tag{4.10}$$

где $P(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — *некоторый полином, постоянный вдоль диагонали и симметричный по переменным* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in R^\nu$, *и такое представление единственно.*

Б. *Если обобщенная функция* $F\widetilde{\Phi}_n$ *допускает представление вида* (4.10) *где* $P(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — *некоторый постоянный вдоль диагонали и симметричный по переменным* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in R^\nu$ *полином, то существует такой симметричный диагональный аддитивный функционал* $\overline{\Phi}_n$ *со значениями, в* $\mathfrak{Y}'(R^{n\nu})$, *имеющий диагонально инвариантный Фурье-прообраз и такой, что* $\widetilde{\Phi}_n$ — *его спектральная функция.*

Доказательство. Вначале докажем утверждение А. Возможность представления вида (4.10) спектральной функции $\widetilde{\Phi}_n$ следует из предложения 4.1 и леммы 4.2, примененной при $I = I_0$. Симметричность полинома P следует из симметричности спектральной функции $\widetilde{\Phi}_n \in \mathscr{D}'(R^{n\nu})$ и отмечавшейся в лемме 4.2 однозначности представления (4.8) (даже с априори несимметричным полиномом P). Для доказательства утверждения Б рассмотрим такой функционал $\overline{\Phi}_n$ со значениями в $\mathfrak{Y}'(R^{n\nu})$, что Φ_n^V — обычная функция, заданная формулой

$$\Phi_n^V = F\chi_V(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)\, P(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \tag{4.11}$$

где χ_V — индикатор множества V. Легко проверить, что этот функционал обладает перечисленными в утверждении Б теоремы свойствами и имеет спектральную функцию (4.10). Отметим (ср. переход от (4.4) к (4.8)), что в силу представления (4.10) сама спектральная функция $\widetilde{\Phi}_n$ допускает в системе координат $(\hat{x}_0, \ldots, \hat{x}_{n-1})$ представление вида

$$\widetilde{\Phi}_n = 1_{\hat{x}_0} \times \sum_{\alpha \in A_{\bar{x}}^N} a_\alpha D^\alpha \delta_{\bar{x}}, \quad \bar{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{n-1}), \tag{4.12}$$

где N — некоторое натуральное число, a_α $(\alpha \in A_{\bar{x}}^N)$ — некоторые комплексные числа.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Саймон Б.* Модель $P(\varphi_2)$ евклидовой квантовой теории поля. М.: Мир, 1976, 357 с.
2. Конструктивная теория поля. М.: Мир, 1977, 268 с.
3. *Розанов Ю. А.* Марковские случайные поля. М.: Наука, 1981, 256 с.
4. *Добрушин Р. Л., Кельберт М. Я.* Локальные аддитивные функционалы от гауссовских обобщенных полей.— Успехи матем. наук, 1979, т. 34, № 5, с. 223—224.
5. *Кельберт М. Я.* Структура локальных аддитивных функционалов от гауссовских обобщенных полей.— В сб.: Тезисы докладов III Международной Вильнюсской

конференции по теории вероятностей и математической статистике. Т. I. Вильнюс: Ин-т физики и математики АН ЛитССР, 1981, с. 229—230.

6. *Гельфанд И. М.*, *Виленкин Н. Я.* Обобщенные функции. Вып. 4. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. М.: Физматгиз, 1961, 472 с.
7. *Hida T.* Stationary stochastic processes. New Jersey: Princeton University Press, 1970, 161 p.
8. *Itô K.* Multiple Wiener integral.— J. Math. Soc. Japan, 1951, v.3, № 1, p. 157—169.
9. *Dobrushin R. L.* Gaussian and their subordinated self - similar random generalized fields.— Ann. Probab., 1979, v. 7, № 1, p. 1—28.
10. *Добрушин Р. Л.*, *Минлос Р. А.* Полиномы от линейных случайных функций.— Успехи матем. наук, 1977, т. XXXII, № 2, с. 67—122.
11. *Major P.* Multiple Wiener—Itô Integrals.— Lect. Notes Math., v. 849, 1981, 126 p.
12. *Добрушин Р. Л.*, *Минлос Р. А.* Исследование свойств обобщенных гауссовских случайных полей.— В сб.: Задачи механики и математической физики. М.: Наука, 1976, с. 117—165.
13. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979, 318 с.

Поступила в редакцию
18.III.1981

LOCAL ADDITIVE FUNCTIONALS OF GAUSSIAN RANDOM FIELDS

DOBRUŠIN R. L., KEL'BERT M. Ja. (*MOSCOW*)

(*Summary*)

Local additive functional Ξ is a random finite-additive measure whose value on the parallelepiped $V \subset R^\nu$ belongs to the σ-algebra $\mathfrak{B}_V$ generated by the values of generalized Gaussian random field $\zeta = \{\zeta(\varphi), \varphi \in \mathfrak{D}(R^\nu)\}$ on V. This functionals are described in terms of their representation as multiple stochastic Wiener — Ito integrals.