



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Е. Гурина, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, Численное и аналитическое решение задачи дифракции электромагнитного поля на диэлектрическом параллелепипеде, расположенном в прямоугольном волноводе, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2010, выпуск 2, 44–53

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.81

18 января 2025 г., 17:54:02



**ЧИСЛЕННОЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ  
ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ  
НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ,  
РАСПОЛОЖЕННОМ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ**

*Аннотация.* Рассмотрена задача дифракции электромагнитного поля на диэлектрическом теле в форме параллелепипеда, расположенном в прямоугольном волноводе. Получено аналитическое решение уравнений Максвелла для случая заполненной секции волновода. Представлены результаты численных расчетов решения интегродифференциального уравнения методом коллокации.

*Ключевые слова:* электромагнитная задача дифракции, аналитическое решение задачи дифракции, метод коллокаций.

*Abstract.* Electromagnetic diffraction problem on a dielectric body in a rectangular waveguide is considered. In the case of filled waveguide's section the analytical solution of Maxwell equations is obtained. Numerical results for the solution of integro-differential equation by collocation method are presented.

*Keywords:* electromagnetic diffraction problem, analytical solution of diffraction problem, collocation method.

**Введение**

Актуальной задачей нанотехнологий и наноэлектроники является определение диэлектрических и магнитных параметров нанокomпозитных материалов и сложных наноструктур. Данную задачу приходится решать с помощью методов математического моделирования, так как она не может быть решена экспериментально. При этом необходимо выполнять большой объем вычислений, что требует больших временных затрат даже на самых современных суперкомпьютерах. Известные пакеты прикладных программ (Ansis, Quikwave и т.д.) не позволяют получить удовлетворительных по точности результатов.

В настоящей статье предлагается аналитическое решение уравнений Максвелла для случая заполнения секции волновода. Также приводятся результаты численных расчетов решения интегродифференциального уравнения методом коллокации.

**1. Постановка задачи и численный метод**

Пусть в декартовой системе координат  $P = \{x: 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, -\infty < x_3 < \infty\}$  – волновод с идеально проводящей поверхностью  $\partial P$ . В волноводе расположено объемное тело  $Q$  ( $Q \subset P$  – область), характеризующееся постоянной магнитной проницаемостью  $\mu_0$  и положительной  $3 \times 3$ -матрицей-функцией (тензором) диэлектрической проницаемости  $\hat{\epsilon}(x)$ . Компоненты  $\hat{\epsilon}(x)$  являются ограниченными функциями в области  $\bar{Q}$ ,  $\hat{\epsilon} \in L_\infty(Q)$ , а также  $\hat{\epsilon}^{-1} \in L_\infty(Q)$ .

Требуется определить электромагнитное поле  $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_{2, \text{loc}}(P)$ , возбуждаемое в волноводе сторонним полем с временной зависимостью вида  $e^{-i\omega t}$  [1–3]. Источник стороннего поля – электрический ток  $\mathbf{j}^0 \in L_{2, \text{loc}}(P)$ . В области  $P \subset R^3$  стандартные дифференциальные операторы grad, div, rot понимаются в смысле обобщенных функций.

Решение уравнений Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = -i\omega \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{E} + \mathbf{j}_E^0, \quad \text{rot } \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{H} \quad (1)$$

в совокупности с условиями на бесконечности и краевыми условиями, описанными в [4, 5], сводится к решению интегродифференциального уравнения

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \left( \text{grad div} + k_0^2 \right) \int_Q \hat{\mathbf{G}}_E \left( \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\varepsilon_0} - \mathbf{I} \right) \mathbf{E} dy. \quad (2)$$

Компоненты диагонального тензора Грина  $\hat{\mathbf{G}}_E$  имеют вид

$$G_E^1 = \frac{2}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}(1+\delta_{0n})} \cos \frac{\pi n}{a} x_1 \sin \frac{\pi m}{b} x_2 \cos \frac{\pi n}{a} y_1 \sin \frac{\pi m}{b} y_2; \quad (3)$$

$$G_E^2 = \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}(1+\delta_{0m})} \sin \frac{\pi n}{a} x_1 \cos \frac{\pi m}{b} x_2 \sin \frac{\pi n}{a} y_1 \cos \frac{\pi m}{b} y_2; \quad (4)$$

$$G_E^3 = \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}} \sin \frac{\pi n}{a} x_1 \sin \frac{\pi m}{b} x_2 \sin \frac{\pi n}{a} y_1 \sin \frac{\pi m}{b} y_2. \quad (5)$$

В этих выражениях  $\gamma_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 - k_0^2}$ , при этом ветвь квадратного корня выбирается так, чтобы  $\text{Im } \gamma_{nm} \geq 0$ ,  $\delta_{nm}$  – символ Кронекера.

Предполагая, что тензор диэлектрической проницаемости тела  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)$  удовлетворяет условиям  $\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)}{\varepsilon_0} - \mathbf{I}\right)$ , обратим в  $\bar{Q}$ ,  $\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)}{\varepsilon_0} - \mathbf{I}\right)^{-1} \in L_{\infty}(Q)$ , где  $\mathbf{I}$  – единичный тензор, и, вводя обозначения

$$\boldsymbol{\xi} = \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)}{\varepsilon_0} - \mathbf{I}\right)^{-1}, \quad \mathbf{J} := \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)}{\varepsilon_0} - \mathbf{I}\right) \mathbf{E},$$

переходим к следующему уравнению:

$$A\mathbf{J} = \boldsymbol{\xi} \mathbf{J}(x) - k_0^2 \int_Q \hat{\mathbf{G}}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy - \text{grad div} \int_Q \hat{\mathbf{G}}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy = \mathbf{E}^0(x). \quad (6)$$

Применим метод коллокации для решения уравнения (6). Представим его в виде системы трех скалярных уравнений:

$$\sum_{i=1}^3 \xi_{li} J^i(x) - k_0^2 \int_Q \mathbf{G}(x, y) J^l(y) dy - \frac{\partial}{\partial x_l} \operatorname{div}_x \int_Q \mathbf{G}(x, y) \mathbf{J}(y) dy = E^{0l}(x), l=1, 2, 3.$$

Будем искать компоненты приближенного решения  $\bar{\mathbf{J}}$  в виде

$$\bar{J}^1 = \sum_{k=1}^N \alpha_k^1 f_k^1(x), \quad \bar{J}^2 = \sum_{k=1}^N \alpha_k^2 f_k^2(x), \quad \bar{J}^3 = \sum_{k=1}^N \alpha_k^3 f_k^3(x),$$

где  $f_k^i$  – базисные функции. Построим базисные функции  $f_k^i$ . Будем считать, что  $Q$  – параллелепипед:  $Q = \{x : a_1 < x_1 < a_2, b_1 < x_2 < b_2, c_1 < x_3 < c_2\}$ . Разобьем тело  $Q$  на элементарные параллелепипеды:

$$\Pi_{klm} = \left\{ x : x_{1,k} < x_1 < x_{1,k+1}, x_{2,l} < x_2 < x_{2,l+1}, x_{3,m} < x_3 < x_{3,m+1} \right\};$$

$$x_{1,k} = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{n} k, \quad x_{2,l} = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{n} l, \quad x_{3,m} = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{n} m,$$

где  $k, l, m = 0, \dots, n-1$ .

Будем также считать, что шаг по каждой координате постоянен:  $h^i := |x_{i,k} - x_{i,k-1}|$ . Наряду с обычной нумерацией нам удобно будет ввести трехиндексную нумерацию базисных функций. Определим  $f_{klm}^i$  ( $i=1, 2, 3$ ):

$$f_{klm}^i = \begin{cases} 1, & x \in \bar{\Pi}_{klm}, \\ 0, & x \notin \bar{\Pi}_{klm}. \end{cases}$$

Расширенную матрицу для нахождения неизвестных коэффициентов  $\alpha_k^1, \alpha_k^2, \alpha_k^3$  удобно представить в блочной форме:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_3 \end{array} \right).$$

Элементы данной матрицы определяются соотношением

$$B_k^j = E_0^k(x_j);$$

$$A_{kl}^j = \xi_{kl} f_i^l(x_j) - \delta_{kl} k_0^2 \int_Q G^k(x_j, y) f_i^l(y) dy - \frac{\partial}{\partial x_k} \int_Q \frac{\partial}{\partial x_l} G^l(x_j, y) f_i^l(y) dy,$$

где координаты точек коллокации имеют вид

$$x_j = (x_{j1}, x_{j2}, x_{j3}); \quad x_{j1} = (j_1 + 1/2)h_1, \quad x_{j2} = (j_2 + 1/2)h_2, \quad x_{j3} = (j_3 + 1/2)h_3,$$

$$k, l = 1, 2, 3; \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Далее будет получено аналитическое решение уравнений (1), а также представлены результаты численных расчетов для метода коллокации.

## 2. Аналитическое решение в частном случае для задачи дифракции

Пусть тело  $Q$  представляет собой секцию волновода:  $Q = \{x : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, 0 < x_3 < c\}$  (рис 1).

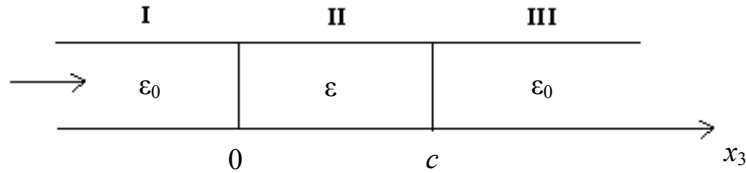


Рис. 1

Будем предполагать, что размеры волновода удовлетворяют условию

$$\frac{\pi}{a} < k_0 < \frac{\pi}{b},$$

при котором распространяется только одна волна в волноводе [1].

Рассмотрим поведение поля внутри тела. Предположим, что падающее поле имеет вид

$$E = A \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) e^{-i\gamma_1 x_3} \mathbf{e}_2.$$

Тогда в области I ( $x_3 \in (-\infty, 0)$ ) полное поле (как сумма падающей и отраженной волн) имеет представление

$$\mathbf{E} = \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \left( A e^{-i\gamma_1 x_3} + B e^{i\gamma_1 x_3} \right) \mathbf{e}_2, \quad (7)$$

где  $\gamma_1 = \sqrt{k_0^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}$ ,  $\gamma = \sqrt{k^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}$ .

В области II ( $x_3 \in (0, c)$ ) поле имеет вид

$$\mathbf{E} = \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \left( C e^{-i\gamma x_3} + D e^{i\gamma x_3} \right) \mathbf{e}_2. \quad (8)$$

В области III ( $x_3 \in (c, +\infty)$ ) поле имеет представление

$$\mathbf{E} = \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) F e^{-i\gamma_1 x_3} \mathbf{e}_2. \quad (9)$$

На границе областей I и II, а также на границе областей II и III должны выполняться условия сопряжения [7]:

$$[E_2]_{x_3=0} = [E_2]_{x_3=c} = 0;$$

$$[H_1]_{x_3=0} = [H_1]_{x_3=c} = 0 \Leftrightarrow \left[ \frac{\partial E_2}{\partial x_3} \right]_{x_3=0} = \left[ \frac{\partial E_2}{\partial x_3} \right]_{x_3=c} = 0,$$

где  $\mathbf{E} = E_2 \mathbf{e}_2$ .

Для коэффициентов  $A, B, C, D$  и  $F$  получаем уравнения при  $x_3 = 0$ :

$$\begin{cases} A + B = C + D, \\ \gamma_1 (B - A) = \gamma (D - C), \end{cases}$$

откуда находим

$$\begin{cases} D = \frac{1}{2} \left( A + B + \frac{\gamma_1}{\gamma} (B - A) \right), \\ C = \frac{1}{2} \left( A + B - \frac{\gamma_1}{\gamma} (B - A) \right). \end{cases}$$

При  $x_3 = c$ :

$$\begin{cases} F e^{-i\gamma_1 c} = C e^{-i\gamma c} + D e^{i\gamma c}, \\ -F \gamma_1 e^{-i\gamma_1 c} = \gamma (-C e^{-i\gamma c} + D e^{i\gamma c}). \end{cases}$$

Коэффициент  $A$  известен, для коэффициентов  $B, C, D$  и  $F$  получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} B &= 2iA \frac{\left(1 - \frac{\gamma_1^2}{\gamma^2}\right) \sin(\gamma c)}{\left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^2 e^{-i\gamma c} - \left(1 + \frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^2 e^{i\gamma c}}; \quad C = \frac{1}{2} \left( A \left(1 + \frac{\gamma_1}{\gamma}\right) + B \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma}\right) \right); \\ D &= \frac{1}{2} \left( A \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma}\right) + B \left(1 + \frac{\gamma_1}{\gamma}\right) \right); \quad F = - \frac{2A\gamma_1 e^{i\gamma_1 c}}{\gamma \left( \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^2 e^{-i\gamma c} - \left(1 + \frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^2 e^{i\gamma c} \right)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Покажем, что поле  $E = \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \left( C e^{-i\gamma x_3} + D e^{i\gamma x_3} \right) \mathbf{e}_2$  с найденными выше значениями коэффициентов  $C$  и  $D$  удовлетворяет уравнению (2).

Имеем

$$\int_Q \widehat{\mathbf{G}}_E (E_2 \mathbf{e}_2) \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) dy = \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \int_Q G_E^2 E_2 dy \mathbf{e}_2.$$

Обозначим

$$W \equiv \int_Q G_E^2 E_2 dy.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{ab\gamma_{10}} \int_0^a dy_1 \int_0^b dy_2 \int_0^c dy_3 \left( Ce^{-i\gamma y_3} + De^{i\gamma y_3} \right) \sin^2 \frac{\pi y_1}{a} \cdot e^{-\gamma_{10}|x_3 - y_3|} \sin \frac{\pi x_1}{a} = \\
 &= \frac{1}{2\gamma_{10}} \int_0^c dy_3 \left( Ce^{-i\gamma y_3} + De^{i\gamma y_3} \right) \cdot e^{-\gamma_{10}|x_3 - y_3|} \sin \frac{\pi x_1}{a} = \frac{\sin \frac{\pi x_1}{a}}{2\gamma_{10}} \times \\
 &\times \left( e^{-\gamma_{10}x_3} \int_0^{x_3} \left( Ce^{-i\gamma y_3} + De^{i\gamma y_3} \right) \cdot e^{\gamma_{10}y_3} dy_3 + e^{\gamma_{10}x_3} \int_{x_3}^c \left( Ce^{-i\gamma y_3} + De^{i\gamma y_3} \right) \cdot e^{-\gamma_{10}y_3} dy_3 \right).
 \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \int_0^{x_3} \left( Ce^{-i\gamma y_3} + De^{i\gamma y_3} \right) \cdot e^{\gamma_{10}y_3} dy_3; \\
 \beta &= \int_{x_3}^c \left( Ce^{-i\gamma y_3} + De^{i\gamma y_3} \right) \cdot e^{-\gamma_{10}y_3} dy_3.
 \end{aligned}$$

Имеем

$$W = \frac{\sin \frac{\pi x_1}{a}}{2\gamma_{10}} \left( \alpha e^{-\gamma_{10}x_3} + \beta e^{\gamma_{10}x_3} \right).$$

Так как  $\text{grad} \frac{\partial W}{\partial x_2} = 0$ , получаем

$$\left( \text{grad div} + k_0^2 \right) (W \mathbf{e}_2) = \text{grad} \frac{\partial W}{\partial x_2} + k_0^2 W \mathbf{e}_2 = k_0^2 W \mathbf{e}_2.$$

Вычислим  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\begin{aligned}
 \beta &= \int_{x_3}^c \left( Ce^{-i\gamma y_3} + De^{i\gamma y_3} \right) \cdot e^{-\gamma_{10}y_3} dy_3 = \int_{x_3}^c \left( Ce^{(-i\gamma - \gamma_{10})y_3} + De^{(i\gamma - \gamma_{10})y_3} \right) dy_3 = \\
 &= C \frac{e^{(-i\gamma - \gamma_{10})c}}{-i\gamma - \gamma_{10}} + D \frac{e^{(i\gamma - \gamma_{10})c}}{i\gamma - \gamma_{10}} + C \frac{e^{(-i\gamma - \gamma_{10})x_3}}{i\gamma + \gamma_{10}} + D \frac{e^{(i\gamma - \gamma_{10})x_3}}{-i\gamma + \gamma_{10}}; \\
 \alpha &= \int_0^{x_3} \left( Ce^{-i\gamma y_3} + De^{i\gamma y_3} \right) \cdot e^{\gamma_{10}y_3} dy_3 = \\
 &= C \frac{e^{(-i\gamma + \gamma_{10})x_3}}{-i\gamma + \gamma_{10}} + D \frac{e^{(i\gamma + \gamma_{10})x_3}}{i\gamma + \gamma_{10}} - C \frac{1}{-i\gamma + \gamma_{10}} - D \frac{1}{i\gamma + \gamma_{10}}.
 \end{aligned}$$

Зная, что  $\gamma_{10} = i\gamma_1$ , находим

$$\begin{aligned} \alpha e^{-\gamma_{10}x_3} + \beta e^{\gamma_{10}x_3} &= \left( Ce^{-i\gamma x_3} + De^{i\gamma x_3} \right) \frac{2\gamma_1}{i(\gamma_1^2 - \gamma^2)} + \\ &+ e^{-i\gamma_1 x_3} \left( \frac{C}{i(\gamma - \gamma_1)} - \frac{D}{i(\gamma + \gamma_1)} \right) + \\ &+ e^{i\gamma_1 x_3} \left( -C \frac{e^{-i(\gamma + \gamma_1)c}}{i(\gamma + \gamma_1)} + D \frac{e^{i(\gamma - \gamma_1)c}}{i(\gamma - \gamma_1)} \right). \end{aligned}$$

Так как

$$E - E^0 = \left( Ce^{-i\gamma x_3} + De^{i\gamma x_3} \right) \sin \frac{\pi x_1}{a} - Ae^{-i\gamma_1 x_3} \sin \frac{\pi x_1}{a},$$

остается проверить, что

$$\begin{aligned} -Ae^{-i\gamma_1 x_3} &= \frac{k_0^2}{2i\gamma_1} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \left[ e^{i\gamma_1 x_3} \left( C \frac{e^{-i(\gamma + \gamma_1)c}}{-i(\gamma + \gamma_1)} + D \frac{e^{i(\gamma - \gamma_1)c}}{i(\gamma - \gamma_1)} \right) \right] + \\ &+ e^{-i\gamma_1 x_3} \left( \frac{C}{i(\gamma - \gamma_1)} - \frac{D}{i(\gamma + \gamma_1)} \right). \end{aligned}$$

Последнее тождество равносильно двум следующим:

$$A = \frac{k_0^2}{2\gamma_1} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \left( \frac{C}{(\gamma - \gamma_1)} - \frac{D}{(\gamma + \gamma_1)} \right); \quad (11)$$

$$C \frac{e^{-i(\gamma + \gamma_1)c}}{(\gamma + \gamma_1)} = D \frac{e^{i(\gamma - \gamma_1)c}}{(\gamma - \gamma_1)}. \quad (12)$$

Покажем, что верно (11):

$$\begin{aligned} &\frac{k_0^2}{2\gamma_1} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \left( \frac{C}{\gamma - \gamma_1} - \frac{D}{\gamma_1 + \gamma} \right) = \\ &= \frac{k_0^2}{2\gamma_1} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \left[ \frac{1}{2} A \left( 1 + \frac{\gamma_1}{\gamma} \right) \frac{1}{(\gamma - \gamma_1)} + \frac{1}{2} B \left( 1 - \frac{\gamma_1}{\gamma} \right) \frac{1}{(\gamma - \gamma_1)} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} A \left( 1 - \frac{\gamma_1}{\gamma} \right) \frac{1}{(\gamma + \gamma_1)} - \frac{1}{2} B \left( 1 + \frac{\gamma_1}{\gamma} \right) \frac{1}{(\gamma + \gamma_1)} \right] = k_0^2 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) A \frac{1}{(\gamma^2 - \gamma_1^2)} = A. \end{aligned}$$

Покажем также, что выполняется (12):

$$\frac{Ce^{-i\gamma c}}{\gamma + \gamma_1} = \frac{De^{i\gamma c}}{\gamma - \gamma_1};$$



$$\frac{\left[ A \left( 1 + \frac{\gamma_1}{\gamma} \right) + B \left( 1 - \frac{\gamma_1}{\gamma} \right) \right] e^{-i\gamma c}}{\gamma + \gamma_1} = \frac{\left[ A \left( 1 - \frac{\gamma_1}{\gamma} \right) + B \left( 1 + \frac{\gamma_1}{\gamma} \right) \right] e^{i\gamma c}}{\gamma - \gamma_1};$$

$$\frac{A}{\gamma} e^{-i\gamma c} + B e^{-i\gamma c} \frac{\gamma - \gamma_1}{\gamma(\gamma + \gamma_1)} = \frac{A}{\gamma} e^{i\gamma c} + B e^{i\gamma c} \frac{\gamma + \gamma_1}{\gamma(\gamma - \gamma_1)},$$

откуда

$$B = 2iA \sin(\gamma c) \frac{\left( 1 - \frac{\gamma_1^2}{\gamma^2} \right)}{e^{-i\gamma c} \left( 1 - \frac{\gamma_1}{\gamma} \right)^2 - e^{i\gamma c} \left( 1 + \frac{\gamma_1}{\gamma} \right)^2}.$$

Таким образом,  $\mathbf{E} = \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \left( C e^{-i\gamma x_3} + D e^{i\gamma x_3} \right) \mathbf{e}_2$  является решением уравнений Максвелла. Отсюда следует, что формулы (7)–(9) и (10) дают аналитическое решение поставленной задачи.

### 3. Сравнение численного и аналитического решений

На рис. 2–4 представлено сравнение аналитического и численного решений по слоям для диэлектрического при  $n = 7$ . Слева приведено аналитическое решения, справа – численное решение. Размеры волновода и электродинамические параметры:  $a = 2, b = 1, c = 2, \epsilon = 1,5, k_0 = 2,5$ .

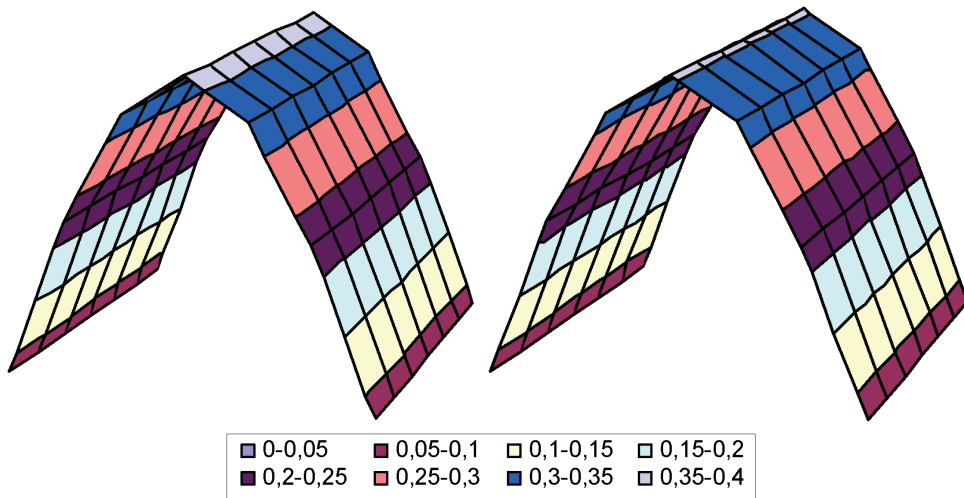


Рис. 2. Первый слой,  $x_3 = 0,0$ . Максимум модуля разности поля на слое равен 0,00783

Расчеты показывают хорошее согласие численного решения с аналитическими результатами.

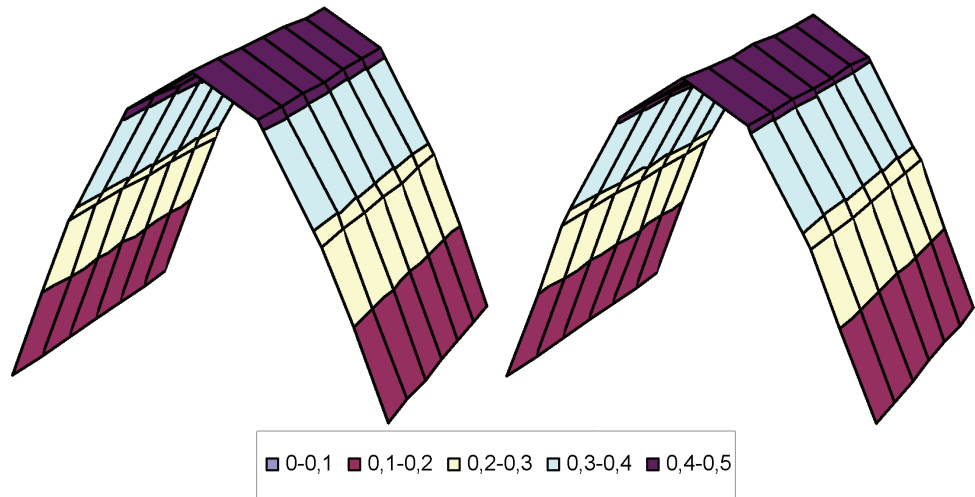


Рис. 3. Четвертый слой,  $x_3 = 1,0$ . Максимум модуля разности поля на слое равен 0,00447

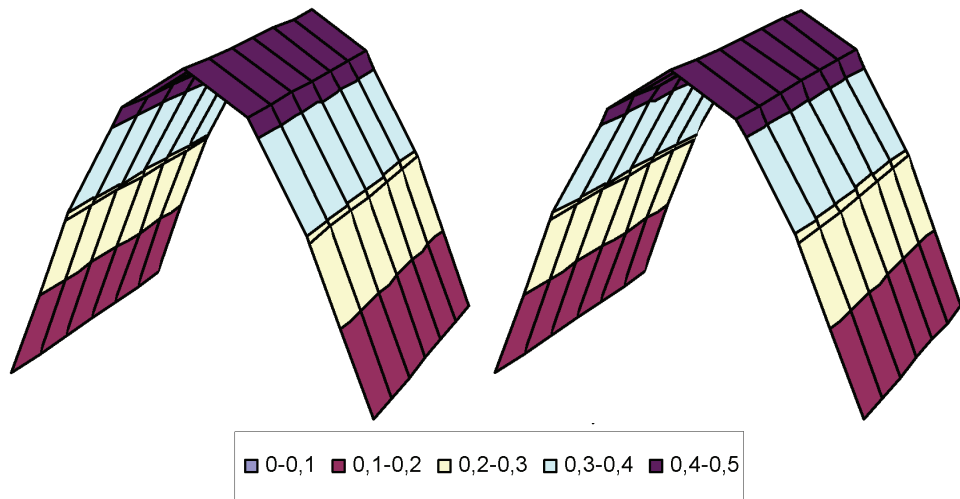


Рис. 4. Седьмой слой,  $x_3 = 2,0$ . Максимум модуля разности поля на слое равен 0,00196

#### Список литературы

1. **Баскаков, С. И.** Электродинамика и распространение радиоволн / С. И. Баскаков. – М. : Высш. шк., 1992.
2. **Медведик, М. Ю.** Применение ГРИД-технологий для решения объемного сингулярного интегрального уравнения для задачи дифракции на диэлектрическом теле субиерархическим методом / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – № 2. – С. 2–14.
3. **Смирнов, Ю. Г.** Применение ГРИД-технологий для решения нелинейного объемного сингулярного интегрального уравнения для определения эффективной диэлектрической проницаемости наноматериалов / Ю. Г. Смирнов // Известия

- высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – № 3. – С. 2–10.
4. **Смирнов, Ю. Г.** О существовании и единственности решений обратной краевой задачи для определения эффективной диэлектрической проницаемости наноматериалов / Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 1. – С. 11–24.
  5. **Васюнин, Д. И.** Метод коллокации решения объемного сингулярного интегрального уравнения в задаче определения диэлектрической проницаемости материала / Д. И. Васюнин, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 3. – С. 68–78.
  6. **Смирнов, Ю. Г.** О существовании и единственности решений обратной краевой задачи для определения эффективной диэлектрической проницаемости наноматериалов / Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 1. – С. 11–24.
  7. **Вайнштейн, Л. А.** Электромагнитные волны / Л. А. Вайнштейн. – М. : Радио и связь, 1988.

---

**Гурина Елена Евгеньевна**

аспирант, Пензенский государственный университет

E-mail: mmm@pnzgu.ru

**Gurina Elena Evgenyevna**

Postgraduate student,  
Penza state university

**Медведик Михаил Юрьевич**

кандидат физико-математических наук,  
доцент, кафедра математики  
и суперкомпьютерного моделирования,  
Пензенский государственный  
университет

E-mail: \_medv@mail.ru

**Medvedik Mikhail Yuryevich**

Candidate of physical and mathematical  
sciences, associate professor,  
sub-department of mathematics  
and supercomputer modeling,  
Penza State University

**Смирнов Юрий Геннадьевич**

доктор физико-математических наук,  
профессор, заведующий кафедрой  
математики и суперкомпьютерного  
моделирования, Пензенский  
государственный университет

E-mail: smirnovyug@mail.ru

**Smirnov Yury Gennadyevich**

Doctor of physical and mathematical  
sciences, professor, head of sub-department  
of mathematics and supercomputer  
modeling, Penza State University

---

УДК 517.9; 517.958

**Гурина, Е. Е.**

**Численное и аналитическое решение задачи дифракции электромагнитного поля на диэлектрическом параллелепипеде, расположенном в прямоугольном волноводе / Е. Е. Гурина, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 2 (14). – С. 44–53.**