Математические заметки

том 47 выпуск 4 апрель 1990

МЕТОД РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИИ ОТ ОПЕРАТОРА В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

И. И. Голичев, Р. Л. Лукманов

В работе рассматривается задача минимизации квадратичного функционала без ограничений и с ограничениями на управление на решениях линейного эволюционного уравнения. С помощью условия оптимальности получено представление решения задачи в виде функции от оператора. Используя это представление, получен быстро сходящийся итерационный процесс для построения решения рассматриваемой задачи.

1. Изучается следующая задача: найти

$$\inf_{v \in L_2(0,\,T;\,H)} J_\nu(v)\left[J_\nu(v) = \|y(T) - z_{\text{д}}\|^2 + \nu\int_0^T \|v\|^2\,dt\right], \tag{1}$$

где H — некоторое гильбертово пространство, $z_{\text{д}} \in H$, $0 < T < \infty$, $\nu \geqslant 0$, а $y(t)$ — обобщенное решение (см. [1, п. 2]) задачи

$$\frac{dy}{dt} + Ly = v, \qquad y(0) = \varphi, \tag{2}$$

т. е. задача на минимизацию функционала без ограничений на управление.

Рассматривается также задача с ограничениями: найти

$$\inf_{v \in U} J_0(v), \tag{3}$$

если $y(t, v)$ — обобщенное решение задачи (2), а

$$U = \left\{v \in L_2(0, T; H)\colon \left(\int_0^T \|v\|^2\,dt\right)^{1/2} \leqslant R\right\}. \tag{4}$$

В работе показано, что решение задачи (2)—(4) с ограничениями на управление сводится к решению задачи (1), (2) при соответствующем выборе параметра.

Сформулированные здесь задачи рассматривались многими авторами. Настоящая работа наиболее близко примыкает к работам [2—4]. В работе [2, § 6.1] рассматривается задача (1), (2), когда оператор L порожден простейшим дифференциальным выражением второго порядка $\left(Lu = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ на интервале $[0, l]$ и третьими краевыми условиями. В работе [3] рассматривается задача (2)—(4), когда L порождается дифференциальным выражением

$$l[u] = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a(x)u$$

в ограниченной области $\Omega \subset R^n$ и однородными краевыми условиями первого рода. В этих работах решение рассматриваемых задач ищется через собственные функции оператора L. Однако задача отыскания собственных функций оператора L, за исключением некоторых простейших случаев, сама является сложной задачей. Если же область Ω не ограничена, то оператор L может вообще не иметь собственных функций.

Введем некоторые обозначения, используемые в работе. Через $(\cdot, \cdot)$, $\|\cdot\|$ обозначим скалярное произведение и норму в H.

Пусть V — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_V$, причем $V \subset H$, V плотно в H и $\|\cdot\|_V \geqslant \|\cdot\|$. Будем считать, что оператор L порождается билинейной формой $L(u, v)$, определенной на V (см. [5]), которая удовлетворяет следующему условию:

$$\mu_1 \|u\|_V^2 \leqslant L(u, u) + a\|u\|^2 \leqslant \mu_2 \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V \tag{5}$$

при некотором вещественном a и положительных μ_1, μ_2.

Ясно, что тогда

$$L(u, u) \geqslant \delta \|u\|^2 \quad \forall u \in V,$$

а соотношение (5) можно записать в виде

$$\mu_1 \|u\|_V^2 \leqslant \|(L + aI)^{1/2} u\|^2 \leqslant \mu_2 \|u\|_V^2. \tag{5'}$$

Через $L_2(0, t; H)$ $(L_2(0, t; V))$ будем обозначать пространство вектор-функций со скалярным произведением $\int_0^t (u(\tau), v(\tau))\,d\tau \times \times \left(\int_0^t (u(\tau), v(\tau))_V d\tau\right)$.

Решение задачи (2) при $\varphi \in H$ понимается как обобщенное решение из $L_2(0, T; V)$.

Если, например, L порождается дифференциальным выражением $l[\cdot]$ с ограниченными коэффициентами и однородными краевыми условиями первого рода, то билинейная форма $L(u, v) = \int_\Omega (a_{ij} u_{x_j} v_{x_i} + auv)\,dx$ определена на $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. В этом случае $V = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ с $(u, v)_V = (u, v)_{W_2^1(\Omega)}$. Условие (5) здесь, очевидно, выполнено.

Обозначим далее

$$I_\infty^\nu = \{u \in L_2(0, T; H)\colon\ J_\nu(u) = \inf_{v \in L_2(0,\, T;\, H)} J_\nu(v)\} \qquad (\nu \geqslant 0),$$

$$I_R^0 = \{u \in U\colon\ J_0(u) = \inf_{v \in U} J_0(v)\}.$$

Если $\nu = 0$, то решение задачи (1), (2) и задачи (2)—(4) может быть не единственным. Назовем нормальным оптимальным управлением $u_{\text{н}}$ то из них, которое имеет наименьшую норму, т. е.

$$|||\, u_{\text{н}} \,||| = \min_{v \in I_\infty^0} |||\, v \,|||,$$

где $|||\, v \,|||$ — норма в $L_2\,(0,\ T;\ H)$.

Напомним для дальнейшего, что функция $F\,(L)$ от самосопряженного оператора L задается с помощью интеграла (см. [6, п. 88])

$$F(L) = \int_{A_1}^{A_2} F(\lambda)\, \mathrm{d}E_\lambda,$$

где E_λ — спектральное семейство оператора L, спектр которого лежит на интервале $[A_1,\ A_2]$ $(A_1 \geqslant -\infty,\ A_2 \leqslant +\infty)$, а функция $F\,(\lambda)$ измерима и ограничена на $[A_1,\ A_2]$.

2. Рассмотрим вначале задачу (1), (2).

ТЕОРЕМА 1. *Пусть самосопряженный оператор* L *удовлетворяет условию* (5), *а* $\varphi,\ z_{\text{д}} \in H$. *Тогда при* $\nu > 0$ *решение* u_ν *задачи* (1), (2) *существует, единственно и представляется в виде*

$$u_\nu = \psi_\nu(t, L)\, \hat{z}_{\text{д}}, \tag{6}$$

где $\psi_\nu(t, \lambda) = 2\mathrm{e}^{(t-T)\lambda}\lambda\,[2\nu\lambda + (1 - \mathrm{e}^{-2T\lambda})]^{-1},\ \hat{z}_{\text{д}} = z_{\text{д}} - \mathrm{e}^{-TL}\varphi$;

если $\nu = 0$, *то решение задачи* (1), (2) *существует тогда и только тогда, когда* $\hat{z}_{\text{д}} \in V$, *при этом нормальное решение имеет представление*

$$u_{\text{н}} = u_0 = \psi_0(t, L)\, \hat{z}_{\text{д}} \equiv \varphi_0(t, L)(L + aI)^{1/2}\, \hat{z}_{\text{д}}, \tag{7}$$

где $\varphi_0(t, \lambda) = 2\mathrm{e}^{(t-T)\lambda}\lambda\,(\lambda + a)^{-1/2}(1 - \mathrm{e}^{-2T\lambda})^{-1}$ *при всех* $t \in [0, T]$.

Доказательство. В силу того, что решение задачи (2) записывается в виде

$$y(t) = \mathrm{e}^{-tL}\varphi + \int_0^t \mathrm{e}^{(\tau-t)L} v(\tau)\, \mathrm{d}\tau,$$

мы можем считать, что в задачах (1), (2) и (2)—(4) $\varphi = 0$, а в качестве $z_{\text{д}}$ выбрано $\hat{z}_{\text{д}}$.

Итак, в дальнейшем будем считать, что $\varphi = 0$, $z_{\text{д}} = \hat{z}_{\text{д}}$. Пусть $\nu > 0$, тогда известно [7, гл. 3], что решение задачи (1), (2) единственно и определяется по формуле

$$u_\nu = -\nu^{-1} p, \tag{8}$$

где пара элементов y, p является решением системы

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + Ly + \nu^{-1}p = 0, & y(0) = 0, \\ -\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + Lp = 0, & p(T) = y(T) - \hat{z}_{\text{д}}. \end{cases} \tag{9}$$

Из второго уравнения системы находим, что

$$p(t) = e^{-(T-t)L}(y(T) - \hat{z}_{\text{д}}), \tag{10}$$

а из первого получаем равенство

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + Ly + \nu^{-1}[e^{-(T-t)L}(y(T) - z_{\text{д}})] = 0,$$

из которого, в свою очередь, следует

$$y(T) = -\nu^{-1}\int_0^T e^{-(T-t)L}e^{-(T-t)L}(y(T) - \hat{z}_{\text{д}})\,\mathrm{d}t.$$

Обозначив $w \overset{\text{def}}{=} y(T) - \hat{z}_{\text{д}}$, из последнего равенства имеем

$$w + \nu^{-1}\int_0^T e^{-2(T-t)L}\,\mathrm{d}t w = -\hat{z}_{\text{д}}.$$

Учитывая, что

$$\int_0^T e^{-2(T-t)L}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2L}(I - e^{-2TL}),$$

придем к равенству

$$\left[I + \frac{1}{2L\nu}(I - e^{-2TL})\right] w = -\hat{z}_{\text{д}},$$

откуда

$$w = -\frac{2\nu L}{2\nu L + (I - e^{-2TL})}\hat{z}_{\text{д}}.$$

Таким образом, из равенств (8) и (10) имеем

$$u_\nu(t) = -\frac{1}{\nu}p(t) = -\frac{1}{\nu}e^{-(T-t)L}w = \frac{2e^{-(T-t)L}L}{2\nu L + (I - e^{-2TL})}\hat{z}_{\text{д}}.$$

Итак, представление (6) доказано.

Рассмотрим случай $\nu = 0$. Предположим, что $z_{\text{д}} \in V$, и покажем, что

$$\int_0^T \|u_\nu(t) - u_0(t)\|^2\,\mathrm{d}t \to 0 \text{ при } \nu \to 0, \tag{11}$$

где $u_0(t)$ определяется соотношением (7).

Так как $\hat{z}_{\text{д}} \in V$, то найдется такое $h \in H$, что $(L + aI)^{-1/2}h = \hat{z}_{\text{д}}$. По любому $\varepsilon > 0$ можно найти такое $N > 0$, что

$\int_N^\infty \mathrm{d}(E_\lambda h, h) \leqslant \varepsilon$, $\lambda/(\lambda + a) \leqslant 2$, $e^{-2T\lambda} < 1/2$ на $[N, \infty)$.

Используя представления (6), (7) и обозначая

$$\psi_\nu(\lambda) = 2(1 - e^{-2T\lambda}) \frac{\lambda}{\lambda + a} [(2\nu\lambda + 1 - e^{-2T\lambda})^{-1} - (1 - e^{-2T\lambda})^{-1}]^2,$$

получаем, что

$$\int_0^T \| u_\nu(t) - u_0(t) \|^2 \, dt =$$

$$= 4 \int_0^T dt \int_\delta^\infty e^{-2(t-T)\lambda} \frac{\lambda^2}{\lambda + a} [(2\nu\lambda + 1 - e^{-2T\lambda})^{-1} -$$

$$- (1 - e^{-2T\lambda})^{-1}]^2 \, d(E_\lambda h, h) = \int_\delta^\infty \psi_\nu(\lambda) \, d(E_\lambda h, h).$$

Учитывая теперь, что $\psi_\nu(\lambda) \to 0$ при $\nu \to 0$ равномерно на $[\delta, N]$ и $|\psi_\nu(\lambda)| \leqslant 16$ $(\nu \geqslant 0)$ на полуоси $[N, \infty)$, легко убедиться в справедливости соотношения (11). Из (11) следует, в частности, что $u_0 \in L_2(0, T; H)$. Найдем $y_{u_0}(T)$. Согласно (7)

$$y_{u_0}(T) = 2 \int_0^T e^{2(t-T)L} L (I - e^{-2TL})^{-1} dt \hat{z}_д =$$

$$= \frac{2(I - e^{2TL})}{2L} L (I - e^{-2TL})^{-1} \hat{z}_д = \hat{z}_д.$$

Отсюда следует, что $J_0(u_0) = 0$, и потому $u_0 \in I_\infty^0$. Поскольку u_0 есть предел u_ν при $\nu \to 0$ в $L_2(0, T; H)$, то (см. [7, гл. 2]) является нормальным оптимальным управлением для задачи (1), (2).

Таким образом, если $\hat{z}_д \in V$, то решение задачи (1), (2) существует, и нормальное оптимальное управление находится по формуле (7).

Доказательство того, что при $\hat{z}_д \notin V$ задача (1), (2) (при $\nu = 0$) не имеет решения, основывается на следующих простых утверждениях, которые мы сформулируем в виде лемм.

ЛЕММА 1. *При любом* $t \in (0, T]$ $y(t) \in V$.

ЛЕММА 2. *Множество* $\{y_v(T)\colon v \in L_2(0, T; H)\}$ *всюду плотно в* H.

ЛЕММА 3. $\inf\limits_{v \in L_2(0, T; H)} J_0(v) = 0.$

Итак, предположим, что $\hat{z}_д \notin V$, а $I_\infty \neq \varnothing$, и пусть $u \in I_\infty^0$. По лемме 3 $J_0(u) = 0$, т. е. $\| y_u(T) - \hat{z}_д \| = 0$.

Таким образом, $y_u(T) = \hat{z}_д$ и по лемме 1 $\hat{z}_д \in V$, что противоречит предположению. Следовательно, лемма доказана.

Далее нам потребуются следующие два утверждения, которые легко следуют из известных результатов (см., например, [3], теорема 3] и [7, теорема 7.8 § 2 гл. 1]).

ЛЕММА 4. *Числовая функция* $||| u_\nu |||$, *где* u_ν — *решение задачи* (1), (2), *при любом* $\hat{z}_д \in H$ $(z_д \neq 0)$ *строго монотонно убывает на* $(0, \infty)$ *и* $\lim\limits_{\nu \to \infty} ||| u_\nu ||| = 0$. *Если* $\hat{z}_д \notin V$, *то* $||| u_\nu ||| \to \infty$ *при* $\nu \to 0$.

ЛЕММА 5. *Если* $\hat{z}_д \in V$ *и* $||| u_0 ||| < R$, *то задача* (2)—(4) *имеет бесконечное множество решений, при этом нормальное, оптималь-*

ное управление для этой задачи равно $u_н = u_0$. *Если* $\hat{z}_д \notin V$ *или* $\hat{z}_д \in V$, *но* $||| u_0 ||| \geqslant R$, *то решение* u^R *задачи* (2)—(4) *единственно и найдется единственный параметр* $\nu \geqslant 0$ *такой, что* $u^R = u_\nu$.

3. Перейдем теперь к построению итерационного процесса для решения рассматриваемых задач.

Относительно оператора L будем предполагать в дальнейшем, что в неравенстве (5) $a = 0$. Тогда оператор $2\nu L + I - e^{-2TL}$ имеет обратный. Обозначим

$$w_\nu = [2\nu L + (I - e^{-2TL})]^{-1}\hat{z}_д. \tag{12}$$

ЛЕММА 6. *При выполнении условия* (5) *при* $a = 0$ *справедливо разложение*

$$w_\nu = [2\nu L + (I - e^{-2TL})]^{-1}\hat{z}_д = \\ = (2\nu L + I)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}[(2\nu L + I)^{-1}e^{-2TL}]^k\hat{z}_д \qquad (\nu \geqslant 0), \tag{13}$$

причем

$$\| w_\nu - w_\nu^n \| \leqslant (2\nu\delta + 1)^{-1}(1 - q_\nu)^{-1}q_\nu^{n+1}\|\hat{z}_д\|,$$

где $q_\nu = e^{-2T\delta}(2\nu\delta + 1)^{-1}$, $\delta \geqslant \mu_1 > 0$,

$$w_\nu^n = (2\nu L + I)^{-1}\sum_{k=0}^{n}[(2\nu L + I)^{-1}e^{-2TL}]^k\hat{z}_д.$$

Доказательство. Из условия (13) следует, что $\|(2\nu L + I)^{-1}\| \leqslant (2\nu\delta + 1)^{-1}$, а $\|e^{-2TL}\| \leqslant e^{-2T\delta}$ и утверждение леммы сразу следует из соотношений

$$[2\nu L + (I - e^{-2TL})]^{-1} = \{(2\nu L + I)[I - (2\nu L + I)^{-1}e^{-2TL}]\}^{-1} = \\ = (2\nu L + I)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}[(2\nu L + I)^{-1}e^{-2TL}]^k.$$

Введем обозначения:

$$r_\nu^n = \sum_{k=0}^{n}[(2\nu L + I)^{-1}e^{-2TL}]^k, \qquad r_\nu = r_\nu^\infty.$$

Тогда $w_\nu = (2\nu L + I)^{-1}r_\nu$, $w_\nu^n = (2\nu L + I)^{-1}r_\nu^n$.

Следствие. *Элемент* r_ν *можно найти с помощью следующего итерационного процесса*:

$$r_\nu^{n+1/2} = e^{-2TL}\hat{r}_\nu^n, \quad \hat{r}_\nu^{n+1} = (2\nu L + I)^{-1}r_\nu^{n+1/2},$$

где $\hat{r}_\nu^0 = \hat{z}_д$, $r_\nu^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\hat{r}_\nu^k$.

Другими словами, $r_\nu^{n+1/2}$ находится как решение $r_\nu^{n+1/2}(t)$ задачи

$$\frac{dr_\nu^{n+1/2}}{dt} + Lr_\nu^{n+1/2} = 0, \qquad r_\nu^{n+1/2}(0) = r_\nu^n \tag{14}$$

при $t = 2T$, а $\hat{r}_\nu^{n+1}$ — как решение задачи

$$(2\nu L + I)\hat{r}_\nu^{n+1} = r_\nu^{n+1/2}. \tag{15}$$

Замечание 1. При $\nu = 0$ $r_\nu^{n+1} = r_\nu^{n+1/2}$, поэтому итерационный процесс (14), (15) в этом случае переходит в следующий:

$$\frac{\mathrm{d}r_0^{n+1}(t)}{\mathrm{d}t} + Lr_0^{n+1}(t) = 0, \qquad r_0^{n+1}(0) = r_0^n, \tag{16}$$

где $r_0^k = r_0^k(2T)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $r_0^0 = \hat{z}_д$.

Подводя итог вышеизложенному, можно сделать следующие выводы: если $\nu > 0$, то решение задачи (1), (2) при любом $\hat{z}_д \in H$ существует, единственно и может быть найдено по следующей схеме:

1) ищется r_ν по итерационной процедуре (14), (15);

2) находится $w_\nu = (2\nu L + I)^{-1} r_\nu$, т. е. решается задача

$$Lw_\nu + \frac{1}{2\nu} w_\nu = \frac{1}{2\nu} r_\nu.$$

Заметим, что $w_\nu \in D(L)$, поэтому определен элемент Lw_ν;

3) решается задача

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{u}_\nu}{\mathrm{d}t} + L\tilde{u}_\nu = 0, \quad \tilde{u}_\nu(0) = 2Lw_\nu \tag{17}$$

и находится $u_\nu(t) = \tilde{u}_\nu(T - t)$.

Рассмотрим теперь случай $\nu = 0$. Здесь $w_0 = r_0$ и, вообще говоря, нельзя утверждать, что $w_0 \in D(L)$. Для доказательства разрешимости задачи (17) при $\nu = 0$ докажем следующий факт.

ЛЕММА 7. *Если* $\hat{z}_д \in V$, *то* $w_0 = r_0 \in V$, *а решение задачи* (17) $\tilde{u}_0 \in L_2(0, T; H)$ *и* $|||\tilde{u}_0||| \leqslant \sqrt{2}(1 - e^{-2T\delta})^{-1} \| L^{1/2}\hat{z}_д \|$.

Доказательство. Действительно, если $\hat{z}_д \in V$, то $\hat{z}_д = L^{-1/2}h$ при некотором $h \in H$. Но тогда $w_0 = (I - e^{-2TL})^{-1}\hat{z}_д = L^{-1/2}(I - e^{-2TL})^{-1}h \in V$. Кроме того, $L^{1/2}w_0 = (1 - e^{-2TL})^{-1}h = h_1$, где $\|h_1\| \leqslant (1 - e^{-2T\delta})^{-1} \|L^{1/2}\hat{z}_д\|$.

Пусть $\Phi = L^{1/2}e^{-Lt}$; тогда

$$|||\Phi v||| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \|v\| \quad \forall v \in H.$$

Действительно,

$$\int_0^T \|L^{1/2}e^{-Lt}v\|^2 \mathrm{d}t = \int_0^T \int_\delta^\infty \lambda e^{-2\lambda t} \mathrm{d}(E_\lambda v, v) = \\ = \int_\delta^\infty \frac{1}{2\delta}(1 - e^{-2\lambda T}) \mathrm{d}(E_\lambda v, v) \leqslant \frac{1}{2\delta} \|v\|^2.$$

Таким образом, $\tilde{u}_0(t) = 2L^{1/2}e^{-Lt}L^{1/2}w_0 = 2\Phi h_1$, и поэтому

$$|||\tilde{u}_0(t)||| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\delta}} \|h_1\| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\delta}} (1 - e^{-2T\delta})^{-1} \|L^{1/2}\hat{z}_д\|.$$

Таким образом, можем сделать следующий вывод: если $\nu = 0$, то задача (1), (2) имеет решение тогда и только тогда, когда $\hat{z}_д \in V$ (причем не единственное). и нормальное решение можно найти по следующей схеме:

1) с помощью итерационного процесса (16) находится $r_0 = w_0$;

2) решается задача (17) при $\nu = 0$ и находится нормальное оптимальное управление $u_0(t) = \tilde{u}_0(T - t)$.

В силу леммы 5 решение задачи (2)—(4) можно найти по следующей схеме:

а) если $\hat{z}_д \in V$ и $\| u_0 \| < R$, то задача (2)—(4) имеет бесконечное множество решений и нормальное оптимальное управление совпадает с u_0;

б) если $\hat{z}_д \notin V$ или $\hat{z}_д \in V$, но $\| u_0 \| \geqslant R$, то уравнение $\| u_\nu \| = R$ имеет единственное решение $\nu = \nu^*$ и единственное решение задачи (2)—(4) совпадает с u_{ν^*}.

Замечание 2. С помощью итерационного процесса (14), (15) (или (16)) мы можем найти лишь r_ν^n ($\nu \geqslant 0$), а не r_ν. Положим $w_\nu^n = (2\nu L + I)^{-1} r_\nu^n$ и $\tilde{u}_\nu^n$ — решение задачи (17) (где w_ν заменено на w_ν^n) и $u_\nu^n = \tilde{u}_\nu^n(T - t)$. Тогда, учитывая приведенные выше выкладки, находим оценки

$$||| u_\nu - u_\nu^n ||| \leqslant (2\nu^2\delta)^{-1}(1 - e^{-2T\delta})(1 - q_\nu)^{-1} q_\nu^{n+1} \| \hat{z}_д \|^2$$

при $\nu > 0$; а если $\hat{z}_д \in V$, то при $\nu \geqslant 0$

$$||| u_\nu - u_\nu^n ||| \leqslant 2(1 - e^{-2T\delta})(1 - q_\nu)^{-1} q_\nu^{n+1} \| L^{1/2} \hat{z}_д \|^2,$$

где $q_\nu = e^{-\delta T}(1 + 2\nu\delta)^{-1}$.

Задачи (1), (2) и (2)—(4) достаточно хорошо изучены теоретически. Для их решения можно использовать, например, градиентный метод, который при фиксированном $\nu > 0$ сходится со скоростью геометрической прогрессии, однако знаменатель этой прогрессии стремится к единице при $\nu \to 0$. Поэтому для решения рассматриваемых задач градиентными методами при малом ν (тем более при $\nu = 0$) потребуется очень много итераций. Из леммы 6 следует, что предлагаемый итерационный процесс сходится со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой равен $q_\nu = e^{-2T\delta}(2\nu\delta + 1)^{-1}$, $\delta \geqslant \mu_1 > 0$. Если, например, $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, а Ly определяется дифференциальным выражением $-\Delta y + c(x)y$ и краевыми условиями $y|_\Gamma = 0$, где $c(x) \geqslant 0$, то $V = \mathring{W}_2^1(\Omega)$, а $\mu_1 = \left(1 + \frac{1}{4\pi^4}\right)^{-1}$. В приложениях параметр T, как правило, достаточно большой. Нетрудно видеть поэтому, что для решения задачи (1), (2) ($\nu \geqslant 0$) с большой точностью достаточно одной итерации.

Аналогичные результаты можно установить и в случае, когда состояние системы описывается гиперболическим уравнением.

Институт математики УрО АН СССР
Башкирский сельскохозяйственный институт

Поступило 23.12.86

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Лионс Ж.-Л., Мадженес Е. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
[2] Егоров А. И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978.
[3] Васильев Ф. П., Ишмухаметов А. З., Потапов М. М., Солодкая М. С. Обобщенный метод моментов в задаче управления параболической системой // Методы и алгоритмы в численном анализе. М.: Изд-во МГУ, 1984. С. 96—108.
[4] Ишмухаметов А. З. Обобщенная проблема моментов в задаче управления квадратичным функционалом на решениях линейной системы // Численный анализ: методы, алгоритмы, программы. М.: Изд-во МГУ, 1983. С. 59—70.
[5] Като Т. Теория возмущения линейных операторов. М.: Мир, 1972.
[6] Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.
[7] Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.