A. B. Venkov, Automorphic scattering matrix for the Hecke group $\Gamma[2\cos(\pi/q)]$, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1981, Volume 109, 34–40

А.Б.Венков

ОБ АВТОМОРФНОЙ МАТРИЦЕ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ГРУППЫ ГЕККЕ $\Gamma(2\cos\frac{\pi}{q})$

0. Настоящая работа является продолжением моей статьи [I]. В ней ведется исследование ряда Дирихле, входящего в определение автоморфной матрицы рассеяния для произвольной группы Гекке $\Gamma(2\cos\frac{\pi}{q})$, $4 \le q < \infty$, в области его абсолютной сходимости. В работе получена точная аналитическая формула для матрицы рассеяния в терминах функций Бесселя (теорема 2). Кроме этого, для последующего в другой работе аналитического продолжения ряда Дирихле типа $L(s;\Gamma;\gamma)$ (см. [I], § 6) проведено подробное описание характеристической функции Φ, решающей проблему тождества слов в данной группе Гекке и выделяющей множество представителей двойных классов смежности в ней по унипотентной подгруппе.

I. Напомним основные определения и результаты § 6 [I].

Пусть $\Gamma = \tilde{\Gamma}_q$ – произвольная нормированная группа Гекке, точнее:

$$\tilde{\Gamma}_q = g_\lambda \Gamma_q g_\lambda^{-1}, \qquad g_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad (\mathrm{mod} \pm 1)$$

$\lambda = \alpha^{-1/2}$, $\alpha = 2\cos\frac{\pi}{q}$, $q \in \mathbb{Z}$, $4 \le q < \infty$, q – фиксировано.

Группа Γ является свободным произведением двух конечных циклических групп:

$$\Gamma = \{\gamma, \nu;\ \gamma^2 = E,\ \nu^q = E\},$$

E – единица Γ. Как дискретная группа движений плоскости Лобачевского H, реализованной в виде верхней полуплоскости, Γ задается матрицами дробно-линейных преобразований:

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{-1} \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mu = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

причем $\nu = \gamma\mu$. Пусть $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, s > 1$. Основным предметом исследования настоящей работы является ряд Дирихле

$$\varphi(s) = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)} \sum_{\substack{g \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma / \Gamma_\infty \\ \text{кроме } \Gamma_\infty E \Gamma_\infty}} \frac{1}{|c(g)|^{2s}}, \tag{I}$$

который представляет автоморфную матрицу рассеяния (или ее определитель, что то же самое в ситуации группы Гекке) своим мероморфным продолжением на прямой $\mathrm{Re}\, s = 1/2$ из полуплоскости абсолютной сходимости $\mathrm{Re}\, s > 1$. В формуле (I): Γ_∞ - бесконечная циклическая группа, порожденная μ, $c = c(g)$, $gz = (az+b)(cz+d)^{-1}$, $z \in H$, $g \in \Gamma$; $\Gamma(s)$ - гамма-функция Эйлера. Выражение для $\gamma(s)$ вида (I) было впервые найдено А.Сельбергом в [2] в ситуации общей фуксовой группы первого рода, а связь с теорией рассеяния была установлена Л.Д.Фаддеевым в [3]. В § 6 [I] мы провели следующую модификацию формулы (I) уже применительно только к рассматриваемой ситуации группы Гекке:

$$\gamma(s) = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)\,\alpha^{2s}}\left\{1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\sum_{n_k=-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(n_1,n_2,\dots,n_m;m)}{|h_m h_{m-1}\dots h_1|^{2s}}\right\}, \qquad (2)$$

где $h_m = h_m(n_1, n_2, \dots, n_m)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению:

$$h_{m+1} = -\alpha n_{m+1} - h_m^{-1}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

с начальным условием $h_1 = -\alpha n_1$. Далее, $n_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, 2, \dots$. Функция Φ является произведением двух характеристических функций. Первая из них определяет некоторое множество представителей из классов эквивалентных слов (по одному из каждого класса) в свободном произведении Γ. Вторая определяет множество представителей из двойных классов смежности $\Gamma_\infty g \Gamma_\infty$ (по одному из каждого класса). В пункте 2. настоящей работы мы проведем более подробное по сравнению с § 6 [I] описание функции Φ, дающее больше информации о ней и не опирающееся на теорию приведения из [4]. Наконец, в § 6 [I] для вещественных $s > 1$ получено следующее аналитическое выражение для ряда Дирихле из формулы (2):

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\sum_{n_k=-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(n_1,n_2,\dots,n_m;m)}{|h_m h_{m-1}\dots h_1|^{2s}} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\dots$$

$$\dots\sum_{k_{m-1}=0}^{\infty}\alpha^{-2sm-2k_1-2k_2-\dots-2k_{m-1}}\cdot\frac{\Gamma(2s+k_1)}{\Gamma(2s)\Gamma(k_1+1)}\cdot\frac{\Gamma(2s+k_1+k_2)}{\Gamma(2s+k_1)\Gamma(k_2+1)}\,. \qquad (3)$$

$$\frac{\Gamma(2s+k_2+k_3)}{\Gamma(2s+k_2)\Gamma(k_3+1)}\cdots\frac{\Gamma(2s+k_{m-2}+k_{m-1})}{\Gamma(2s+k_{m-2})\Gamma(k_{m-1}+1)}\times$$

$$\times\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{n_m=-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(n_1,n_2,\ldots,n_m;m)}{n_m^{2s+k_1}\,n_{m-1}^{2s+k_1+k_2}\cdot n_{m-2}^{2s+k_2+k_3}\cdots n_2^{2s+k_{m-2}+k_{m-1}}\cdot n_1^{2s+k_{m-1}}},$$

где k_0 равно нулю тождественно. В пункте 3. настоящей работы мы модифицируем формулу (3).

2. Дадим описание полной системы представителей двойных классов $\Gamma_\infty g\,\Gamma_\infty$ для $g\in\Gamma$ по одному из каждого класса.

Сопоставим каждому произведению в Γ вида $\gamma\mu^{a_1}\gamma\mu^{a_2}\ldots\gamma\mu^{a_m}\gamma$ конечную последовательность показателей $(a_1,a_2,\ldots,a_m)$ длины m. Пусть $a_j\in\mathbb{Z}$, $a_j\geqslant 1$, $j=1,2,\ldots,m$. Наложим следующие четыре ограничения на последовательности показателей, которые мы в дальнейшем будем называть "условиями запрета I) – 4)":

I) $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{k},a,\ldots)$, $a\geqslant 2$

длина „k" сплошного участка из единиц в начале последовательности не должна превышать $q-3$, $k\leq q-3$.

2) $(\ldots,a,\underbrace{1,1,\ldots,1}_{k},b,\ldots)$, $a\geqslant 2$, $b\geqslant 2$

длина „k" сплошного участка из единиц в середине последовательности не должна превышать $q-3$, $k\leq q-3$.

3) $(\ldots,a,\underbrace{1,1,\ldots,1}_{k})$, $a\geqslant 2$

длина „k" сплошного участка из единиц в конце последовательности не должна превышать $q-3$, $k\leq q-3$.

4) $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{k})$

если последовательность состоит только из единиц, то с длиной $k\leqslant q-2$.

ТЕОРЕМА I. Множество всех слов

$$E,\ \gamma,\ \{\gamma\mu^{a_1}\gamma\mu^{a_2}\ldots\gamma\mu^{a_{m-1}}\gamma\}$$

$$m\in\mathbb{Z},\ m\geqslant 2,\ a_j\in\mathbb{Z},\ a_j\geqslant 1,\ j=1,2,\ldots,m-1$$

с условиями запрета I) – 4) является полной системой представителей двойных классов смежности $\simeq\Gamma_\infty\backslash\Gamma/\Gamma_\infty$, по одному в каждом классе $\Gamma_\infty g\,\Gamma_\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как хорошо известно (см. § 2.6 [5]) любой элемент из группы Γ однозначно представим словом вида

$$g = \gamma^{\varepsilon}(\gamma\mu)^{k_1}\gamma(\gamma\mu)^{k_2}\dots\gamma(\gamma\mu)^{k_m}, \tag{4}$$

где

$$\left.\begin{array}{ll} \varepsilon = 0, \text{ либо} & \varepsilon = 1;\ 1 \leq k_j \leq q-1,\ 1 \leq j \leq m-1 \\ & 0 \leq k_m \leq q-1 \end{array}\right\} \tag{5}$$

Будем называть слово (4) с условиями (5) приведенным. Число $e(g) = \varepsilon + k_1 + 1 + k_2 + \dots + 1 + k_m = \varepsilon + m - 1 + k_1 + k_2 + \dots + k_m$ – длиной слова g. Опишем полную систему представителей двойных классов в терминах приведенных слов. Мы покажем, что искомые представители выделяются условиями, дополнительными к (5). Представители мы будем выбирать возможно меньшей длины, которые, кроме этого, не начинаются или оканчиваются на степень μ, отличную от нуля.

Прежде всего, интересующий нас представитель двойного класса не может иметь $\varepsilon = 1$ (см. (4)). В противном случае его длину можно уменьшить, считая $\gamma^2 = E$ – пустым словом и отбрасывая μ:

$$\gamma(\gamma\mu)^{k_1}\gamma(\gamma\mu)^{k_2}\dots = \gamma\gamma\mu(\gamma\mu)^{k_1-1}\gamma(\gamma\mu)^{k_2}\dots = \mu(\gamma\mu)^{k_1-1}\gamma(\gamma\mu)^{k_2}\dots \sim$$
$$\sim (\gamma\mu)^{k_1-1}\gamma(\gamma\mu)^{k_2}\dots .$$

Поэтому выполняется альтернативное условие $\varepsilon = 0$. Нетрудно видеть, что каждый искомый представитель в этом случае выделяется дополнительным условием $k_1 \leq q-2$. В противном случае длина слова может быть также уменьшена:

$$(\gamma\mu)^{k_1}\gamma(\gamma\mu)^{k_2}\dots = (\gamma\mu)^{q-1}\gamma(\gamma\mu)^{k_2}\dots = \mu^{-1}\gamma\gamma(\gamma\mu)^{k_2}\dots \sim (\gamma\mu)^{k_2}\dots .$$

Заметим, что мы уменьшаем длину слова указанными операциями, не выходя в результате за рамки множества приведенных слов (4), (5).

Продолжим описание представителей. В конце слова (4) следует считать $k_m = 0$, иначе длину g можно уменьшить, отбрасывая μ. Кроме этого, необходимо наложить ограничение $k_{m-1} \leq q-2$. Иначе:

$$\dots\gamma(\gamma\mu)^{k_{m-2}}\gamma(\gamma\mu)^{k_{m-1}}\gamma = \dots\gamma(\gamma\mu)^{k_{m-2}}\gamma(\gamma\mu)^{q-1}\gamma = \dots\gamma(\gamma\mu)^{k_{m-2}}\gamma\mu^{-1}\gamma\gamma \sim$$
$$\sim \dots\gamma(\gamma\mu)^{k_{m-2}}\gamma.$$

Нетрудно видеть, что дополнительные условия, которые мы наложили на параметры ε, k_1, $k_2, \dots, k_m$ из (5), являются не только необходимыми, но и достаточными. Соберем полученные результаты вместе. Следующее множество элементов является полной системой представителей двойных классов смежности $\simeq \Gamma_\infty \backslash \Gamma / \Gamma_\infty$ по одному из каждого класса:

$$\left.\begin{array}{l} E,\ \gamma,\ (\gamma\mu)^{n_1}\gamma(\gamma\mu)^{n_2}\ldots\gamma(\gamma\mu)^{n_{m-1}}\gamma \\ m\geq 2,\ 1\leq n_1\leq q-2,\ 1\leq n_j\leq q-1,\ 1\leq n_{m-1}\leq q-2 \\ \qquad\qquad 2\leq j\leq m-2 \end{array}\right\}, \tag{6}$$

где очевидно предполагается $m\in\mathbb{Z}$, $n_j\in\mathbb{Z}$, $j=1,2,\ldots,m$.

Покажем теперь, что множество (6) совпадает с множеством представителей из условия теоремы. Проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned}&(\gamma\mu)^{n_1}\gamma(\gamma\mu)^{n_2}\ldots\gamma(\gamma\mu)^{n_{m-1}}\gamma=(\gamma\mu)^{n_1-1}\gamma\mu^2(\gamma\mu)^{n_2-2}\gamma\mu^2(\gamma\mu)^{n_3-2}\gamma\mu^2\ldots\\&\ldots(\gamma\mu)^{n_{m-2}-2}\gamma\mu^2(\gamma\mu)^{n_{m-1}-1}\gamma=\\&=(\gamma\mu)^{n_1-1}\gamma\mu^2 f(n_2)f(n_3)\ldots f(n_{m-1})(\gamma\mu)^{n_{m-1}}\gamma,\end{aligned} \tag{7}$$

где $f(n_k)=(\gamma\mu)^{n_k-2}\gamma\mu^2 \qquad 2\leq k\leq m-2$

или более развернуто:

$$f(n_k)=\begin{cases}(\gamma\mu)^{n_k-2}\gamma\mu^2 & 3\leq n_k\leq q-1\\ \gamma\mu^2 & n_k=2\\ \mu & n_k=1\end{cases}. \tag{8}$$

Из (6), (7), (8) следует утверждение теоремы. Доказательство закончено.

3. Перейдем теперь к преобразованию формулы (3). По теореме I имеем:

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\sum_{n_k=-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(n_1,n_2,\ldots,n_m;m)}{|h_m h_{m-1}\ldots h_1|^{2s}}=\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\sum_{n_k=1}^{\infty}\frac{\Phi(n_1,n_2,\ldots,n_m;m)}{|h_m h_{m-1}\ldots h_1|^{2s}}.\end{aligned} \tag{9}$$

Причем

$$\Phi(n_1,n_2,\ldots,n_m;m)=\begin{cases}\text{I, если последовательность } (n_1,n_2,\ldots,n_m) \text{ удовлетворяет условиям запрета I) – 4)}\\ \text{0, в противном случае}\end{cases}, \tag{10}$$

$n_k \in \mathbb{Z}$, $n_k \geq 1$, $1 \leq k \leq m$, $m=1,2,\ldots$. Равенство (9) позволяет рассматривать формулу (3) и при комплексных значениях s , $\operatorname{Re} s > 1$. Далее, введем модифицированную функцию Бесселя, следующим рядом (см. [6]):

$$y^{1/2-s} I_{2s-1}(2\sqrt{y}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{\Gamma(2s+k)k!} .$$

Умножая произведение Γ-функций из (3) на $\dfrac{\Gamma(2s+k_{m-1})}{\Gamma(2s+k_{m-1})}$, преобразуем формулу (3) (см. также (9)):

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} \sum_{n_k=1}^{\infty} \frac{\Phi(n_1,n_2,\ldots,n_m;m)}{|n_m n_{m-1}\cdots n_1|^{2s}} = \frac{1}{\Gamma(2s)} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha^{-2sm} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} e^{-y_1} y_1^{2s-1} dy_1 \int_0^{\infty} e^{-y_2} y_2^{2s-1} dy_2 \cdots \int_0^{\infty} e^{-y_m} y_m^{2s-1} dy_m \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \cdots$$

$$\cdots \sum_{n_m=1}^{\infty} \frac{\Phi(n_1,n_2,\ldots,n_m;m)}{(n_1 n_2 \cdots n_m)^{2s}} \left(\frac{y_1 y_2}{\alpha^2 n_m n_{m-1}}\right)^{1/2-s} \left(\frac{y_2 y_3}{\alpha^2 n_{m-1} n_{m-2}}\right)^{1/2-s} \cdots \quad (11)$$

$$\cdots \left(\frac{y_{m-1} y_m}{\alpha^2 n_2 n_1}\right)^{1/2-s} I_{2s-1}\left(\frac{2}{\alpha} \frac{\sqrt{y_1 y_2}}{\sqrt{n_m n_{m-1}}}\right) I_{2s-1}\left(\frac{2}{\alpha} \frac{\sqrt{y_2 y_3}}{\sqrt{n_{m-1} n_{m-2}}}\right) \cdots$$

$$\cdots I_{2s-1}\left(\frac{2}{\alpha} \frac{\sqrt{y_{m-1} y_m}}{\sqrt{n_2 n_1}}\right) =$$

Делая замены переменных в интегралах $x_1 = \dfrac{2y_1}{\alpha n_m}$, $x_2 = \dfrac{2y_2}{\alpha n_{m-1}}$, ..., $x_m = \dfrac{2y_m}{\alpha n_1}$ продолжаем равенство (11)

$$= \frac{2^{1-2s}}{\Gamma(2s)} \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{n_m=1}^{\infty} \Phi(n_1,n_2,\ldots,n_m;m) \times$$

$$\times \int_0^{\infty} e^{-\alpha n_1 x_1/2} x_1^{s-1/2} dx_1 \int_0^{\infty} e^{-\alpha n_2 x_2/2} dx_2 \cdots \int_0^{\infty} e^{-\alpha n_{m-1} x_{m-1}/2} dx_{m-1} \times \quad (12)$$

$$\times \int_0^{\infty} e^{-\alpha n_m x_m/2} x_m^{s-1/2} dx_m I_{2s-1}(\sqrt{x_1 x_2}) I_{2s-1}(\sqrt{x_2 x_3}) \cdots I_{2s-1}(\sqrt{x_{m-1} x_m}).$$

Введем характеристическую функцию $\chi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m; m)$, определенную на последовательностях $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$, где каждое σ_k равно либо 1 либо 2, $k=1,2,\ldots,m$. При этом (см. (10)):

$$\chi(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_m;m) = \begin{cases} 1, & \text{если множество единиц последовательности } (\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_m) \text{ удовлетворяет условиям запрета 1)–4)} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (13)$$

Принимая во внимание формулы (9) - (I3) получаем искомое представление:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\sum_{n_k=1}^{\infty}\frac{\Phi(n_1,n_2,\dots,n_m;m)}{|n_m n_{m-1}\dots n_1|^{2s}}=\frac{2^{1-2s}}{\Gamma(2s)}\sum_{m=1}^{\infty}2^{-m}\times$$

$$\times\sum_{(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_m)}\gamma(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_m;m)\int_0^{\infty}\frac{\exp(-\alpha x_1\sigma_1/2)}{1-(\sigma_1-1)\exp(-\alpha x_1/2)}x_1^{s-1/2}dx_1\times$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\exp(-\alpha x_2\sigma_2/2)}{1-(\sigma_2-1)\exp(-\alpha x_2/2)}dx_2\dots\int_0^{\infty}\frac{\exp(-\alpha x_{m-1}\sigma_{m-1}/2)}{1-(\sigma_{m-1}-1)\exp(-\alpha x_{m-1}/2)}dx_{m-1}\times \tag{I4}$$

$$\times\int_0^{\infty}\frac{\exp(-\alpha x_m\sigma_m/2)}{1-(\sigma_m-1)\exp(-\alpha x_m/2)}x_m^{s-\frac{1}{2}}dx_m\, I_{2s-1}(\sqrt{x_1x_2})I_{2s-1}(\sqrt{x_2x_3})\dots I_{2s-1}(\sqrt{x_{m-1}x_m}),$$

где суммирование $(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_m)$ ведется по всем возможным комбинациям единиц и двоек, т.е. сумма содержит 2^m слагаемых, часть из которых обращается в ноль по определению (I3).

Мы доказали следующую теорему:

ТЕОРЕМА 2. В области абсолютной сходимости ряда (9) $(\operatorname{Re} s>1)$ справедлива формула (I4).

Литература.

I. Венков А.Б. Об ассоциированных с определяющими уравнениями и непрерывными дробями рядах Дирихле в теории автоморфных функций. - Труды МИАН им.В.А.Стеклова, т.I58, I98I.

2. Selberg A. Harmonic analysis, 2 Teil, Vorlesungsniederschrift, Göttingen, I954.

3. Фаддеев Л.Д. Разложение по собственным функциям оператора Лапласа на фундаментальной области дискретной группы на плоскости Лобачевского. - Труды ММО I7(I967), 323-349.

4. Rosen D. A class of continued fractions associated with certain properly discontinuous groups,Duke Math.J.,21,N3(I954).

5. Reidemeister K. Einführung in die kombinatorische Topologie, Chelsea P.C., New-York, I950.

6. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям, Наука, I979, 830.