М. Ю. Андреев, И. Г. Поспелов, Управление ликвидностью банка при случайно колеблющихся ставках процентов, *Матем. моделирование*, 2004, том 16, номер 9, 3–22

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 2004 год, том 16, номер 9, стр. 3-22

УПРАВЛЕНИЕ ЛИКВИДНОСТЬЮ БАНКА ПРИ СЛУЧАЙНО КОЛЕБЛЮЩИХСЯ СТАВКАХ ПРОЦЕНТОВ

© *М.Ю. Андреев, И.Г. Поспелов*

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Российской Федерации (коды проектов 01-01-00106 и 01-01-00114) и по программе государственной поддержки ведущих научных школ (код проекта НШ-1843.2003.1)

Строится математическая модель управления ликвидностью банка в условиях, когда экономика растет с постоянным темпом, а ставки по заемным и вкладываемым банком в короткие инструменты средствам являются случайными величинами. Считается, что банк максимизирует ожидаемую величину приведенного дохода. Вводится понятие оптимальной стратегии. Показано, что оптимальная стратегия банка должна удовлетворять уравнению Беллмана, решение которого находится в явном виде. Рассматриваются различные стратегии банка, в зависимости от того, как доход банка зависит от случайных величин.

A BANK LIQUIDITY MANAGEMENT UNDER RANDOM OSCILLATIONS OF INTEREST RATES

M.Yu.Andreev, I.G.Pospelov

The mathematical model of management of liquidity of bank have been built. The economy rate of growth is considered to be constant, while interest rates of short instruments osculates randomly. It is supposed, that the bank maximizes the expected net present value. The concept of optimal strategy of bank is entered. It is shown, that optimal strategy should satisfy Bellman equation. Solution of the equation is found in an explicit form. Various strategies of bank are considered depending on how the income of bank depends on random values.

1. Введение

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [1,2]. В [1] предложена математическая модель деятельности банка в условиях отсутствия экономического роста и инфляции. Поведение банка эта модель описывает решением стохастической задачи оптимального управления. Указанная модель была успешно использована на практике, как основа описания банковского сектора в модели региональной экономики, с помощью которой проводился регулярный мониторинг экономики и кредитно-денежной сферы Свердловской области в 1996-1997 и был предсказан кризис августа 1998 г. [2].

В настоящей работе в отличие от [1], во-первых, рассматривается случай не постоянных, а случайно колеблющихся процентов по краткосрочным займам и вложениям, а также учитывается ожидаемое расширение операций банка вследствие экономического роста или инфляции. Во-вторых, рассматривается не предел задач на конечном горизонте планирования, а сразу задача не бесконечном горизонте. В-третьих, рассматриваются различные варианты информационных ограничений[1]. Однако в данной работе в отличие от [1] не рассматривается

[1] В [1] в доказательстве оптимальности стратегии, полученной из необходимых условий оптимальности, допущена неустранимая ошибка. Здесь (как и в [2] для менее общего случая) приводится корректное доказательство.

вопрос о политике банка в отношении долгосрочных операций. Изложение в данной работе независимо от [1,2].

2. Краткосрочные и долгосрочные операции банка

Основная деятельность банка состоит в том, что банк привлекает денежные средства в виде расчетных и депозитных счетов и использует их вместе с собственными средствами для выдачи ссуд клиентам. Чистый доход, полученный от этих операций, банк расходует для финансирования вторичных операций: уплаты налогов, приобретения материальных активов, выплат работникам и акционерам и др. Вторичные операции банка здесь не рассматриваются. Суммарные расходы на вторичные операции считаются чистым доходом банка, извлеченным из собственно банковских операций. Именно эту величину банк стремится максимизировать за счет рационального планирования банковских операций.

Может показаться странным, что мы включаем налоги и операционные расходы в величину дохода, подлежащего максимизации. Однако «оптимизация» налогов состоит не в уменьшении фактически извлекаемого из операций дохода, а в укрытии этого дохода в отчетной документации. Аналогично обстоит дело и с внутрифирменной коррупцией – повышением личных доходов управляющих за счет доходов акционеров. Иногда, ради ухода от налогов или экономии операционных расходов, управляющим, возможно, приходится идти и на уменьшение фактического дохода, но эти тонкости мы здесь не учитываем, считая вторичные операции просто дележом извлеченного из основных операций фактического чистого дохода.

Заключение соглашения с клиентом не определяет полностью порядок поступления и расходования денежных средств во времени. Например, приняв деньги на расчетный счет, банк обязуется выдать их по первому требованию клиента. Российские условия деятельности банка еще более неопределенны, потому что даже юридически оформленная выдача кредита не гарантирует своевременного возврата кредита с процентами. Поэтому банк должен заботиться о поддержании собственной ликвидности. Ликвидность поддерживается его текущими краткосрочными операциями, цель которых – обеспечить необходимый запас денег в кассе.

При описании деятельности банка мы используем идею разделения процессов с разными характерными временами. Текущие операции, обеспечивающие ликвидность банка, мы будем считать «быстрыми», а выбор кредитного портфеля, т.е. решения о том, кому, сколько и под какой процент выдавать денег, – «медленными». Это означает, что мы описываем текущие операции и оцениваем их эффективность, предполагая заданным кредитный портфель банка. Регулируя условия кредита, банк может влиять на поток поступлений и платежей деньгами только в среднесрочном плане, в краткосрочном плане этот поток для банка остается неопределенным.

Мы предполагаем, что сальдо поступлений и платежей X по операциям с расчетными счетами, депозитами и ссудами клиентов в момент времени t можно считать случайной величиной, вид функции распределения которой зависит от кредитного портфеля банка.

Банк определяет величину своего чистого дохода U, исходя из функции распределения случайной величины X. При реализации случайной величины сальдо X у банка образуется либо недостаток, либо избыток денег. В первом случае банк может занять недостающие средства на рынке краткосрочных межбанковских кредитов (МБК). Процент по (МБК) считаем также случайной величиной.

В случае избытка денег банк вкладывает их на короткий срок под процент, который также считаем случайным, причем меньшим, чем процент по МБК. В 1996 году, когда разрабатывалась эта модель, основным финансовым инструментом для краткосрочных вложений были государственные ценные бумаги (ГКО). В настоящее время банковские работники жалуются на дефицит подобных инструментов, но для небольших банков, таким инструментом может служить тот же МБК, на рынке которого посредники получают систематическую прибыль, вследствие чего плата за полученные кредиты оказывается всегда больше дохода от вложений.

Ниже на рис.1 изображена динамика процента по МБК и доходности ГКО. Видно, что первая величина всегда больше. В [1] величины процента и доходности считались постоянными, причем для разрешимости задачи требовалось, чтобы значение одного из постоянных параметров модели (предпочтения времени банка, см. ниже) лежало между значениями процента и доходности. Ясно, что это условие не выполнимо для реально наблюдавшихся данных. Это несоответствие было одним из стимулов модифицировать модель. В данной работе требуется только, чтобы процент был выше доходности в каждый момент времени, и не требуется, чтобы доходность была ниже всех возможных значений процента.

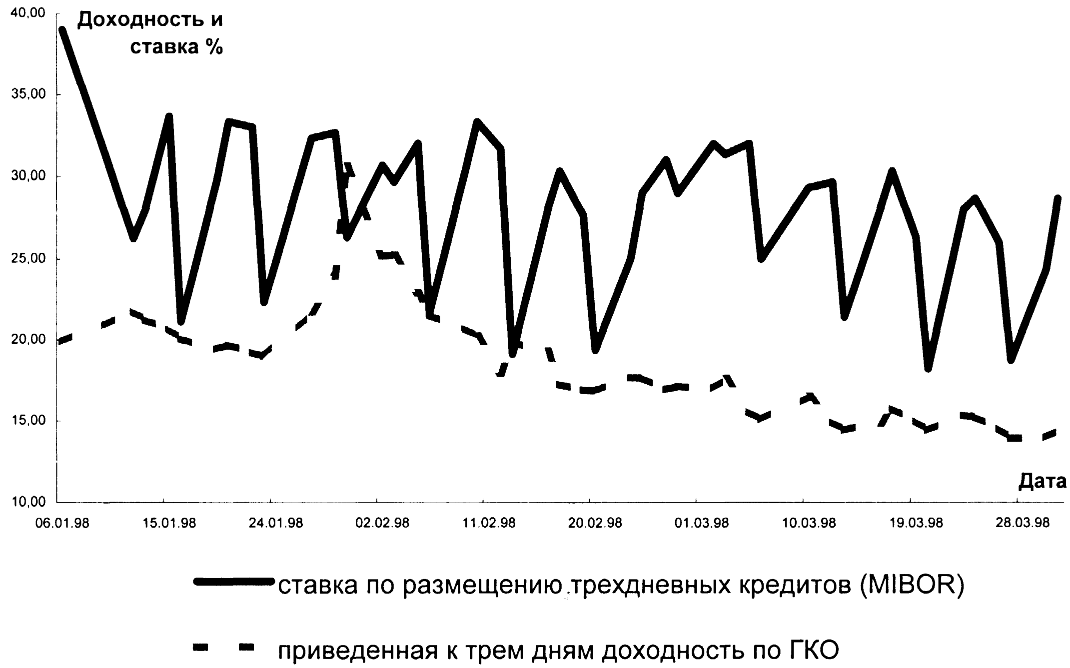

Рис. 1

3. Модель краткосрочных операций

Модель строится в дискретном времени. Период этого времени t можно несколько условно рассматривать как «операционный день» банка. Обозначим через M_t остаток ликвидных активов банка[2], через K_t – его заимствования на рынке МБК и через S_t – его краткосрочные вложения *на конец* периода t.

Для простоты предполагается, что заимствования и вложения делаются ровно на один период. Тогда в течение периода $t+1$ банк должен вернуть заем K_t с процентами. Общая сумма выплат пропорциональна K_t, и мы обозначим ее через $Q_t K_t$, где $Q_t > 1$ – брутто-процент по МБК. В тот же период банк может взять новый кредит K_{t+1} под брутто-процент Q_{t+1}. Аналогично через $q_t > 1$ обозначается величина брутто-доходности краткосрочных вложений. В период $t+1$ банк получает доход $q_t S_t$ по старым вложениям и может сделать но-

---

[2] Практически для большинства банков это сумма очень небольшого кассового остатка и остатка на корреспондентском счете данного банка в Центральном банке.

вые вложения S_{t+1}. Доходность q_t и процентную ставку Q_t мы считаем *случайными величинами*, предположения о статистических свойствах которых приведены в конце данного раздела.

Заимствования K_t и вложения S_t – это вспомогательные и, по существу, вынужденные, операции банка. Основными его действиями в период $t+1$ являются осуществление платежей и получение поступлений, обусловленных долгосрочными контрактами, а также извлечение чистого дохода U_{t+1}.

Сальдо поступлений и платежей мы обозначаем через X_{t+1}. Относительно величины X_{t+1} помимо предположений, которые будут сделаны в конце данного раздела, мы предполагаем, что она представляется в виде

$$X_{t+1} = g^{t+1} x_{t+1}, \tag{3.1}$$

где g - *ожидаемый темп расширения операций*, обусловленный экономическим ростом, а также инфляцией. Эта величина в краткосрочном плане считается постоянной во времени. Величины x_{t+1} считаются случайными и *ограниченными.*

Итогом приведенных выше определений является балансовое соотношение

$$M_{t+1} = M_t - Q_t K_t + K_{t+1} + q_t S_t - S_{t+1} + g^{t+1} x_{t+1} - U_{t+1}. \tag{3.2}$$

Задача управления ликвидностью состоит в том, чтобы разумно определить величины $M_{t+1}, K_{t+1}, S_{t+1}, U_{t+1}$ в рамках ограничения (3.2) при условии, что величины M_t, K_t, S_t должны оставаться неотрицательными при всех t

$$M_t \geq 0, \quad K_t \geq 0, \quad S_t \geq 0. \tag{3.3}$$

Что же касается величины чистого дохода U_t, то для нее мы допускаем отрицательные значения, что содержательно отвечает привлечению средств, ранее выведенных из круга собственно банковских операций. Все теоретические рассуждения остаются в силе и даже упрощаются при наложении естественного ограничения $U_{t+1} \geq 0$, но явное решение в этом случае найти невозможно. Впрочем, ниже мы все же наложим на U_{t+1} некоторое более слабое требование, которое несколько ограничит возможность компенсировать текущие кассовые разрывы за счет прежних доходов.

При выборе управлений $M_{t+1}, K_{t+1}, S_{t+1}, U_{t+1}$, банку заведомо известны значения M_t, K_t, S_t, Q_t, q_t, сложившиеся к концу периода t. Вопрос о том, в какой степени он может пользоваться информацией о величинах $x_{t+1}, Q_{t+1}, q_{t+1}$, обсудим в разделе 5.

Предполагается, что результаты своей деятельности банк оценивает величиной *приведенного чистого дохода*

$$NPV = \sum_{\tau=t}^{\infty} \rho^{t-\tau} U_{\tau+1}, \tag{3.4}$$

где ρ – *предпочтение времени* (внутренний коэффициент дисконтирования), которое считается постоянным параметром модели. Предполагается, что

$$\rho > g > 1. \tag{3.5}$$

Пока не указано, хотя бы в общих чертах, как зависят управления от состояния и возмущений, доходы U_{t+1} *нельзя считать случайными величинами* на каком бы то ни было вероятностном пространстве, а потому нельзя говорить и об *ожидаемом* (среднем) *приведенном доходе.*

Однако уже сейчас можно получить полезные оценки частичных сумм этого ряда, которые выполняются для любых числовых последовательностей, удовлетворяющих (3.2),(3.3). Содержательно эти оценки отвечают известной процедуре анализа *ex post.* Она состоит в оценке доходов, которые можно было бы в принципе получить при реализовавшихся в прошлом показателях экономической конъюнктуры. В данном случае в качестве параметров конъюнктуры выступают ряды x_t, Q_t, q_t..

Выражая U_{t+1} из (3.2), получаем для частичной суммы ряда (3.4) соотношение

$$\sum_{\tau=t}^{T}\rho^{t-\tau}U_{\tau+1} = M_t - Q_tK_t + q_tS_t + \sum_{\tau=t+1}^{T+1}\rho^{t-\tau+1}g^{\tau}x_{\tau} - (\rho-1)\sum_{\tau=t+1}^{T}\rho^{t-\tau}M_{\tau} + \\ + \sum_{\tau=t+1}^{T}\rho^{t-\tau}(\rho-Q_{\tau})K_{\tau} + \sum_{\tau=t+1}^{T}\rho^{t-\tau}(q_{\tau}-\rho)S_{\tau} + \rho^{t-T}K_{T+1} - \rho^{t-T}S_{T+1} - \rho^{t-T}M_{T+1}. \tag{3.6}$$

Сумма $\sum_{\tau=t+1}^{T}\rho^{t-\tau+1}g^{\tau}x_{\tau}$ в правой части (3.6) ограничена сверху, поскольку мы считаем ограниченными величины x_{τ}, и выполняется (3.5). Величина $-(\rho-1)\sum_{\tau=t+1}^{T}\rho^{t-\tau}M_{\tau}$, описывающая потери от «замораживания» денег в кассе, ограничена сверху нулем. Сумма $\sum_{\tau=t+1}^{T}\rho^{t-\tau}(\rho-Q_{\tau})K_{\tau}$ может стать сколь угодно большой, если банк позаимствует много средств в период, когда $\rho-Q_{\tau}>0$. Слагаемое $\sum_{\tau=t+1}^{T}\rho^{t-\tau}(q_{\tau}-\rho)S_{\tau}$ тоже может стать сколь угодно большим, если банк сделает большие вложения S_{τ} в период, когда $q_{\tau}-\rho>0$. Наблюдавшиеся реализации величин типа q_t, Q_t (см. рис. 1) не позволяют предполагать, что во все периоды выполняются неравенства $q_t \le \rho \le Q_t$, поэтому мы вводим понятие *лимитов* кредитования и вложения, т.е. требуем, чтобы

$$K_t g^{-t} \le \bar{K}, \qquad S_t g^{-t} \le \bar{S}, \tag{3.7}$$

где $\bar{K}$ и $\bar{S}$ – достаточно большие, но конечные положительные величины.

Увеличение приведенного дохода за счет роста слагаемого $\rho^{t-T}K_{T+1}$ в правой части (3.6) содержательно отвечает построению банком финансовой пирамиды: выплате процентов по кредитам за счет новых заимствований. В данном случае этот процесс исключается первым из ограничений (3.7). Таким образом, это ограничение играет также роль *условия отсутствия пирамиды* (no ponci game condition), которое в той или иной форме приходится накладывать практически во всех задачах финансового планирования.

Сделанные предположения позволяют дать очевидную, но очень полезную оценку приведенного дохода и обеспечивают корректность определения ряда (3.4).

Утверждение 1. *Если процент* Q_{τ}, *доходность* q_{τ} *и сальдо* x_{τ} *ограничены*

$$Q_{\tau} \in [\underline{Q}, \bar{Q}], \qquad q_{\tau} \in [\underline{q}, \bar{q}], \qquad x_{\tau} \in [-\underline{x}, \bar{x}], \tag{3.8}$$

то для любых последовательностей $\{Q_{\tau}\}\Big|_{\tau=t}^{\tau=\infty}$, $\{q_{\tau}\}\Big|_{\tau=t}^{\tau=\infty}$, $\{x_{\tau}\}\Big|_{\tau=t}^{\tau=\infty}$ *удовлетворяющих* (3.8), *любых последовательностей* $\{M_{\tau}\}\Big|_{\tau=t}^{\tau=\infty}$, $\{K_{\tau}\}\Big|_{\tau=t}^{\tau=\infty}$, $\{S_{\tau}\}\Big|_{\tau=t}^{\tau=\infty}$, $\{U_{\tau}\}\Big|_{\tau=t}^{\tau=\infty}$, *удовлетворяющих* (3.3), (3.7), *сумма ряда* NPV (3.4) *конечна или равна* $-\infty$, *и*

$$\sum_{\tau=t}^{\infty}\rho^{t-\tau}U_{\tau+1} \le \bar{A}g^{t+1} + M_t - Q_t K_t + q_t S_t, \tag{3.9}$$

где постоянная $\bar{A}$ *не зависит от выбора последовательностей, удовлетворяющих* (3.8),(3.3), (3.7).

Доказательство. Оценка (3.9) для частичных сумм ряда (3.4) уже фактически получена выше при анализе выражения (3.6). Сходимость ряда (3.4) к конечной величине или к $-\infty$ следует из того, что он в силу (3.6) представляет собой разность ряда $\sum_{\tau=t+1}^{\infty}\rho^{t-\tau}\left[(\rho-Q_\tau)K_\tau + (q_\tau-\rho)S_\tau\right]$, который в условиях утверждения сходится к конечной величине, и ряда $\sum_{\tau=t+1}^{\infty}\rho^{t-\tau}M_\tau$, в котором $M_\tau \ge 0$.

Оценка (3.9) основывается на «насильственных» ограничениях (3.7). Нам, однако, нужно потребовать большего. Как уже говорилось выше, в практически интересных случаях операции краткосрочного заимствования и краткосрочных вложений носят вынужденный характер, т.е. в принципе они для банка невыгодны. Формально это означает, что суммы $\sum_{\tau=t+1}^{\infty}\rho^{t-\tau}(\rho-Q_\tau)K_\tau$ и $\sum_{\tau=t+1}^{\infty}\rho^{t-\tau}(q_\tau-\rho)S_\tau$ в типичном случае должны быть отрицательными. И уж заведомо должна быть исключена возможность *арбитража* $q_t > Q_t$, когда средства занимаются под низкий процент и тут же вкладываются под высокий. Чтобы обеспечить эти условия, а также облегчить решение задачи об оптимальном поведении банка, мы делаем следующие предположения о статистических свойствах случайных величин q_t, Q_t, x_t.

1. Случайные величины q_t считаем одинаково распределенными при всех t. Их общую функцию распределения обозначаем через F_q и считаем, что она имеет компактный носитель

$$d\,F_q(q') = 0 \quad \text{при} \quad q' \notin \left[\underline{q}, \bar{q}\right], \qquad 1 < \underline{q} < \bar{q} < \infty. \tag{3.10}$$

2. Процентную ставку Q_t представляем как сумму q_t и положительной случайной величины Δ_t

$$Q_t = q_t + \Delta_t.. \tag{3.11}$$

Функцию распределения величин Δ_t, также одинаковую для всех t, обозначаем через F_Δ и считаем, что она имеет компактный носитель

$$d\,F_\Delta(\Delta') = 0 \quad \text{при} \quad \Delta' \notin \left[\underline{\Delta}, \bar{\Delta}\right], \qquad 0 < \underline{\Delta} < \bar{\Delta} < \infty. \tag{3.12}$$

3. Предполагаем, что

$$\mathbf{E}Q_t = \mathbf{E}q_t + \mathbf{E}\Delta_t > \rho > \mathbf{E}q_t > 1. \tag{3.13}$$

Это неравенство гарантирует, что в среднем чистый доход от операций с кредитами и вложениями будет отрицательным. Как и в случае постоянных процентов q_t, Q_t, рассмотренном в [1,2], выполнение неравенства (3.13) необходимо для того, чтобы задача оптимального управления ликвидностью имела решение.

Содержательно это неравенство можно мотивировать следующими соображениями. При нарушении неравенства $\rho > \mathbf{E}q_t$, банк будет выходить на лимит вложений $\bar{S}$, (3.7). Если таких банков будет много, предложение вложений будет велико и по логике рыночных отношений средняя доходность $\mathbf{E}q_t$ должна будет уменьшиться. Если даже банков, у которых $\rho > \mathbf{E}q_t$, мало, они фактически будут играть роль не банков, а рантье, удовлетворяющихся относительно невысокой доходностью $\mathbf{E}q_t$ безрисковых активов. В любом случае для реально работающих банков будет выполняться условие $\rho > \mathbf{E}q_t$.

Аналогично при массовом нарушении условия $\rho < \mathbf{E}Q_t$ предложение кредита будет большим, и процент $\mathbf{E}Q_t$ должен будет повыситься. Кроме того, при нарушении неравенства $\rho < \mathbf{E}Q_t$ банк будет проводить крайне близорукую политику: он будет «проедать» кредиты, а потом возвращать их с процентом за счет отрицательных значений чистого дохода $U_t < 0$. Деятельность такого банка нельзя анализировать, не учитывая ограничения снизу на U_t. В то же время, как мы увидим ниже, в условиях (3.13) получается вполне разумное решение и без учета крайне неудобных технически ограничений на U_t.

4. Случайные величины дохода x_t одинаково распределены и равномерно ограничены. Функцию распределения величины x_t обозначаем через F_x. Ограниченность означает, что

$$d\,F_x(x') = 0 \quad \text{при} \quad x' \notin [-\underline{x}, \overline{x}]. \tag{3.14}$$

5. Случайные величины

$$x_t, x_{t+1}, ..., q_t, q_{t+1}, ..., \Delta_t, \Delta_{t+1}, ... \quad \text{независимы в совокупности.} \tag{3.15}$$

В отличие от предыдущих предположений предположение о независимости не очень хорошо согласуется с представленными на рис. 1 динамическими рядами этих процента и доходности. Однако введение корреляций по времени фактически эквивалентно введению в задачу дополнительных фазовых переменных, а это практически исключает возможность получения явного решения. Успешный опыт использования более простой модели с постоянными q_t и Δ_t, [2], позволяет надеяться, что полученные в предположении независимости результаты будут иметь не только теоретическую, но и практическую ценность.

4. Стратегии поведения

Далее нам удобнее будет исключить систематический рост и работать с нормированными величинами кассовых остатков, кредитов, вложений, и чистых доходов и перенормированными процентами:

$$m_t = M_t g^{-t}, \quad k_t = K_t g^{-t}, \quad s_t = S_t g^{-t}, \quad u_t = U_t g^{-t}, \quad r_t = q_t g^{-1}, \quad d_t = \Delta_t g^{-1}, \quad \delta = \rho g^{-1}. \tag{4.1}$$

Ниже, как правило, определение «нормированный» будем опускать. Уравнение баланса (3.2) в новых обозначениях принимает вид

$$m_{t+1} = m_t\, g^{-1} - (r_t + d_t) k_t + k_{t+1} + r_t\, s_t - s_{t+1} + x_{t+1} - u_{t+1}, \tag{4.2}$$

а ограничение (3.7) – вид

$$k_t \le \overline{K}, \qquad s_t \le \overline{S}.. \tag{4.3}$$

В соответствии с представлением (3.11) назовем набор величин

$$\mathbf{z}_t = \langle m_t, k_t, s_t, r_t, d_t \rangle \in \mathcal{Z} = \mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{R}^1_+ \times \left[\underline{q}g^{-1}, \overline{q}g^{-1}\right] \times \left[\underline{\Delta}g^{-1}, \overline{\Delta}g^{-1}\right] \tag{4.4}$$

состоянием банка (в конце периода t). Прошлые значения r_t, d_t мы включаем в список переменных состояния потому, что они заведомо известны банку в момент выбора управлений. Набор величин

$$\mathbf{u}_t = \langle m_{t+1}, k_{t+1}, s_{t+1}, u_{t+1} \rangle \in \mathcal{U} = \mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{R}^1 \text{ -} \tag{4.5}$$

считаем *управлениями* банка (в период $t+1$), а набор величин

$$\boldsymbol{\eta}_t = \langle x_{t+1}, r_{t+1}, d_{t+1} \rangle \in \mathcal{H} = [-\underline{x}, \overline{x}] \times \left[\underline{q}g^{-1}, \overline{q}g^{-1}\right] \times \left[\underline{\Delta}g^{-1}, \overline{\Delta}g^{-1}\right] \text{ -} \tag{4.6}$$

конъюнктурой (или *возмущением*). Распределения F_x, F_r и F_d вместе с условием независимости (3.15) определяют по теореме Колмогорова [6] меру φ на множестве $\mathbb{Z}^{\mathcal{H}}$ последовательностей $\boldsymbol{\eta}_\tau$, $-\infty < \tau < \infty$ (пространстве реализаций конъюнктуры), а отдельные компоненты $\boldsymbol{\eta}_t$ становятся случайными величинами, определенными на этом вероятностном пространстве. Отрезки последовательностей $\boldsymbol{\eta}_\tau$ от $\tau = n$ до $\tau = m$ ниже обозначаем через $\boldsymbol{\eta}_{n,m}$, а интегралы по мере φ от функций на $\mathbb{Z}^{\mathcal{H}}$, измеримых относительно $\boldsymbol{\eta}_{n,m}$ – через $\int f(\boldsymbol{\eta}_{n,m})\varphi(d\boldsymbol{\eta}_{n,m})$.

Стратегией поведения назовем инструкцию, которая точно определяет, какие величины управлений выбирает банк в данном состоянии при данной конъюнктуре. Формально стратегия Ω – это заданная при каждом t четверка *борелевских* функций[3]

$$\Omega = \left\langle \tilde{m}_t^\Omega : \mathcal{Z} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}^1_+,\ \ \tilde{k}_t^\Omega : \mathcal{Z} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}^1_+,\ \ \tilde{s}_t^\Omega : \mathcal{Z} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}^1_+,\ \ \tilde{u}_t^\Omega : \mathcal{Z} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}^1 \right\rangle, \tag{4.7}$$

которые при каждом $\mathbf{z} = \langle m,k,s,r,d \rangle$, $\boldsymbol{\eta} = \langle x', r', d' \rangle$ удовлетворяют ограничениям (4.2), (4.3) в том смысле, что

$$\begin{gathered} \tilde{m}_t^\Omega\left(\langle m,k,s,r,d\rangle, \langle x',r',d'\rangle\right) = mg^{-1} - (r+d)k + \tilde{k}_t^\Omega\left(\langle m,k,s,r,d\rangle, \langle x',r',d'\rangle\right) + \\ + rs - \tilde{s}_t^\Omega\left(\langle m,k,s,r,d\rangle, \langle x',r',d'\rangle\right) + x' - \tilde{u}_t^\Omega\left(\langle m,k,s,r,d\rangle, \langle x',r',d'\rangle\right), \\ \tilde{k}_t^\Omega\left(\langle m,k,s,r,d\rangle, \langle x',r',d'\rangle\right) \le \overline{K}, \quad \tilde{s}_t^\Omega\left(\langle m,k,s,r,d\rangle, \langle x',r',d'\rangle\right) \le \overline{S}. \end{gathered} \tag{4.8}$$

Множество стратегий, удовлетворяющих (4.7) - (4.8), обозначим через $\mathcal{S}_\eta$.

Кроме этих ограничений, мы рассмотрим еще дополнительные *информационные ограничения* на возможный вид зависимости дохода $\tilde{u}_t^\Omega$ от возмущений $\boldsymbol{\eta}_t$. В общем плане информационные ограничения выражаются как требования измеримости функций, составляющих стратегию, относительно заданных ограниченных наборов переменных состояния и возмущения. Содержательно эти ограничения отражают невозможность или нежелательность реагировать изменением управления на некоторые изменения состояния или возмущения. Мы накладываем эти ограничения только на управление $\tilde{u}_t^\Omega$ потому, что управления $\tilde{k}_t^\Omega$ и $\tilde{s}_t^\Omega$ содержа-

[3] Из общих соображений стоило бы начать с более общего класса стратегий, учитывающих предысторию состояний и возмущений [4], но здесь из независимости возмущений почти очевидно следует, что учет предыстории не поможет увеличить значение функционала задачи (достаточность марковских стратегий [5]).

тельно служат инструментами «быстрого реагирования»[4], а управление $\tilde{m}_t^{\Omega}$ по сути не является независимым (см. (4.8)).

Основным для нас здесь, как и в [1,2], будет случай, когда доход $\tilde{u}_t$ *не зависит* от $\boldsymbol{\eta}_t = \langle x_{t+1}, r_{t+1}, d_{t+1} \rangle$ (функции $\tilde{u}_t$ измеримы по $\mathbf{z}$). Такое предположение можно интерпретировать следующим образом: банк стремится обеспечить относительно стабильный поток дохода $\tilde{u}_t$, не реагирующий на флуктуации случайных величин $x_{t+1}, r_{t+1}, d_{t+1}$. Множество стратегий из $\mathcal{S}_\eta$, удовлетворяющих этому условию, обозначим через $\mathcal{S}_0$.

В разделе 8 мы также приведем результаты для случая, когда $\tilde{u}_t$ зависит от текущего потока доходов x_{t+1}, но не от процентов r_{t+1}, d_{t+1} (множество таких стратегий из $\mathcal{S}_\eta$ обозначаем через $\mathcal{S}_x$), и для случая, когда, напротив, $\tilde{u}_t$ зависит от процентов r_{t+1}, d_{t+1}, но не от x_{t+1} (множество таких стратегий из $\mathcal{S}_\eta$ обозначаем через $\mathcal{S}_r$). Очевидно,

$$\mathcal{S}_\eta \supset \mathcal{S}_r \cup \mathcal{S}_x, \; \mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_x \cap \mathcal{S}_r. \tag{4.9}$$

Каждая стратегия при заданном в момент времени t начальном состоянии $\mathbf{z}$ определяет при $\tau > t$ марковский процесс изменения состояния

$$\mathbf{z}_{\tau+1} = \mathbf{G}_\tau^{\Omega}(\mathbf{z}_\tau, \boldsymbol{\eta}_\tau), \; \tau \ge t, \; \mathbf{z}_t = \mathbf{z}, \tag{4.10}$$

$$\mathbf{G}_t^{\Omega}\left(\langle m,k,s,r,d\rangle, \langle x',r',d'\rangle\right) = \left\langle \begin{array}{l} \tilde{m}_t^{\Omega}\left(\langle m,k,s,r,d\rangle, \langle x',r',d'\rangle\right), \; \tilde{k}_t^{\Omega}\left(\langle m,k,s,r,d\rangle, \langle x',r',d'\rangle\right), \\ \tilde{s}_t^{\Omega}\left(\langle m,k,s,r,d\rangle, \langle x',r',d'\rangle\right), r', d' \end{array} \right\rangle$$

и случайную последовательность платежей

$$u_{\tau+1} = \tilde{u}_\tau^{\Omega}(\mathbf{z}_\tau, \boldsymbol{\eta}_\tau), \; \tau \ge t. \tag{4.11}$$

Мы допускаем, что начальные условия для k_t и s_t могут выходить за пределы лимитов (4.3). Движение в силу любой стратегии уже на следующем шаге введет эти величины в рамки лимитов кредитования и вложения (см. (4.8)).

5. Ожидаемый приведенный доход и уравнение Колмогорова

Поскольку функции, составляющие стратегию – борелевские, соотношения (4.10), (4.11) задают $\mathbf{z}_{\tau+1}$, $u_{\tau+1}$ как борелевские функции от начального условия $\mathbf{z}$ и случайных величин $\boldsymbol{\eta}_{\tau,t}$, поэтому при заданной стратегии сами $\mathbf{z}_{\tau+1}$ и $u_{\tau+1}$, а следовательно и $u_{\tau+1}$, оказываются случайными величинами (φ-измеримыми функциями на $\mathbb{Z}^{\mathcal{H}}$) и можно ставить вопрос об ожидаемом (среднем) значении приведенного дохода.

В силу утв. 1 при любой стратегии $\Omega \in \mathcal{S}$ и любого начального значения ряд (3.4) также представляет собой случайную величину, ограниченную сверху и, возможно, принимающую

---

[4] Если величине $\tilde{k}_t^{\Omega}$ не разрешать реагировать на возмущения, то допустимых стратегий фактически не будет. Случай, когда $\tilde{s}_t^{\Omega}$ не зависит от возмущения, содержательно более реалистичен. Он был рассмотрен (при постоянных процентах) в неопубликованной работе С.С. Панова. От всех рассматриваемых ниже случаев он отличается тем, что на оптимальной траектории получаются ненулевые кассовые остатки.

значение $-\infty$. Определение математического ожидания естественно распространяется на такие величины $f\left(\eta_{t,\infty}\right)$

$$\bar{\mathsf{E}}_{\eta_{t,\infty}}\{f\} = \begin{cases} \int f\left(\eta_{t,\infty}\right)\varphi\left(d\eta_{t,\infty}\right) & \text{если } f(\bullet) \text{ п. в. конечна и интегрируема,} \\ -\infty & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{5.1}$$

Утверждение 2. *Если f – ограниченная сверху борелевская функция от $\eta_{t,\infty}$, возможно принимающая значение $-\infty$,* то

$$\bar{\mathsf{E}}_{\eta_{t,\infty}}\{f\} = \lim_{E\to\infty}\int \max\left(-E, f\left(\eta_{t,\infty}\right)\right)\varphi\left(d\eta_{t,\infty}\right) + (-\infty)\cdot\varphi\left(f^{-1}\left(\{-\infty\}\right)\right), \tag{5.2}$$

где по определению считаем, что $0\cdot(-\infty) = 0$.

Доказательство. Поскольку функция f ограничена сверху, интегралы в правой части (5.2) существуют и монотонно убывают по E. Поэтому в (5.2) предел, конечный или равный $-\infty$, существует, и сумма в правой части (5.2) имеет смысл.

Если f почти всюду конечна и интегрируема, то второе слагаемое в правой части (5.2) обращается в 0, а первое по теореме Фату равно $\int f\left(\eta_{t,\infty}\right)\varphi\left(d\eta_{t,\infty}\right)$.

Пусть теперь выражение в правой части (5.2) конечно. Тогда $\varphi\left(f^{-1}\left(\{-\infty\}\right)\right) = 0$, т.е. f – почти всюду конечна. Как известно, интеграл Лебега можно задать в виде

$$\int f\left(\eta_{t,\infty}\right)\varphi\left(d\eta_{t,\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_k \frac{k-1}{n}\varphi\left(f^{-1}\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right)\right),$$

если только ряды в этом выражении абсолютно сходятся. Поскольку функция f ограничена сверху, достаточно убедиться в абсолютной сходимости ряда

$$\sum_{k=-\infty}^{k=0} \frac{k}{n}\varphi\left(f^{-1}\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right)\right).$$

Его частичные суммы до $k = -K$ монотонно убывают по K и, как легко видеть, оцениваются снизу величиной $\int \max\left(-\frac{K}{n}, f\left(\eta_{t,\infty}\right)\right)\varphi\left(d\eta_{t,\infty}\right)$. Таким образом, ряды в выражении для интеграла Лебега функции f абсолютно сходятся, ограниченны в совокупности и монотонно убывают по n, поэтому функция f в случае конечности выражения (5.2) интегрируема.

Теперь *ожидаемый* (средний) *приведенный доход* при стратегии $\Omega \in \mathcal{S}$ и начальном состоянии $\mathbf{z}_t = \mathbf{z}$ можно определить как

$$J_t^{\Omega}(\mathbf{z}) = \bar{\mathsf{E}}_{\eta_{t,\infty}}\left\{\sum_{\tau=t}^{\infty}\rho^{t-\tau}U_{\tau+1}\middle|\mathbf{z}_t = \mathbf{z}\right\} = g^{t+1}j_t^{\Omega}(\mathbf{z}), \tag{5.3}$$

$$j_t^{\Omega}(\mathbf{z}) = \bar{\mathsf{E}}_{\eta_{t,\infty}}\left\{\sum_{\tau=t}^{\infty}\delta^{t-\tau}u_{\tau+1}\right\}, \tag{5.4}$$

где величины $u_{\tau+1}$ определены соотношениями (4.10), (4.11).

Утверждение 3. *Величина $j_t^{\Omega}(\mathbf{z})$ удовлетворяет неравенству*

$$j_t^{\Omega}(\mathbf{z}) \le \bar{A} + m_t g^{-1} - (r_t + d_t)k_t + r_t s_t \tag{5.5}$$

и уравнению Колмогорова

$$j_t^{\Omega}(\mathbf{z}) = \bar{\mathbf{E}}_{\boldsymbol{\eta}}\left\{\tilde{u}_t^{\Omega}(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}) + \delta^{-1} j_{t+1}^{\Omega}(\mathbf{G}_t^{\Omega}(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})\right\}, \tag{5.6}$$

где в соответствии с определением меры φ *и* (5.1)

$$\bar{\mathsf{E}}_{\eta}\{f\} = \begin{cases} \int f(\langle x,r,d\rangle)dF_x dF_r dF_d & \text{если } f(\bullet) \text{ п. в. конечна и интегрируема,} \\ -\infty & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{5.7}$$

(Поскольку η_t распределены одинаково при всех t, вместо $\bar{\mathsf{E}}_{\eta_t}$ можно писать просто $\bar{\mathsf{E}}_{\eta}$).

Доказательство. Неравенство (5.5) следует из (3.9) и (5.4). Перейдем теперь к доказательству равенства (5.6).

Прежде всего, покажем, что для введенного функционала $\bar{\mathbf{E}}$ верно обычное правило вычисления повторного математического ожидания, а именно:

$$\bar{\mathbf{E}}_{\eta_{t,\infty}}\left\{\sum_{\tau=t}^{\infty}\delta^{t-\tau}u_{\tau+1}\,\middle|\,\mathbf{z}_t=\mathbf{z}\right\} = \bar{\mathbf{E}}_{\eta_t}\left\{\bar{\mathbf{E}}_{\eta_{t+1,\infty}}\left\{\sum_{\tau=t}^{\infty}\delta^{t-\tau}u_{\tau+1}\,\middle|\,\mathbf{z}_{t+1}=\mathbf{G}_t^{\Omega}(\mathbf{z},\eta_t)\right\}\middle|\,\mathbf{z}_t=\mathbf{z}\right\}. \tag{5.8}$$

Если $\sum_{\tau=t}^{\infty}\delta^{t-\tau}u_{\tau+1}$ почти всюду конечна и интегрируема по $\varphi(d\eta_{t,\infty})$, то равенство (5.8) выполнено в силу известного свойства повторных математических ожиданий и формул (4.11), (4.10), определяющих случайные величины u_τ.

Если $\sum_{\tau=t}^{\infty}\delta^{t-\tau}u_{\tau+1}$ обращается в $-\infty$ на множестве положительной меры или не интегрируема по $\varphi(d\eta_{t,\infty})$, то левая часть (5.8) согласно (5.1) обращается в $-\infty$. В силу (5.2) функция

$$f(\mathbf{z},\eta_t) = \bar{\mathbf{E}}_{\eta_{t+1,\infty}}\left\{\sum_{\tau=t}^{\infty}\delta^{t-\tau}u_{\tau+1}\,\middle|\,\mathbf{z}_{t+1}=\mathbf{G}_t^{\Omega}(\mathbf{z},\eta_t)\right\} \quad - \tag{5.9}$$

ограниченная сверху борелевская функция, возможно принимающая значения $-\infty$, поэтому правая часть (5.8) определена.

Допустим, что правая часть (5.8) конечна. Тогда в силу (5.1) $f(\mathbf{z},\eta_t)$ почти всюду конечна и интегрируема по $\varphi(d\eta_t)$. Но тогда, опять таки в силу (5.1), при почти всех η_t $\sum_{\tau=t}^{\infty}\delta^{t-\tau}u_{\tau+1}$ интегрируема по $\varphi(d\eta_{t+1,\infty})$. Однако, в силу независимости случайных величин η_τ, $\varphi(d\eta_{t,\infty}) = \varphi(d\eta_t)\otimes\varphi(d\eta_{t+1,\infty})$, и по теореме Фубини из существования повторного интеграла следует интегрируемость $\sum_{\tau=t}^{\infty}\delta^{t-\tau}u_{\tau+1}$ по $\varphi(d\eta_{t,\infty})$, что противоречит предположению.

Сумму ряда в (5.9) можно представить в виде

$$\sum_{\tau=t}^{\infty}\delta^{t-\tau}u_{\tau+1} = \tilde{u}_t^{\Omega}(\mathbf{z},\eta_t) + \delta^{-1}\sum_{\tau=t+1}^{\infty}\delta^{t+1-\tau}u_{\tau+1}.$$

Если подставить это выражение в (5.9) и применить для вычисления $f(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}_t)$ формулу (5.2), то остающееся постоянным при вычислении $\overline{\mathbf{E}}_{\boldsymbol{\eta}_{t+1,\infty}}$ слагаемое $\tilde{u}_t^{\Omega}(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}_t)$, а также положительный множитель δ^{-1} можно вынести последовательно за знак максимума, интеграла и предела[5], и в результате получится, что

$$f(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}_t)=\tilde{u}_t^{\Omega}(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}_t)+\delta^{-1}\overline{\mathbf{E}}_{\boldsymbol{\eta}_{t+1,\infty}}\left\{\sum_{\tau=t+1}^{\infty}\delta^{t+1-\tau}u_{\tau+1}\middle|\mathbf{z}_{t+1}=\mathbf{G}_t^{\Omega}(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}_t)\right\}.$$

Поскольку выше было доказано, что $j_t^{\Omega}(\mathbf{z})=\overline{\mathbf{E}}_{\boldsymbol{\eta}_t}\left\{f(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}_t)\right\}$, а в силу (5.4)

$$\overline{\mathbf{E}}_{\boldsymbol{\eta}_{t+1,\infty}}\left\{\sum_{\tau=t+1}^{\infty}\delta^{t+1-\tau}u_{\tau+1}\middle|\mathbf{z}_{t+1}=\mathbf{G}_t^{\Omega}(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}_t)\right\}=j_{t+1}^{\Omega}(\mathbf{G}_t^{\Omega}(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}_t)),$$

равенство (5.6) установлено.

6. Оптимальная стратегия и уравнение Беллмана

Оптимальная стратегия должна в каком-то смысле максимизировать приведенный доход $J_t(\mathbf{z})$ или, что тоже самое, $j_t(\mathbf{z})$ (см. (5.3), (5.4)). Оптимальная стратегия будет, разумеется, зависеть от того, какой случай информационных ограничений $i=\eta,0,x,r$ мы рассматриваем (см. (4.9)). Поскольку приведенный доход зависит не только от стратегии, но и от начального состояния, оптимальной будем считать такую стратегию $\hat{\Omega}\subset\mathcal{S}_i$, для которой

$$\hat{j}_t(\mathbf{z})=j_t^{\hat{\Omega}}(\mathbf{z})\geq j_t^{\Omega}(\mathbf{z})\quad\text{для всех}\quad \mathbf{z},\ t\quad\text{и всех}\quad \Omega\subset\mathcal{S}_i. \tag{6.1}$$

Утверждение 4. *Если оптимальная в смысле* (6.1) *стратегия существует, то*:

1. *Максимальное значение приведенного дохода не зависит от времени.*

$$\hat{j}_t(\mathbf{z})=\hat{j}(\mathbf{z}). \tag{6.2}$$

2. *Максимальное значение приведенного дохода как функция начального условия удовлетворяет уравнению Беллмана*

$$\hat{j}(\mathbf{z})=\max_{\langle\tilde{u}(\cdot),\tilde{m}(\cdot),\tilde{k}(\cdot),\tilde{s}(\cdot)\rangle\in\mathcal{N}_i(\mathbf{z})}\overline{\mathbf{E}}_{\boldsymbol{\eta}}\left\{\tilde{u}(\boldsymbol{\eta})+\delta^{-1}\hat{j}(G^{\hat{\Omega}}(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}))\right\}, \tag{6.3}$$

где максимум берется по множеству $\mathcal{N}_i(\mathbf{z})$ наборов $\langle\tilde{u}(\cdot),\tilde{m}(\cdot),\tilde{k}(\cdot),\tilde{s}(\cdot)\rangle$ борелевских функций от $\boldsymbol{\eta}$, удовлетворяющих условиям (4.8) *и информационным ограничениям, соответствующим случаю $i=\eta,0,x,r$ при данном состоянии $\mathbf{z}$.*

Доказательство. И ограничения (4.8), и информационные ограничения связывают значения управляющих переменных, относящихся только к одному моменту времени t и к одному состоянию $\mathbf{z}$. Это означает, что мы не выйдем за пределы любого из допустимых множеств стратегий $\mathcal{S}_i$, если только при одной паре значений t, $\mathbf{z}$ заменим набор функций, составляющих допустимую стратегию, другим набором функций из $\mathcal{N}_i(\mathbf{z})$.

Для оптимальной стратегии, как и для всякой другой, выполнено соотношение (5.6)

---

[5] Для этого параметр предельного перехода E надо заменить на $\delta^{-1}E-\tilde{u}_t^{\Omega}(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}_t)$.

$$\hat{j}_t(\mathbf{z}) = \overline{\mathbf{E}}_{\boldsymbol{\eta}}\left\{\tilde{u}_t^{\hat{\Omega}}(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}) + \delta^{-1}\hat{j}_{t+1}(\mathbf{G}_t^{\hat{\Omega}}(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})\right\}. \tag{6.4}$$

Предположим, что для некоторых $\mathbf{z}$ и t

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{E}}_{\boldsymbol{\eta}}&\left\{\tilde{u}_t^{\hat{\Omega}}(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}) + \delta^{-1}\hat{j}_{t+1}\left(\left\langle \tilde{m}_t^{\hat{\Omega}}(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}), \tilde{k}_t^{\hat{\Omega}}(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}), \tilde{s}_t^{\hat{\Omega}}(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}), r', d'\right\rangle\right)\right\} < \\ &< \sup_{\langle \tilde{u}(\cdot),\tilde{m}(\cdot),\tilde{k}(\cdot),\tilde{s}(\cdot)\rangle \in \mathcal{N}_i(\mathbf{z})} \overline{\mathbf{E}}_{\boldsymbol{\eta}}\left\{\tilde{u}_t(\boldsymbol{\eta}) + \delta^{-1}\hat{j}_{t+1}\left(\left\langle \tilde{m}_t(\boldsymbol{\eta}), \tilde{k}_t(\boldsymbol{\eta}), \tilde{s}_t(\boldsymbol{\eta}), r', d'\right\rangle\right)\right\},\end{aligned} \tag{6.5}$$

где $\boldsymbol{\eta} = \langle x', r', d'\rangle$.

Тогда в $\mathcal{N}_i(\mathbf{z})$ найдется набор функций $\left\langle \bar{\tilde{u}}_t(\boldsymbol{\eta}), \bar{\tilde{m}}_t(\boldsymbol{\eta}), \bar{\tilde{k}}_t(\boldsymbol{\eta}), \bar{\tilde{s}}_t(\boldsymbol{\eta})\right\rangle$, такой, что

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{E}}_{\boldsymbol{\eta}}&\left\{\tilde{u}_t^{\hat{\Omega}}(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}) + \delta^{-1}\hat{j}_{t+1}\left(\left\langle \tilde{m}_t^{\hat{\Omega}}(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}), \tilde{k}_t^{\hat{\Omega}}(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}), \tilde{s}_t^{\hat{\Omega}}(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}), r', d'\right\rangle\right)\right\} < \\ &< \overline{\mathbf{E}}_{\boldsymbol{\eta}}\left\{\bar{\tilde{u}}_t(\boldsymbol{\eta}) + \delta^{-1}\hat{j}_{t+1}\left(\left\langle \bar{\tilde{m}}_t(\boldsymbol{\eta}), \bar{\tilde{k}}_t(\boldsymbol{\eta}), \bar{\tilde{s}}_t(\boldsymbol{\eta}), r', d'\right\rangle\right)\right\}.\end{aligned}$$

Заменяя в стратегии $\hat{\Omega}$ набор функций $\left\langle \tilde{u}_t^{\hat{\Omega}}(\mathbf{z},\cdot), \tilde{m}_t^{\hat{\Omega}}(\mathbf{z},\cdot), \tilde{k}_t^{\hat{\Omega}}(\mathbf{z},\cdot), \tilde{s}_t^{\hat{\Omega}}(\mathbf{z},\cdot)\right\rangle$ набором $\left\langle \bar{\tilde{u}}_t(\cdot), \bar{\tilde{m}}_t(\cdot), \bar{\tilde{k}}_t(\cdot), \bar{\tilde{s}}_t(\cdot)\right\rangle$, получим новую допустимую стратегию $\overline{\Omega}$, для которой в силу (5.6) $\hat{j}_t(\mathbf{z}) = j_t^{\hat{\Omega}}(\mathbf{z}) < j_t^{\overline{\Omega}}(\mathbf{z})$, что противоречит оптимальности $\hat{\Omega}$.

Таким образом, для оптимальной стратегии в (6.5) должно выполняться не неравенство, а равенство, причем в силу (6.4) точная верхняя грань должна достигаться. Приходим к уравнению Беллмана в форме

$$\hat{j}_t(\mathbf{z}) = \max_{\langle \tilde{u}(\cdot),\tilde{m}(\cdot),\tilde{k}(\cdot),\tilde{s}(\cdot)\rangle \in \mathcal{N}_i(\mathbf{z})} \overline{\mathbf{E}}_{\boldsymbol{\eta}}\{\tilde{u}(\boldsymbol{\eta})\} + \delta^{-1}\overline{\mathbf{E}}_{\boldsymbol{\eta}}\left\{\hat{j}_{t+1}(\langle \tilde{m}(\boldsymbol{\eta}), \tilde{k}(\boldsymbol{\eta}), \tilde{s}(\boldsymbol{\eta}), r', d'\rangle)\right\}. \tag{6.6}$$

Предположим теперь, что при некоторых t, τ $\hat{j}_t(\mathbf{z}) < \hat{j}_\tau(\mathbf{z})$. Поскольку множества $\mathcal{N}_i(\mathbf{z})$ не зависят от времени, ничто не мешает нам заменить стратегию $\left\langle \tilde{u}_t^{\hat{\Omega}}(\mathbf{z},\cdot), \tilde{m}_t^{\hat{\Omega}}(\mathbf{z},\cdot), \tilde{k}_t^{\hat{\Omega}}(\mathbf{z},\cdot), \tilde{s}_t^{\hat{\Omega}}(\mathbf{z},\cdot)\right\rangle$ на сдвинутую по времени стратегию $\left\langle \tilde{u}_{\tau-t}^{\hat{\Omega}}(\mathbf{z},\cdot), \tilde{m}_{\tau-t}^{\hat{\Omega}}(\mathbf{z},\cdot), \tilde{k}_{\tau-t}^{\hat{\Omega}}(\mathbf{z},\cdot), \tilde{s}_{\tau-t}^{\hat{\Omega}}(\mathbf{z},\cdot)\right\rangle$. Такая стратегия даст в момент t приведенный доход $\hat{j}_\tau(\mathbf{z})$ больший, чем $\hat{j}_t(\mathbf{z})$, что противоречит оптимальности $\hat{\Omega}$. Утверждение доказано.

Подчеркнем, что мы получили уравнение Беллмана как *необходимое* условие оптимальности.

Заметим, что если существует хотя бы одна стратегия $\overline{\Omega}$, для которой величина $j_t^{\overline{\Omega}}(\mathbf{z})$ конечна при всех $t, \mathbf{z}$, то при поиске оптимальных стратегий нет нужды учитывать возможность обращения $\hat{j}_t(\mathbf{z})$ в $-\infty$, и вместо оператора $\overline{\mathbf{E}}_{\boldsymbol{\eta}}$ можно использовать обычное математическое ожидание. Стратегия $\overline{\Omega}$ действительно есть. Предъявим ее мы позже, но использовать факт ее существования будем сразу. Если $\hat{j}_t(\mathbf{z})$ интегрируема, то уравнение Беллмана (6.3) принимает вид

$$\begin{aligned}&\hat{j}(m,k,s,r,d) = \\ &= \max_{\langle \tilde{u}(\cdot),\tilde{m}(\cdot),\tilde{k}(\cdot),\tilde{s}(\cdot)\rangle \in \mathcal{N}_i(m,k,s,r,d)} \int\left[\tilde{u}(\boldsymbol{\eta}) + \delta^{-1}\hat{j}(\tilde{m}(\boldsymbol{\eta}), \tilde{k}(\boldsymbol{\eta}), \tilde{s}(\boldsymbol{\eta}), r', d')\right]\varphi(d\boldsymbol{\eta}),\end{aligned} \tag{6.7}$$

где

$$\varphi(d\boldsymbol{\eta}) = dF_x(x')dF_r(r')dF_d(d'), \qquad \boldsymbol{\eta} = \langle x', r', d' \rangle.$$

7. Решение задачи управления ликвидностью в основном случае

Как уже говорилось выше в разделе 4, основным случаем информационных ограничений для нас будет случай $\mathcal{S}_0$, когда доход $\tilde{u}_t$ считается не зависящим от возмущения $\boldsymbol{\eta}$. Найдем, как должна выглядеть оптимальная стратегия в этом случае.

Если $\tilde{u}$ не зависит от $\boldsymbol{\eta}$, то в (6.7) слагаемое $\tilde{u}$ можно вынести из-под знака интеграла. С другой стороны, максимум интеграла по *функциям* $\tilde{m}(\cdot), \tilde{k}(\cdot), \tilde{s}(\cdot)$ от $\boldsymbol{\eta}$ равен, очевидно, интегралу от максимума подынтегрального выражения по *значениям* этих функций. Поэтому в случае $\mathcal{S}_0$ уравнение (6.7) приобретает вид

$$\hat{j}(m,k,s,r,d) = \\ = \max_{u'}\{u' + \delta^{-1}\int \max_{\langle m',k',s'\rangle \in \mathcal{N}_0'(m,k,s,r,d,u')} \hat{j}(m',k',s',r',d')dF_x(x')dF_r(r')dF_d(d')\}, \tag{7.1}$$

где в силу (4.8)

$$\mathcal{N}_0'(m,k,s,r,d,u') = \left\{ \langle m',k',s' \rangle \middle| \begin{array}{l} m',k',s' \geq 0, k' \leq \bar{K}, s' \leq \bar{S} \\ m' = m g^{-1} - (r+d)k + k' + rs - s' + x - u' \end{array} \right\}.$$

Замена неограниченной переменной максимизации

$$u' = \xi + m g^{-1} - (r+d)k + rs \tag{7.2}$$

и исключение переменной m' с помощью балансового равенства приводит уравнение (7.1) к виду

$$\hat{j}(m,k,s,r,d) = m g^{-1} - (r+d)k + rs + h, \tag{7.3}$$

$$h = \max_{\xi}\{\xi + \delta^{-1}\int \max_{\substack{x'-\xi+k'-s'\geq 0 \\ 0\leq k'\leq \bar{K}, \\ 0\leq s'\leq \bar{S}}} \hat{j}(x'-\xi+k'-s',k',s',r',d')dF_x(x')dF_r(r')dF_d(d')\}. \tag{7.4}$$

Как показывает (7.3), ожидаемый доход банка $\hat{j}$ можно представить в виде двух частей. Первая часть $mg^{-1} - (r+d)k + rs$ представляет собой максимальный доход (положительный или отрицательный), который банк может извлечь из текущего состояния $\mathbf{z} = \langle m,k,s,r,d \rangle$, независимо от будущих поступлений или платежей x_{t+1}. Вторая же часть, h, представляет собой оценку того, что получит банк, если будет придерживаться оптимальной стратегии в будущем. Величина h от состояния $\mathbf{z}$, как видно из (7.4), *не зависит*. Это есть следствие того, что мы не ограничиваем снизу доход u_t.

Подставив (7.3) в (7.4), получим, что

$$h = \delta^{-1}h + \\ + \max_{\xi}\{\xi + \delta^{-1}\int \max_{\substack{x'-\xi+k'-s'\geq 0 \\ 0\leq k'\leq \bar{K}, \\ 0\leq s'\leq \bar{S}}} \Big((x'-\xi+k'-s')g^{-1} - (r'+d')k' + r's'\Big)dF_x(x')dF_r(r')dF_d(d')\}. \tag{7.5}$$

Ограничения $k' \le \bar{K}$ и $s' \le \bar{S}$ нам, вообще говоря, нужны для того, чтобы исключить возможность построения банком финансовой пирамиды. В этом плане не особо важно, насколько велики будут $\bar{K}, \bar{S}$. Поэтому далее найдем стратегию, удовлетворяющую уравнению (7.5) без ограничений $k' \le \bar{K}$ и $s' \le \bar{S}$, а впоследствии покажем, что найденные таким образом оптимальные значения k' и s' удовлетворяют данным ограничениям при достаточно больших $\bar{K}$ и $\bar{S}$.

Поскольку $g(r'+d') = Q > 1$ и $gr' = q > 1$ (см. (3.10)-(3.12), (4.1)), то выражение $(k'-s'+x'-\xi)g^{-1} - (r'+d')k' + r's'$ возрастает, когда k' и s' уменьшаются на одну и ту же величину. Рассматривая два случая – $k' = 0$ и $s' = 0$, , получим, что максимум в (7.5) достигается при значениях $m' = 0$, $k' = [\xi - x']_+$, $s' = [x' - \xi]_+$, где $[a]_+ = \max\{a, 0\}$.

Подставляя оптимальные значения k' и s' в (7.5), получаем

$$(\delta-1)h = \max_{\xi}\left\{\delta\xi + \int\left(r'[x'-\xi]_+ - (r'+d')[\xi - x']_+\right)dF_x(x')dF_r(r')dF_d(d')\right\} =$$
$$= \max_{\xi}\left\{\delta\xi + (\mathsf{E}r)\int_{\xi}^{+\infty}(x'-\xi)dF_x(x') - (\mathsf{E}r + \mathsf{E}d)\int_{-\infty}^{\xi}(\xi - x')dF_x(x')\right\} \qquad (7.6)$$

Нетрудно проверить, что неравенство (3.13) необходимо и достаточно для того, чтобы выражение в фигурных скобках в (7.6) стремилось к $-\infty$ при $\xi \to \pm\infty$, и, тем самым, достигало максимума при конечном значении ξ. Если функция распределения F_x непрерывна, то, дифференцируя по ξ выражение под знаком максимума в (7.6), получим, что максимум достигается в единственной точке $\xi = \hat{\xi}$, где

$$F_x(\hat{\xi}) = \frac{\delta - \mathsf{E}r}{\mathsf{E}d}. \qquad (7.7)$$

В силу (3.14) $\hat{\xi} \in [-\underline{x}, \bar{x}]$, и найденные значения k' и s' не превышают $2\bar{x}$. Это означает, что при $\bar{K} \ge 2\bar{x}$ и $\bar{S} \ge 2\bar{x}$ ограничения (4.3) становятся неактивными. Поэтому мы вправе найденную стратегию считать удовлетворяющей (7.5).

Таким образом, мы показали, что в случае $\mathcal{S}_0$, если оптимальная стратегия существует, то она имеет вид

$$m' = 0, \qquad k' = [\hat{\xi} - x']_+, \qquad s' = [x' - \hat{\xi}]_+, \qquad u' = \hat{\xi} + mg^{-1} - (r+d)k + rs, \qquad (7.8)$$

где $\hat{\xi}$ определяется уравнением (7.7). По построению эта стратегия принадлежит множеству $\mathcal{S}_0$ при $\bar{K} \ge 2\bar{x}$, $\bar{S} \ge 2\bar{x}$. Независимо от того, существует оптимальная стратегия или нет, прямым вычислением можно убедиться, что стратегия (7.8) дает конечное значение приведенного дохода, что оправдывает использование в уравнении Беллмана обычного математического ожидания вместо оператора $\bar{\mathsf{E}}_\eta$ (см. (6.7), (6.3)).

Докажем теперь, что найденная стратегия действительно оптимальна.

Утверждение 5. *Если функция распределения F_x непрерывна, а $\bar{K} \ge 2\bar{x}$, $\bar{S} \ge 2\bar{x}$, то в случае $\mathcal{S}_0$ стратегия* (7.8) *оптимальна в смысле* (6.1).

Доказательство. Зафиксируем некоторую стратегию $\Omega \in \mathcal{S}_0$. Определим операторы $\hat{B}$ и $\hat{T}_\Omega$, действующие на последовательности ограниченных сверху борелевских функций состояния $f_t(\mathbf{z})$, $-\infty < t < \infty$, по формулам

$$\hat{B}[f]_t(\mathbf{z}) = \sup_{\langle \tilde{u}(\cdot),\tilde{m}(\cdot),\tilde{k}(\cdot),\tilde{s}(\cdot)\rangle \in \mathcal{N}_0(\mathbf{z})} \bar{\mathsf{E}}_{\boldsymbol{\eta}}\left\{\tilde{u}(\boldsymbol{\eta})\right\} + \delta^{-1}\bar{\mathsf{E}}_{\boldsymbol{\eta}}\left\{f_{t+1}(\langle \tilde{m}(\boldsymbol{\eta}),\tilde{k}(\boldsymbol{\eta}),\tilde{s}(\boldsymbol{\eta}),r',d'\rangle)\right\},$$

$$\hat{T}_\Omega[f]_t(\mathbf{z}) = \bar{\mathsf{E}}_{\boldsymbol{\eta}}\left\{\tilde{u}_t^\Omega(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}) + \delta^{-1}f_{t+1}(\mathbf{G}_t^\Omega(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})\right\},$$

отвечающим правым частям уравнений Беллмана (6.6) и Колмогорова (5.6). Оба оператора монотонны и для любой $f_t(\mathbf{z})$

$$\hat{T}_\Omega[f]_t(\mathbf{z}) \le \hat{B}[f]_t(\mathbf{z}). \tag{7.9}$$

Положим $L_t(\mathbf{z}) = L(\mathbf{z}) = mg^{-1} - (r+d)k + rs$ при всех t. Найдя решение уравнения Беллмана вида (7.3), мы показали, что $\hat{B}[L+h]_t(\mathbf{z}) = L(\mathbf{z}) + h$. Поэтому для любой постоянной H

$$\hat{B}[L+H]_t(\mathbf{z}) = \hat{B}[L+h+H-h]_t(\mathbf{z}) = L(\mathbf{z}) + h + \delta^{-1}(H-h). \tag{7.10}$$

Согласно утв.1 ожидаемый доход $j_t^\Omega(\mathbf{z})$, который обеспечивает стратегия $\Omega \in \mathcal{S}_0$, удовлетворяет неравенству

$$j_t^\Omega(\mathbf{z}) \le L(\mathbf{z}) + H_0 \tag{7.11}$$

при некотором H_0. Применяя к обеим частям этого неравенства монотонный оператор $\hat{T}_\Omega$ и учитывая, что в силу уравнения Колмогорова (5.6) $\hat{T}_\Omega[j_t^\Omega](\mathbf{z}) = j_t^\Omega(\mathbf{z})$, получим в силу (7.9), (7.10) из оценки (7.11) новую оценку

$$j_t^\Omega(\mathbf{z}) \le L(\mathbf{z}) + h + \delta^{-1}(H_0 - h).$$

Повторяя эти рассуждения для новой оценки $j_t^\Omega(\mathbf{z})$, по индукции получим неравенства $j_t^\Omega(\mathbf{z}) \le L(\mathbf{z}) + H_n$, где $H_{n+1} = h + \delta^{-1}(H_n - h)$. Очевидно, $H_n \to h$ при $n \to \infty$, поэтому

$$j_t^\Omega(\mathbf{z}) \le L(\mathbf{z}) + h = \hat{j}(\mathbf{z}) \tag{7.12}$$

для любой $\Omega \in \mathcal{S}_0$, что и доказывает оптимальность стратегии (7.8).

Если вернуться к первоначальным обозначениям (4.1), то оптимальная стратегия предписывает банку следующее правило поведения:

$$M_{t+1} = 0, \quad K_{t+1} = g^{t+1}[\hat{\xi} - x_{t+1}]_+, \quad S_{t+1} = g^{t+1}[x_{t+1} - \hat{\xi}]_+, \quad U_{t+1} = g^{t+1}\hat{\xi} + M_t - Q_t K + q_t S_t,$$

где $\hat{\xi}$ определяется уравнением $F_x(\hat{\xi}) = \dfrac{\rho - \mathsf{E}q_t}{\mathsf{E}Q_t - \mathsf{E}q_t}$. Эта стратегия рекомендует банку не держать наличности, а заимствования и вложения делать, исходя из нормального уровня дохода $g^{t+1}\hat{\xi}$. Если фактические поступления $X_{t+1} = g^{t+1}x_{t+1}$ больше этого уровня, то избыток следует вкладывать в S_{t+1}, если меньше – то недостаток занимать в виде K_{t+1}. Извлекаемый доход U_{t+1} получается как остаток средств после всех платежей[6]. Заимствования K_{t+1}, вложения S_{t+1} и доход U_{t+1} на оптимальной траектории в среднем будут расти с темпом g. Величина

[6] В остаток средств включается и касса M_t, которая была, скажем, до того, как начали использовать оптимальную стратегию.

ожидаемого приведенного дохода в момент t составит

$$J_t^{\hat{\Omega}} = M_t - Q_t K_t + q_t S_t + g^{t+1} h_0, \tag{7.13}$$

$$h_0 = \frac{\rho}{\rho - g}\hat{\xi} + \frac{\mathsf{E}q_t}{\rho - g}\mathsf{E}\left\{\left[x_{t+1} - \hat{\xi}\right]_+\right\} - \frac{\mathsf{E}Q_t}{\rho - g}\mathsf{E}\left\{\left[\hat{\xi} - x_{t+1}\right]_+\right\}.$$

Постоянная h_0 представляет собой функционал от распределения возмущений $dF_x(x')dF_r(r')dF_d(d')$. Как уже говорилось выше в разделе 1, банк в среднесрочном плане может влиять на вид функции распределения чистых приходов F_x, соглашаясь или отказываясь давать кредиты и принимать сбережения на тех или иных конкретных условиях. Выражение (7.13) показывает, что с точки зрения ожидаемого чистого дохода лучшим для банка будет тот кредитный портфель, который дает большее значение $h_0 = h_0[F_x]$. Именно такой критерий использовался при описании поведения банка в среднесрочном плане в модели [2].

Функционал $h_0[F_x]$ дает оценку, как размера, так и *риска* ожидаемого от портфеля дохода. Важно, что в данном случае оценка риска не вводится априорно, а *выводится* из задачи оптимизации в «быстром времени» с учетом механизмов реализации доходов от портфеля. Вследствие этого в выражение функционала $h_0[F_x]$ в качестве параметров входят характеристики состояния рынка краткосрочных инструментов – $\mathsf{E}q_t$ и $\mathsf{E}Q_t$.

Как показано в [1], функционал $h_0[F_x]$ не выражается в виде традиционного неймановского функционала ожидаемой полезности $N_\omega[F_x] = \int \omega(x')dF_x(x')$, *ни при какой* функции полезности дохода $\omega(\cdot)$. Функционал $h_0[F_x]$ представляет собой частный случай функционала *двойственной теории выбора* [3] $h_0[F_x] = \int \chi(p)d\left(F_x^{-1}\right)(p)$. В этом выражении $\chi(\cdot)$ – некая положительная функция «полезности вероятности», а F_x^{-1} – функция, обратная к функции распределения (см. [1]). Как и функционал ожидаемой полезности при вогнутой $\omega(\cdot)$, функционал $h_0[F_x]$ задает «отвращение к риску»[7], но в отличие от $N_\omega[F_x]$ функционал $h_0[F_x]$ инвариантен к изменению масштаба и точки отсчета доходов [1].

8. Другие случаи зависимости дохода от возмущений

Выше мы рассмотрели случай, $\mathcal{S}_0$, когда банк хочет, чтобы доход не зависел от возмущения. Теперь рассмотрим, что должен делать банк, если он допускает зависимость дохода либо от всех составляющих возмущения – $\mathcal{S}_\eta$, либо только от процентов – $\mathcal{S}_r$, либо только то дохода – $\mathcal{S}_x$. Доказательства оптимальности во всех случаях повторяют схему, использованную в доказательстве утв. 5, поэтому ограничимся решением уравнения Беллмана.

$\mathcal{S}_\eta$: *Доход $\tilde{u}_t$ может зависеть от случайных величин* $\eta_t = \langle x_{t+1}, r_{t+1}, d_{t+1}\rangle$. В этом случае в уравнении Беллмана (6.7) $\tilde{u}$ нельзя вынести из-под знака интеграла, и оно запишется в виде

$$\hat{j}(m,k,s,r,d) = \int \max_{\langle u',m',k',s'\rangle \in \mathcal{N}'_\eta(m,k,s,r,d)} \left[u' + \delta^{-1}\hat{j}(m',k',s',r',d')\right] dF_x(x')dF_r(r')dF_d(d'),$$

---

[7] Грубо говоря, оптимизация этого функционала требует жертвовать частью среднего значения дохода ради уменьшения его дисперсии.

$$\mathcal{N}'_\eta(m,k,s,r,d) = \left\{ \langle m',k',s',u' \rangle \middle| \begin{array}{l} m',k',s' \ge 0, k' \le \bar{K}, s' \le \bar{S} \\ m' = m\,g^{-1} - (r+d)k + k' + rs - s' + x - u' \end{array} \right\}.$$

Это уравнение отличается от (7.1) изменением порядка операций максимизации по u' и усреднения по возмущениям $\mathbf{\eta} = \langle x', r', d' \rangle$.

Производя замену (7.2), снова получаем для $\hat{j}(\mathbf{z})$ выражение вида (7.3), где

$$h - \delta^{-1} h =$$

$$= \int \max_{\substack{x'-\xi+k'-s' \ge 0, \xi, \\ 0 \le k' \le \bar{K}, \\ 0 \le s' \le \bar{S}}} \left[\xi + \frac{\left((x'-\xi+k'-s')g^{-1} - (r'+d')k' + r's'\right)}{\delta} \right] dF_x(x') dF_r(r') dF_d(d'). \tag{8.1}$$

Поскольку $\delta g = \rho > 1$ выражение под максимумом возрастает по ξ, поэтому максимум достигается при $\xi = x' + k' - s'$ ($m' = 0$), и получается, что

$$h - \delta^{-1} h = \int \max_{\substack{0 \le k' \le \bar{K}, \\ 0 \le s' \le \bar{S}}} \left[x' + k'\left(1 - \frac{(r'+d')}{\delta}\right) - s'\left(1 - \frac{r'}{\delta}\right) \right] dF_x(x') dF_r(r') dF_d(d').$$

Видно, что в области, интегрирования $r' + d' > \delta$ оптимальными будут значения $m' = s' = 0$, $k' = \bar{K}$, в области $r' + d' > \delta > r'$ – $m' = s' = k' = 0$, в области $\delta > r'$ – $m' = 0$, $s' = \bar{S}$, $k' = 0$.

Содержательно эта оптимальная стратегия описывается так: если процент по кредитам Q_{t+1} окажется больше предпочтения времени $\rho = g\delta$, надо брать максимально возможный кредит. Если процент по вкладам q_{t+1} окажется меньше ρ, то надо делать максимальные вложения. В других случаях краткосрочными инструментами пользоваться не следует, а доходом U_{t+1} считать просто чистый приход X_{t+1}. Такое поведение выглядит не очень естественным, и можно сделать вывод, что случай $\mathcal{S}_\eta$ не соответствует реальности.

$\mathcal{S}_r$: Доход $\tilde{u}_t$ зависит от ставок процентов r_{t+1} и d_{t+1}, но не зависит от сальдо поступлений и платежей x_{t+1}: $\tilde{u}_t = \tilde{u}_t(\mathbf{z}, r_{t+1}, d_{t+1})$. В этом случае уравнение Беллмана принимает вид

$$\hat{j}(m,k,s,r,d) = \int \max_{u'} \left[u' + \delta^{-1} \int \max_{\langle m',k',s' \rangle \in \mathcal{N}'_r(m,k,s,r,d,u')} \hat{j}(m',k',s',r',d') dF_x(x') \right] dF_r(r') dF_d(d'),$$

$$\mathcal{N}'_r(m,k,s,r,d,u') = \left\{ \langle m',k',s' \rangle \middle| \begin{array}{l} m',k',s' \ge 0, k' \le \bar{K}, s' \le \bar{S} \\ m' = m\,g^{-1} - (r+d)k + k' + rs - s' + x - u' \end{array} \right\},$$

откуда обычной заменой получаем (7.2) с

$$h - \delta^{-1} h =$$

$$= \int \max_{\xi} \left[\xi + \int \max_{\substack{x'-\xi+k'-s' \ge 0 \\ 0 \le k' \le \bar{K}, \\ 0 \le s' \le \bar{S}}} \frac{(x'-\xi+k'-s')g^{-1} - (r'+d')k' + r's'}{\delta} dF_x(x') \right] dF_r(r') dF_d(d'). \tag{8.2}$$

Пока не будем учитывать ограничения $k' \le \bar{K}$ и $s' \le \bar{S}$. Тогда $m' = 0$, $k' = [\xi - x']_+$, $s' = [x' - \xi]_+$. Подставляя эти значения в (8.2), получим

$$h - \delta^{-1} h = \int \max_{\xi} \left(\xi + \delta^{-1} r' \int_{\xi}^{+\infty} (x' - \xi) dF_x(x') - \delta^{-1}(r' + d') \int_{-\infty}^{\xi} (\xi - x') dF_x(x') \right) dF_r(r') dF_d(d'). \quad (8.3)$$

Для определения оптимального значения ξ получается та же задача, что и в разделе 7, но при текущих, а не средних значениях процентов. В области интегрирования $r' + d' > \delta > r'$ максимум по ξ достигается в точке, где $F_x(\xi) = \dfrac{\delta - r'}{d'}$. При этом $m' = 0$, $k' = [\xi - x']_+$, $s' = [x' - \xi]_+$. В области интегрирования $r' + d' < \delta$ выражение под максимумом в (8.3) монотонно растет по ξ, а в области $r' > \delta$ – монотонно убывает. Из этого легко вывести, что в области $r' + d' < \delta$ при учете ограничений $k' \le \bar{K}$ и $s' \le \bar{S}$ оптимальными будут значения $m' = 0$, $k' = \bar{K}$, $s' = 0$, а в области $r' > \delta$ – $m' = 0$, $k' = 0$, $s' = \bar{S}$.

Поскольку статистика не дает оснований утверждать, что с вероятностью 1 выполняется неравенство $Q_t > \delta > q_t$ (см. рис. 1), приходим к выводу, что и случай $\mathcal{S}_r$ не дает реалистичного описания поведения – банки в этом случае будут систематически выходить на лимиты заимствований и вложений.

$\mathcal{S}_x$: *Доход* $\tilde{u}_t$ *зависит от сальдо поступлений и платежей* x_{t+1}, *но не зависит от ставок процентов* r_{t+1} и d_{t+1}: $\tilde{u}_t = \tilde{u}_t(\mathbf{z}, x_{t+1})$.

Уравнение Беллмана (6.7) в этом случае принимает вид

$$\hat{j}(m,k,s,r,d) = \int \max_{u'} \left[u' + \delta^{-1} \int \max_{\langle m',k',s'\rangle \in \mathcal{N}_x'(m,k,s,r,d,u')} \hat{j}(m',k',s',r',d') dF_r(r') dF_d(d') \right] dF_x(x'),$$

$$\mathcal{N}_r'(m,k,s,r,d,u') = \left\{ \langle m',k',s'\rangle \middle| \begin{array}{l} m',k',s' \ge 0, k' \le \bar{K}, s' \le \bar{S} \\ m' = m g^{-1} - (r+d)k + k' + rs - s' + x - u' \end{array} \right\},$$

откуда получаем (7.2) и

$$h - \delta^{-1} h =$$

$$= \int \max_{\xi} \left[\xi + \int \max_{\substack{x' - \xi + k' - s' \ge 0, \xi, \\ 0 \le k' \le \bar{K}, \\ 0 \le s' \le \bar{S}}} \left(\frac{(x' - \xi + k' - s') g^{-1} - (r' + d')k' + r's'}{\delta} \right) dF_r(r') dF_d(d') \right] dF_x(x').$$

Без ограничений $k' \le \bar{K}$ и $s' \le \bar{S}$, как и выше, получается $m' = 0$, $k' = [\xi - x']_+$, $s' = [x' - \xi]_+$ и

$$h - \delta^{-1} h = \int \max_{\xi} \left[\xi + \frac{-(\mathsf{E}r + \mathsf{E}d)[\xi - x']_+ + (\mathsf{E}r)[x' - \xi]_+}{\delta} \right] dF_x(x').$$

В силу (3.13), (4.1) отсюда получается, что оптимальным значением будет $\xi = x'$. Тогда $k' = 0$, $s' = 0$ и ограничения $k' \le \bar{K}$ и $s' \le \bar{S}$ выполнены, а $h - h\delta^{-1} = \mathsf{E}x_t$.

Таким образом, в случае $\mathcal{S}_x$ краткосрочными инструментами пользоваться не нужно.

Полученные результаты оправдывают выбор основного случая – независимости дохода от возмущений. Альтернативные варианты информационных ограничений либо приводят к отказу от использования краткосрочных инструментов, что не соответствует реальной практике банков, либо (при возможности предвидеть проценты) предлагают банкам делать очень большие займы и вложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гуриев С.М., Поспелов И.Г.* Модель деятельности банка при отсутствии инфляции и экономического роста. // Экономика и математические методы, 1997, т 33, вып. 3, с.35-47.
2. *Автухович Э.В., Гуриев С.М., Оленев Н.Н.* и др. Математическая модель экономики переходного периода. ВЦ РАН, 1999, 143с.
3. *Yaari M.* The Dual Theory of Choice under Risk. Econometrica, 1987, v.55, c. 95-115.
4. *Чуканов С.В.* Моделирование экономического поведения и метод динамического программирования на бесконечном временном интервале. // 2003, т 15, № 3, с.109-121.
5. *Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А.* Теория вероятностей. Основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы. // Наука, 1967, 495с.
6. *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятностей. // ФАЗИС, 1998, 3-е изд., 144с., с.35-36.

Поступила в редакцию 29.12.2003.