V. A. Ivanov, Criteria for testing hypotheses from a sample of a distribution with random parameters,
Diskr. Mat., 1998, Volume 10, Issue 4, 104–118

Дискретная математика

том 10 выпуск 4 * 1998

УДК 519.2

Критерии проверки гипотез по выборке из распределения со случайными параметрами

© 1998 г. В. А. Иванов

Получены асимптотические оценки мощности оптимального кртиерия проверки контигуальных гипотез по выборке из распределения, зависящего от случайного параметра.

1. Введение

Рассмотрим измеримое пространство $(X, \mathscr{F})$ и семейство вероятностных распределений $\{\mathsf{P}_\nu(A), A \in \mathscr{F}, \nu \in N\}$ на нем. Далее для определенности будем полагать, что пространство элементарных событий X является подмножеством действительной прямой $\mathbf{R}$, множество N значений параметра принадлежит q-мерному действительному пространству $\mathbf{R}^q$ и что распределение $\mathsf{P}_\nu(A)$ при всех $\nu \in N$ абсолютно непрерывно относительно некоторой σ-конечной меры $\mu(x)$ на $\mathscr{F}$ и может быть задано с помощью плотности $p_\nu(x)$ по формуле

$$\mathsf{P}_\nu(A) = \int_A p_\nu(x)\, d\mu(x). \tag{1}$$

Попутно заметим, что если в качестве меры $\mu(x)$ использовать меру Лебега на прямой, то распределения $\mathsf{P}_\nu = \mathsf{P}_\nu(A)$ будут принадлежать классу абсолютно непрерывных распределений, если в качестве меры $\mu(x)$ использовать считающую меру, то получим класс дискретных распределений.

Будем рассматривать случайные векторы

$$X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n), \qquad n = 1, 2, \dots,$$

в схеме серий. Значения, принимаемые случайным вектором $X^{(n)}$, будем обозначать символом $x^{(n)} = (x_1, \dots, x_n)$. Для каждого натурального n введем дискретную случайную величину ζ_n, принимающую значения ν из некоторого множества $N_n \subseteq N$ с вероятностями

$$\mathsf{P}(\zeta = \nu) = \delta_n(\nu), \qquad \sum_{\nu \in N_n} \delta_n(\nu) = 1.$$

Рассмотрим несколько гипотез относительно распределения $\mathsf{P}^{(n)}$ выборки $X^{(n)}$, состоящей из независимых одинаково распределенных случайных величин. В этом случае плотность распределения выборки $X^{(n)}$ однозначно определяется плотностью распределдения любого ее элемента X_t, $t = 1, \dots, n$. Для простоты записи индекс номера серии n в обозначениях иногда будем опускать. В дальнейшем будем предполагать, что область N_n значений параметра ν содержит значение $\nu = 0$.

Обозначим H_0 гипотезу, задаваемую плотностью $p(x) = p_0(x)$ распределения случайной величины X_t, $t = 1, \dots, n$, H_ν, $\nu \in N$, гипотезу, задаваемую плотностью $p(x) = p_\nu(x)$, и H_δ гипотезу, задаваемую плотностью

$$p_\delta(x) = \sum_{\nu \in N_n} \delta(\nu) p_\nu(x)$$

распределения случайной величины X_t, $t = 1, \dots, n$, являющейся смесью плотностей распределения $p_\nu(x)$, $\nu \in N_n$, относительно меры $\delta(\nu)$.

Наряду с упомянутыми выше простыми выборками, которым соответствуют последоватедьности независимых одинаково распределенных случайных величин, будем рассматривать также выборки из условно независимых распределденный. Для реализации таких выборок сначала из генеральной совокупности с распределением $\delta_n(\nu)$ выбирается параметр распределения $\zeta_n = \nu$, после чего реализуется последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, каждая из которых распределена по зпкону P_ν. В этом случае плотность распределения выборки $X^{(n)}$ представляется в виде смеси плотностей совместных распределений

$$p_\delta(x^{(n)}) = \sum_{\nu \in N} \delta_n(\nu) p_\nu(x_1) \dots p_\nu(x_n)$$

случайных величин $X_1, \dots, X_n$ по распределению $\delta_n(\nu)$. Гипотезу, определяемую описанным выше распределением вероятностей выборки $X^{(n)}$, будем обозначать $H(\delta)$. Цель работы состоит в нахождении асимптотических оценок вероятностных характеристик критерия отношения правдоподобия проверки гипотез H_0 и $H(\delta)$ при условии, что $\zeta_n \to 0$ при $n \to \infty$ таким образом, что распределение нормированного параметра $\sigma = \zeta n^{1/2}$, принимающего значения γ из множества Γ, задаваемое плотностью $\pi_n(\gamma)$, сходится к распределению с плотностью $\pi(\gamma)$. Гипотезы H_ν и $H(\delta)$ будем также обозначать символами H_γ и $H(\pi)$ соответственно.

2. Предельные распределения статистики отношения правдоподобия

Исследуем оптимальный критерий проверки контигуальных [4] гипотез типа H_0 против H_ν, H_δ. Известно,что таким критерием является критерий отношения правдоподобия (КОП).

Определим статистики отношения правдоподобия (ОП) $R_\nu(X^{(n)})$ и логарифма отношения правдоподобия (ЛОП) $L_\nu(X^{(n)})$ для простых выборок, полагая

$$R_\nu(X^{(n)}) = \begin{cases} p_\nu(X^{(n)})/p_0(X^{(n)}), & \text{если } p_0(x^{(n)}) > 0, \\ 0, & \text{если } p_0(x^{(n)}) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $p_\nu(X^{(n)}) = p_\nu(X_1)\dots p_\nu(X_n)$,

$$L_\nu(X^{(n)}) = \begin{cases} \ln(p_\nu(X^{(n)})/p_0(X^{(n)})) = \sum_{t=1}^n \ln(p_\nu(X_t)/p_0(X_t)), & \text{если } p_0(x^{(n)}) > 0, \\ -\infty, & p_0(x^{(n)}) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Полагая $e^{-\infty} = 0$ и $\ln 0 = -\infty$, получаем соотношение

$$R_\nu(X^{(n)}) = e^{L_\nu(X^{(n)})}. \tag{4}$$

При оценивании размера (вероятности ошибки первого рода) критерия следует иметь в виду, что вероятностные характеристики статистик $R_\nu(X^{(n)})$ и $L_\nu(X^{(n)})$ при условии, что верна гипотеза H_0, не изменяются при различных заданиях этих статистик в области $\{x^{(n)}\colon p_0(x^{(n)}) = 0\}$.

Прежде чем перейти к исследованию асимптотических харакеристик оптимального критерия, заметим, что из абсолютной непрерывности распределения P_α при всех $\alpha \in \Lambda$ относительно некоторой σ-конечной меры $\mu(x)$ на $\mathscr{F}$ следует абсолютная непрерывность распределения $\mathsf{P}_\alpha^{(n)}$ вектора $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$ с независимыми координатами по отношению к прямому n-произведению мер $\mu(x)$ на $\mathscr{F} = \mathscr{F} \times \dots \times \mathscr{F}$. При этом плотность распределения вероятностей $\mathsf{P}_\alpha^{(n)}$ будет иметь вид $p_\alpha(x_1)\dots p_\alpha(x_n)$.

Определение 1. ([1]) Семейство вероятностных мер $\{\mathsf{P}_\alpha^{(n)}, \alpha \in \Lambda \subset \mathbf{R}^q\}$ на $\mathscr{F}$ называется локально асимптотически нормальным (ЛАН) в точке β, $\beta \in \Lambda$, если логарифм отношения правдоподобия, равный

$$L(x^{(n)}) = \ln \prod_{t=1}^n \frac{p_\alpha(x_t)}{p_\beta(x_t)}$$

при

$$\prod_{t=1}^n p_\beta(x_t) \neq 0,$$

и принимающий произвольное значение, если это произведение равно нулю, может быть при $\alpha = \beta + \gamma n^{-1/2}$, $\gamma \in \Gamma$, представлен в виде

$$L(X^{(n)}) = L_\gamma(X^{(n)}) = \gamma Q_n'(X^{(n)}) - \frac{1}{2}\gamma B \gamma' + \eta_n, \tag{5}$$

где

$$Q_n(X^{(n)}) = n^{-1/2} \sum_{t=1}^n h(X_t), \qquad \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_q) \in \mathbf{R}^q,$$

$h(x) = (h_1(x), \dots, h_q))$ — вектор-функция такая, что ее математическое ожидание равно

$$\int h_j(x) p_\beta(x)\, d\mu(x) = 0, \qquad j = 1, \dots, q, \tag{6}$$

моменты

$$b_{ij} = \int h_i(x) h_j p_\beta(x)\, d\mu(x) \tag{7}$$

конечны и образуют положительно определенную матрицу $B = \|b_{ij}\|$ порядка q, знак штрих означает транспонирование матрицы, а $\{\eta_n = \eta_{\gamma n}(X^{(n)})\}$ при $n \to \infty$ стремится к нулю по вероятностной мере $\mathsf{P}_\beta^{(n)}$ равномерно по $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_q)$ на каждом компакте из $\mathbf{R}^q$.

Далее символом $\mathbf{L}_\alpha(\xi)$ будем обозначать распределение случайной величины ξ при условии, что справедлива гипотеза H_α, $\alpha \in \Lambda$, и в случае

$$\Lambda = N, \quad \alpha = \nu = \gamma n^{-1/2} \in N$$

в обозначениях распределений, гипотез и статистик наряду с индексом ν будем употреблять индекс γ.

В силу центральной предельной теоремы распределение случайного вектора

$$Q_n(X^{(n)}) = n^{-1/2}(h(X_1) + \dots + h(X_n)) \tag{8}$$

при $\alpha = \beta$ $(\gamma = 0)$ слабо сходится к многомерному нормальному распределению с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей B:

$$\mathbf{L}_\beta\{Q_n(X^{(n)})\} \to \mathbf{N}(0, B).$$

При обычных условиях регулярности

$$h_j(x) = \frac{d}{d\alpha_j} \ln p_\alpha(x)|_{\alpha=\beta}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q), \quad j = 1, \dots, q.$$

В частности, при $q = 1$ функция $h(x)$ в представлении (5) должна иметь конечный отличный от нуля второй момент

$$\mathsf{E}_0 h^2(X_t) = b > 0.$$

Практические ситуации, в которых параметр b принимает нулевое значение, исследовались в [5].

В [2] и [3] найдены необходимые и достаточные условия ЛАН в точке $\beta = 0$. В этом случае разложение (5) принимает вид

$$L_\gamma(X^{(n)}) = \gamma Q_n'(X^{(n)}) - b_\gamma/2 + \eta_n(X^{(n)}),$$

где

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_q) = \nu n^{1/2} \in \Gamma \subset \mathbf{R}$$

— нормированный параметр семейства распределений, причем множество нормированных параметров Γ содержит точку $\gamma = 0$,

$$b_\gamma = \gamma B \gamma', \qquad h(x) = (h_1(x), \dots, h_q(x))$$

— некоторая вектор-функция,

$$Q_n(X^{(n)}) = n^{-1/2}(h(X^{(n)}) + \dots + h(X^{(n)})),$$

$\eta_n(X^{(n)}) \to 0$ по вероятности P_0 равномерно на любом компакте $\Gamma^* \subset \Gamma$ из $\mathbf{R}^q$.

Сначала сформулируем условия, достаточные для выполнения ЛАН в точке $\beta = 0$. Следуя [3], рассмотрим более общую схему.

Пусть $\Gamma = \{\gamma\}$ — произвольное множество параметров, содержащее точку $\gamma = 0$, и $\{h_\gamma(x), \gamma \in \Gamma\}$ — семейство действительных функций на прямой $\mathbf{R}$. Предположим, что плотность распределения элемента X_t выборки $X^{(n)}$ представима в области $p_0(x) > 0$ в виде

$$p_{n\gamma}(x) = p_0(x)(1 + n^{-1/2}h_\gamma(x) + r_{n\gamma}(x)), \tag{9}$$

при этом для любых $\gamma \in \Gamma$ имеют место соотношения

$$\mathbf{E}_0 h_\gamma(X_t) = 0, \quad \mathbf{D}_0 h_\gamma(X_t) = b(\gamma), \quad 0 < b(\gamma) < \infty, \tag{10}$$

и при $n \to \infty$ по мере $\mathbf{P}_0$

$$\sum_{t=1}^{n} r_{n\gamma}(X_t) \to 0 \tag{11}$$

равномерно по $\gamma \in \Gamma^*$ для любого множества $\Gamma^{*'} \subset \Gamma$, для которого семейство функций $\{h_\gamma(X_t), \gamma \in \Gamma^*\}$ относительно компактно в пространстве L_0^2 измеримых функций с интегрируемым квадратом по вероятностной мере $\mathbf{P}_0$.

Теорема 1. *Пусть плотность распределения $p_{n\gamma}(x)$, $\gamma \in \Gamma$, представима в форме* (9) *и выполняются условия* (10) *и* (11). *Тогда*

$$L_\gamma(X^{(n)}) = n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n} h_\gamma(X_t) - \frac{1}{2}b_\gamma + \eta_n(X^{(n)}), \tag{12}$$

где $\eta_n(X^{(n)}) \to 0$ при $n \to \infty$ по мере $\mathbf{P}_0$ равномерно по $\gamma \in \Gamma^*$ для каждого множества $\Gamma^* \subset \Gamma$, для которого семейство функций $\{h_\gamma(X_t), \gamma \in \Gamma^*\}$ относительно компактно в пространстве L_0^2.

Доказательство. Прежде всего заметим, что в [3] доказана справедливость разложения (12) для случая, когда в качестве плотности при нулевой гипотезе рассматривается плотность равномерного на отрезке [0,1] распределения, а плотность распределения близкой альтернативы представляется на отрезке [0,1] в виде

$$p_{n\gamma} = p_0(x)(1 + n^{-1/2}h_\gamma(x) + r_{n\gamma}(x)).$$

Это доказательство без каких-либо существенных изменений переносится на более общий случай, когда в качестве распределения вероятностей при нулевой гипотезе используется произвольное распределение, абсолютно непрерывное относительно некоторой σ-конечной меры $\mu(x)$ на $\mathscr{F}$ и может быть задано с помощью плотности $p_0(x)$, а плотность $p_{n\gamma}(x)$ имеет вид (9).

В настоящей статье мы ограничимся исследованием предельного распределения логарифма отношения правдоподобия в предположении, что функция $h_\gamma(x)$ в (9) может быть записана в виде $h_\gamma(x) = \gamma h'(x)$.

Теорема 2. *Пусть плотность распределения элемента X_t выборки $X^{(n)}$ представима в области $p_0(x) > 0$ в виде*

$$p_{n\gamma}(x) = p_0(x)(1 + n^{-1/2}h_\gamma(x) + r_{n\gamma}(x)), \tag{13}$$

причем для любых $\gamma \in \Gamma$

$$\begin{gathered} h_\gamma(x) = \gamma h'(x), \quad \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_q) \in \mathbf{R}^q, \\ h(x) = (h_1(x), \dots, h_q(x)), \\ \mathsf{E}_0 h_\gamma(X_t) = \gamma \mathsf{E}_0 h'(X_t) \qquad \mathsf{E}_0 h_\gamma^2(X_t) = \mathsf{E}_0 \gamma h'(X_t) h(X_t) \gamma' = \gamma B \gamma' = b(\gamma), \end{gathered}$$

где $B = \mathsf{E}_0 h'(X_t) h(X_t)$ *— положительно определенная матрица порядка* q,

$$\mathsf{E}_0 h'(X_t) = 0, \qquad 0 < b(\gamma) = \gamma B \gamma' < \infty, \tag{14}$$

$$\sum_{t=1}^{n} r_{n\gamma}(X_t) \to 0 \tag{15}$$

при $n \to \infty$ *по мере* P_0 *равномерно по* $\gamma \in \Gamma^*$ *для любого компакта* $\Gamma^* \subset \Gamma$.

Тогда справедливо разложение

$$L_\gamma(X^{(n)}) = n^{-1/2} \sum_{t=1}^{n} \gamma h'(X_t) - \frac{1}{2} \gamma B \gamma' + \eta_n(X^{(n)}), \tag{16}$$

где $\eta_n(X^{(n)}) \to 0$ *при* $n \to \infty$ *по мере* P_λ *равномерно по* $\gamma \in \Gamma^*$ *для любого компакта* $\Gamma^* \subset \Gamma$ *и любого фиксированного значения параметра* $\lambda \in \Gamma$.

Доказательство. В теореме 1 рассмотрен случай $\lambda = 0$. Докажем теперь, что разложение (16) справедливо для произвольного значения параметра λ из множества Γ.

Сначала убедимся в том, что вероятностные меры $\mathsf{P}_{n\lambda}$ и $\mathsf{P}_{n\gamma}$, задаваемые плотностями $p_{n\lambda}$ и $p_{n\gamma}$ соответственно, контигуальны. Для этого предварительно покажем, что вероятностные меры P_0 и $\mathsf{P}_{n\gamma(n)}$ контигуальны при любом выборе последовательности $\gamma(n)$ из произвольного компакта $\Gamma^* \subset \Gamma \subset \mathbf{R}^q$. Далее в обозначениях $\mathsf{P}_{n\lambda}$ и $\mathsf{P}_{n\gamma}$ мндекс n будем опускать.

Воспользуемся критерием S_3 из [4], стр. 20. Прежде всего заметим, что последовательность распределений $\mathbf{L}_0(L_n)$ логарифма отношения правдоподобия относительно компактна по отношению к слабой сходимости вероятностных распределений. Действительно, пусть последовательность $\{\gamma(l), l \in \{n\} = \{1, 2, \dots\}\}$ принадлежит произвольному фиксированному компакту $\Gamma^* \subset \Gamma$ и $\{m\}$ — подпоследовательность, произвольным образом выбранная из последовательности $\{n\}$. По свойству компактности из последовательности $\{m\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{k\} \subset \{m\}$ так, что подпоследовательность $\{\gamma(l), l \in \{k\}\}$ сходится к некоторому значению $\gamma \in \Gamma^*$. Из (16) получаем, что $\eta_{\gamma(k)}(X^{(n)}) \to 0$ при $k \to \infty$ по мере P_0 и

$$n^{-1/2} \sum_{t=1}^{n} \gamma(k) h'(X_t)$$

слабо сходится при $k \to \infty$ с учетом того, что $\gamma(k) \to \gamma$ и $\gamma(k) B \gamma'(k) \to \gamma B \gamma'$, к нормальному распределению $\mathbf{N}(-b(\gamma)/2, b(\gamma))$. Следовательно, семейство вероятностных распределений относительно компактно по отношению к слабой сходимости распределений.

Проверим теперь второе условие критерия S_3. Из (16) и того, что

$$\mathbf{L}_0(L_n(X^{(n)})) \to \mathbf{N}(-b_\gamma/2, b_\gamma),$$

следует справедливость цепочки соотношений

$$F_n(z) = \mathbf{P}_0(R(X^{(n)}) \leqslant z) = \mathbf{P}_0(L_n(X^{(n)}) \leqslant \ln z) \to F(z) = \Phi((\ln z + b_\gamma/2)/(b_\gamma)^{1/2}),$$

где $\Phi(x)$ — функция нормального распределения с нулевым средним и единичной дисперсией.

Принимая во внимание, что

$$\int z\,dF(z) = \exp\{-b_\gamma/2 + b_\gamma/2\} = 1,$$

убеждаемся в справедливости утверждения о контигуальности вероятностных мер $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_{\gamma(n)}$, откуда следует справедливость утверждения о контигуальности вероятностных мер $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_\gamma$, а следовательно, и вероятностных мер $\mathbf{P}_\lambda$ и $\mathbf{P}_\gamma$ для любых фиксированных λ и γ из множества Γ.

В [4] доказано, что если последовательности вероятностных мер $\mathbf{P}_\lambda$ и $\mathbf{P}_\gamma$ контигуальны, то для любой последовательности случайных величин ξ_n при выполнении условия $\xi_n \to 0$ по вероятностной мере $\mathbf{P}_\gamma$ выполняется условите $\xi_n \to 0$ по вероятностной мере $\mathbf{P}_\lambda$ и наоборот.

Таким образом, в условиях теоремы 2 из сходимости $\eta_\gamma(X^{(n)}) \to 0$ следует, что $\eta_\gamma(X^{(n)}) \to 0$ при $n \to \infty$ по мере $\mathbf{P}_\lambda$ при любых γ и λ из множества Γ.

Покажем теперь, что остаточный член $\eta_\gamma(X^{(n)})$ сходится к нулю по мере $\mathbf{P}_\lambda$ равномерно по γ на любом компактном подмножестве Γ^* множества параметров Γ.

Предположим, что это не так. Тогда найдутся положительные числа ε и δ, подпоследовательность $\{m\}$ последовательности $\{n\}$ и последовательность $\gamma(m) \in \Gamma^*$ такие, что для всех m

$$\mathbf{P}_\lambda(|\eta_{\gamma(m)}(X^{(n)})| \geqslant \varepsilon) \geqslant \delta.$$

В силу компактности множества Γ^* найдется подпоследовательность $\{r\}$ последовательности $\{m\}$ такая, что $\gamma(r) \to \gamma^*$. В силу контигуальности последовательностей $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_{\gamma(r)}$ из сходимости $\eta_{\gamma(r)}(X^{(n)}) \to 0$ по мере $\mathbf{P}_0$ следует, что $\eta_{\gamma(r)}(X^{(n)}) \to 0$ по мере $\mathbf{P}_\lambda$ при $n \to \infty$, что противоречит сделанному выше допущению. Таким образом, теорема доказана.

Напомним, что распределение произвольной случайной величины ξ при справедливости гипотезы H_λ обозначается символом $\mathbf{L}_\lambda(\xi)$. Ковариацию случайных величин $h_\gamma(X_t)$ и $h_\lambda(X_t)$ для произвольных значений параметров γ и λ, принадлежащих множеству Γ, обозначим

$$b(\gamma, \lambda) = \mathbf{E}_0 h_\gamma(X_t) h'_\lambda(X_t).$$

Далее будем изучать обычно встречающуюся в приложениях ситуацию, когда $r_{n\gamma}(x) \equiv 0$.

Следствие 1. *Если выполнены условия теоремы 2, $r_{n\gamma}(x) \equiv 0$ и*

$$|\mathbf{E}_0 h_\lambda(X_t) h_\gamma^2(X_t)| < \infty, \quad \lambda, \gamma \in \Gamma,$$

то распределение статистики ЛОП сходится равномерно по параметру γ, принадлежащему произвольному компакту $\Gamma^* \subset \Gamma$, к нормальному распределению со средним $b(\gamma, \lambda) - b(\gamma)/2$ и дисперсией $b(\gamma)$:

$$\mathbf{L}_\lambda(L_\gamma(X^{(n)})) \to \mathbf{N}(b(\gamma, \lambda) - b(\gamma)/2, b(\gamma)). \tag{17}$$

Доказательство. Воспользуемся представлением (16). Статистика $Q_\gamma(X^{(n)})$ при фиксированных γ и λ представляет собой сумму независимых одинаково распределенных случайных величин. Поэтому ее распределение сходится к нормальному распределению со средним $\mathsf{E}_\lambda Q_\gamma(X^{(n)}) = b(\gamma,\lambda)$ и дисперсией $\mathsf{D}_\lambda Q_\gamma(X^{(n)}) = b(\gamma)$. Действительно,

$$\mathsf{E}_\lambda n^{-1/2}h_\gamma(X_t) = n^{-1/2}\mathsf{E}_0 h_\gamma(X_t)(1+n^{-1/2}h_\lambda(X_t)) = n^{-1}b(\gamma,\lambda),$$
$$\mathsf{E}_\lambda n^{-1}h_\gamma^2(X_t) = n^{-1}\mathsf{E}_0 h_\gamma^2(X_t)(1+n^{-1/2}h_\lambda(X_t)) = n^{-1}b(\gamma)(1+O(n^{-1/2})).$$

Из этих соотношений непосредственно вытекает (17).

Заметим, что в случае $q=1$ и $h_\gamma(x) = \gamma h(x)$ получаем, что

$$b(\gamma,\lambda) = \gamma\lambda b, \qquad b(\gamma) = \gamma^2 b,$$

откуда следует, что

$$\mathsf{E}_\lambda Q_\gamma(X^{(n)}) \to \gamma(\lambda - \gamma/2)b, \qquad \mathsf{D}_\lambda Q_\gamma(X^{(n)}) \to \gamma^2 b$$

и

$$\mathbf{L}_\lambda(L_\gamma(X^{(n)})) \to \mathbf{N}(-\gamma^2 b/2 + \gamma\lambda b, \gamma^2 b).$$

Далее исследуется важный для практических приложений случай $h_\gamma(x) = \gamma h(x)$. В этом случае для того, чтобы последовательность $\{h_\gamma(x) = \gamma h(x), \gamma\in\Gamma^*\}$ была относительно компактна, достаточно потребовать компактности множества Γ^*.

3. Асимптотические характеристики оптимального критерия

Пусть $q=1$ и при $n\to\infty$ распределение $\pi_n(\gamma)$, $\gamma\in\Gamma_n\subset[-A,A]$, параметра $\sigma_n = n^{1/2}\zeta_n \in \Gamma_n$ слабо сходится к распределению $\pi(\gamma)$, в этом случае будем писать $\pi_n(\gamma)\Rightarrow\pi(\gamma)$. Напомним, что введенное ранее распределение $\delta_n(\nu)$ случайной величины ζ_n связано с распределением $\pi_n(\gamma)$ случайной величины σ_n соотношением $\delta_n(\nu) = \pi_n(\nu n^{1/2})$. Символ $\mathbf{N}(0,1)$ обозначает стандартное нормальное распределение.

Теорема 3. *Пусть носитель Γ_n меры $\pi_n(\gamma)$ принадлежит отрезку $[-A,A]$ для всех достаточно больших значений n и $\pi_n(\gamma)\Rightarrow\pi(\gamma)$ при $n\to\infty$. Тогда распределение статистики $R_\pi(X^{(n)})$ критерия отношения правдоподобия проверки гипотезы H_0 против альтернативы $H(\pi)$ при справедливости гипотезы H_λ слабо сходится к распределению случайной величины*

$$f_\lambda(\varkappa) = \int \exp\{-\gamma^2 b/2 + \gamma\lambda b + \gamma\varkappa b^{1/2}\}\,d\pi(\gamma), \tag{18}$$

где $\mathbf{L}(\varkappa) = \mathbf{N}(0,1)$.

Доказательство. Запишем статистику отношения правдоподобия

$$R_\pi(X^{(n)}) = \sum_{\gamma\in\Gamma_n} \pi_n(\gamma) e^{L_\gamma(X^{(n)})},$$

с учетом (16) и (17) в виде интеграла Лебега

$$R_\pi(X^{(n)}) = \int_{\Gamma_n} R_\gamma(X^{(n)})\, d\pi_n(\gamma), \tag{19}$$

где

$$R_\gamma(X^{(n)}) = e^{L_\gamma(X^{(n)})} = \exp\{\gamma b^{1/2}\varkappa_n + \gamma\lambda b - \gamma^2 b/2 + \eta_n^*(X^{(n)})\},$$

$\eta_n^*(X^{(n)}) \to 0$ по мере $\mathbf{P}_\lambda$,

$$\varkappa_n = \varkappa_n(X^{(n)}) = n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n} h_\gamma(X_t).$$

По предположению последовательность мер $\pi_n(\gamma)$, заданных на множествах Γ_n, слабо сходится к мере $\pi(\gamma)$, определенной на отрезке $[-A, A]$ действительной прямой $\mathbf{R}$.

Введем обозначение

$$g_{\gamma\lambda}(x) = \exp\{-\gamma^2 b/2 + \gamma\lambda b + \gamma b^{1/2} x\}.$$

Для любого заранее заданного положительного ε найдем C и натуральное n_0 такие, что при $n \geqslant n_0$

$$\mathbf{P}_\lambda(|\varkappa_n| \leqslant C) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

При наступлении этого события функция $g_{\gamma\lambda}(x)$, порождающая случайную величину $g_{\gamma\lambda}(\varkappa_n)$, будет непрерывной и ограниченной. Поэтому справедливо соотношение

$$\int \exp\{-\gamma^2 b/2 + \gamma\lambda b + \gamma x b^{1/2}\}\, d\pi_n(\gamma) \to \int g_{\gamma\lambda}(x)\, d\pi(\gamma). \tag{20}$$

Учитывая равномерную по γ на компакте $[-A, A]$ сходимость по вероятности к нулю случайных величин $\eta_n^*(X^{(n)})$ и сходимость интегралов (20), убеждаемся в справедливости утверждения (18) теоремы.

Исследуем свойства функции

$$f_\lambda(x) = \int g_{\gamma\lambda}(x)\, d\pi(\gamma). \tag{21}$$

При $\lambda = 0$ полагаем $f_0(x) = f(x)$. Производные функции $f_\lambda(x)$ по x имеют вид

$$f_\lambda'(x) = b^{1/2}\int \gamma g_{\gamma\lambda}(x)\, d\pi(\gamma),$$

$$f_\lambda''(x) = b\int \gamma^2 g_{\gamma\lambda}(x)\, d\pi(\gamma). \tag{22}$$

Из (22) следует, что при $\pi(0) \neq 1$ функция $f_\lambda(x)$ выпукла вверх при любом действительном x.

Обозначим Π_1, Π_2, Π_3 семейства распределений π, для которых выполняются соотношения

$$\Pi_1 = \{\pi\colon \pi(\gamma \leqslant 0) = 0\},$$
$$\Pi_2 = \{\pi\colon \pi(\gamma \geqslant 0) = 0\},$$
$$\Pi_3 = \{\pi\colon \pi(\gamma < 0)\pi(\gamma > 0 \neq 0\}.$$

Из (22) следует, что для распределений, принадлежащих множеству Π_1, функция $f_\lambda(x)$ монотонно врзрастает, для распределений, принадлежащих Π_2, функция $f_\lambda(x)$ монотонно убывает, а для распределений, принадлежащих Π_3, функция $f_\lambda(x)$ сначала монотонно убывает, а с некоторого момента начинает монотонно возрастать. Поэтому уравнение $f_\lambda(x) = C$ для любой константы C, для которой выполняется соотношение $C > \inf_x f_\lambda(x)$, имеет единственное решение $x_{1\lambda}(C)$, если $\pi \in \Pi_1$, $x_{2\lambda}(C)$, если $\pi \in \Pi_2$, и имеет два решения $x_{3\lambda}(C)$ и $x_{4\lambda}(C)$, если $\pi \in \Pi_3$. При этом область значений $\{x\colon f_\lambda(x) > C\}$ имеет вид $\{x\colon x > x_{1\lambda}(C)\}$ для $\pi \in \Pi_1$, вид $\{x\colon x < x_{2\lambda}(C)\}$ для $\pi \in \Pi_2$ и $\{x\colon x < x_{3\lambda}(C)\} \cup \{x\colon x > x_{4\lambda}(C)\}$ для $\pi \in \Pi_3$.

Теорема 4. *Пусть размер критерия отношения правдоподобия проверки гипотезы H_0 против альтернативы $H(\pi)$, $\pi \in \Pi_1$, стремится при $n \to \infty$ к α. Тогда предельная при $n \to \infty$ мощность критерия может быть определена по формуле*

$$\beta(\alpha) = 1 - \int \Phi(f_\lambda^{-1}(f(u_\alpha)))\, d\pi(\lambda). \tag{23}$$

Доказательство. Пусть $C_n(\alpha) = \inf\{C\colon \mathbf{P}_0(R_\pi(X^{(n)}) > C) \leqslant \alpha\}$ — граница критической области критерия размера α, основанного на статистике $R_\pi(X^{(n)})$, $\pi \in \Pi_1$, $C_n(\alpha) \to C(\alpha)$ при $n \to \infty$, $\varkappa$ — случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение, u_α — верхняя α-квантиль стандартного нормального распределения. Тогда из того, что

$$\mathbf{P}_0(R_\pi(X^{(n)}) > C_n(\alpha)) \to \mathbf{P}_0(f_0(\varkappa) > C(\alpha))$$

при $n \to \infty$, следует, что

$$C(\alpha) = f_0(u_\alpha) = f(u_\alpha).$$

Предельная мощность критерия определяется по формуле

$$\mathbf{P}_\pi(R_\pi(X^{(n)}) > C_n(\alpha)) = \sum_\lambda \pi_n(\lambda)\mathbf{P}_\lambda(R_\pi(X^{(n)}) > C_n(\alpha))$$
$$\to 1 - \int \Phi(f_\lambda^{-1}(f(u_\alpha))\, d\pi(\lambda).$$

Случай $\pi \in \Pi_2$ рассматривается аналогично.

Теорема 5. *Пусть размер критерия отношения правдоподобия проверки гипотезы H_0 против альтернативы $H(\pi)$, $\pi \in \Pi_3$, стремится при $n \to \infty$ к α. Тогда предельная при $n \to \infty$ мощность критерия может быть определена по формуле*

$$\beta(\alpha) = 1 + \int (\Phi(x_{3\lambda}(C(\alpha)) - \Phi(x_{4\lambda}(C(\alpha)))\, d\pi(\lambda), \tag{24}$$

где $C(\alpha)$ — решение уравнения

$$\Phi(x_{30}(C)) + 1 - \Phi(x_{40}(C)) = \alpha. \tag{25}$$

Доказательство. Пусть $C_n(\alpha) = \inf\{C\colon \mathbf{P}_0(R_\pi(X^{(n)}) > C) \leqslant \alpha\}$ — граница критической области критерия размера α, основанного на статистике $R_\pi(X^{(n)})$, $\pi \in \Pi_3$,

$C_n(\alpha) \to C(\alpha)$ при $n \to \infty$, $\varkappa$ — случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение, u_α — верхняя $alpha$-квантиль стандартного нормального распределения. Тогда из того, что

$$\mathbf{P}_0(R_\pi(X^{(n)}) > C_n(\alpha)) \to \mathbf{P}_0(f_0(\varkappa) > C(\alpha))$$

при $n \to \infty$, следует, что $C(\alpha)$ находится из уравнения (25).

Предельная мощность критерия размера α определяется по формуле

$$\begin{aligned}\beta(\alpha) &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_\pi(R\pi(X^{(n)}) > C_n(\alpha))\\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_\lambda \pi_n(\lambda)\mathbf{P}_\lambda(R_\pi(X^{(n)}) > C_n(\alpha))\\ &= 1 + \int (\Phi(x_{3\lambda}(C(\alpha)) - \Phi(x_{4\lambda}(C(\alpha)))\, d\pi(\lambda).\end{aligned}$$

4. Критерии проверки гипотез о случайных преобразованиях

Рассмотрим класс случайных преобразований, отображающих последовательность $\{Z_t, t = 1, \dots, n\}$ в последовательность $\{X_t, t = 1, \dots, n\}$. Пусть $g(x)$ — булева функция от ms аргументов $x = \{x_1, \dots, x_{ms}\} \in B^{ms}$, $B = \{0, 1\}$,

$$\Omega_m = \{\psi(x) = \psi(x_1, \dots, x_m\}$$

— множество всех булевых функций от m аргументов $x_1, \dots, x_m \in B$,

$$||\psi|| = \sum_x \psi(x)$$

— вес функции ψ,

$$\Omega_m^* = \{\psi(x), ||\psi|| = 2^{m-1}\}$$

— множество всех равновероятных булевых функций от m аргументов, $\oplus$ — знак сложения по модулю 2,

$$\Omega_{ms} = \{g = \psi(x_{11}, \dots, x_{1m}) \oplus \psi(x_{21}, \dots, x_{2m}) \oplus \dots \oplus \psi(x_{s1}, \dots, x_{sm})\}$$

— множество функций, являющихся линейными суперпозициями произвольных функций из множества Ω_m, $N = 2^m$, $\Delta = (2||\psi|| - N)/N$, если $\psi \in \Omega_m$, и $\Delta_s = (2||g|| - N^s)/N^s$, если $g \in \Omega_{ms}$, причем из вида функции g следует, что $\Delta_s = \Delta^s$, если $g \in \Omega_{ms}$.

Пусть $Z_t = (Z_{t1}, \dots, Z_{ts})$ — последовательность независимых случайных векторов, компоненты которых $Z_{tj} = (Z_{tj}^{(1)}, \dots, Z_{tj}^{(m)}) \in B^m$ имеют независимые равномерно распределенные координаты $Z_{tj}^{(k)}$, принимающие значения

$$z_{tj}^{(k)} \in B, \qquad t = 1, 2, \dots, \quad j = 1, \dots, s, \quad k = 1, \dots, m,$$

а последовательность X_t образуется из Z_t с помощью булевой функции $g \in \Omega_{ms}$ по формуле

$$X_t = g(Z_t), \qquad t = 1, 2, \dots$$

Случайные величины X_t независимы между собой и распределены по закону

$$\mathsf{P}(X_t = u) = \frac{1}{2}(1 - (-1)^u \Delta_g).$$

Предположим, что функция ψ извлекается из генеральной совокупности Ω_m с равными вероятностями независимо от реализации других случайных величин. Тогда функция распределения вероятностей случайной величины

$$\tau_N = \|\psi\|^* = 2(\|\psi\| - N/2)/N^{1/2} = (2\|\psi\| - N)/N^{1/2},$$

представляющей собой центрированный и нормированный вес случайной функции ψ, при $N \to \infty$ сходится к функции распределения стандартного нормального распределения. При этом распределение случайного параметра $\Delta_g = (\|\psi\|^*)^s/N^{s/2}$ при $N \to \infty$ и описанном выше случайном выборе функций ψ и g ведет себя как распределение случайной величины $\tau_N^s/N^{s/2}$, причем $\tau_N \to \varkappa$, $\tau_N^s \to \varkappa^s$ по распределению, где $\mathbf{L}\{\varkappa\} = \mathbf{N}(0,1)$.

Рассмотрим следующий способ реализации выборки $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$. Сначала выбирается случайная функция g, что равносильно выбору случайного параметра Δ_g распределения случайного элемента выборки X_t, после чего реализуется сама выборка $X^{(n)}$. Пусть $n \to \infty$ и

$$\mathsf{P}(X_t = u) = \frac{1}{2}(1 - (-1)^u \sigma_n/n^{1/2})).$$

В этом случае имеет место жесткая зависимость между случайными параметрами Δ_g и σ_n :

$$\Delta_g = \sigma_n/n^{1/2} = \tau_N^s/N^{s/2}, \qquad \sigma_n = \tau_N^s(n/N^s)^{1/2}.$$

Ясно, что $\Delta_g = \tau_N^s/n^{1/2}$ при $n = N^s$.

Предположим, что относительно распределения выборки $X^{(n)}$ заданы гипотезы H_0 и H_1. При гипотезе H_0 реализуется случайная последовательность $X_t = g(Z_t)$ с помощью функции $\psi(x)$, которая случайно и равновероятно выбирается из множества Ω_m^*, что соответствует значению параметра распределения $\zeta_n = 0$, при гипотезе H_1 реализуется случайная последовательность $X_t = g(Z_t)$ с помощью функции $\psi(x)$, которая случайно и равновероятно выбирается из множества Ω_m, что соответствует случайному выбору параметра σ_n из генеральной совокупности с заданным распределением $\pi_n(\gamma)$.

Пусть $N \to \infty$ и $n = a^2 N^s$, $a > 0$. Тогда

$$\Delta_g = \tau_N^s/N^{s/2} = a\tau_N^s/n^{1/2}$$

и используемые в разложении (9) величины имеют вид

$$p_0(x) = \frac{1}{2}, \quad h_\gamma(x) = \gamma h(x), \quad h(x) = a(-1)^{x+1}, \quad r_{n\gamma}(x) = 0.$$

Моменты слчайной функции $h(X_t)$ при гипотезе H_0 равны

$$\mathsf{E}_0 h(X_t) = 0, \qquad \mathsf{E}_0 h^2(X_t) = \mathsf{D}_0 h(X_t) = b = a^2.$$

Распределение $\pi_n(\gamma)$ задается в данном случае как распределение случайной величины τ_N^s при N, определяемом из соотношения $n = a^2 N^s$.

Изучим асимптотическое поведение статистики КОП при гипотезе H_0. Прежде всего заметим, что статистику $R_\pi(X^{(n)})$ в рассматриваемом случае можно представить в виде $R_\pi(X^{(n)}) = f_n(\varkappa_n)$, где

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{\gamma\in\Gamma_n} \pi_n(\gamma) q_{n\gamma}(x), \\ q_{n\gamma}(x) &= \left(1-\frac{\gamma^2}{n}\right)^{n/2}\left(\frac{1+\gamma/n^{1/2}}{1-\gamma/n^{1/2}}\right)^{xn^{1/2}/2}, \\ \varkappa_n &= \|X^{(n)}\|^* = 2(\|X^{(n)}\| - n/2)/n^{1/2}, \\ \|X^{(n)}\| &= X_1 + \ldots + X_n. \end{aligned}$$

Параметр γ принимает значения от $-n^{1/2}$ до $n^{1/2}$ через интервалы длины $2/n^{1/2}$. Положим

$$g_\gamma(x) = \exp\{-\gamma^2/2 + \gamma x\}.$$

Теорема 6. *Пусть при $n \to \infty$ распределение $\pi_n(\gamma)$ слабо сходится к распределению $\pi(\gamma)$, $\gamma \in \mathbf{R}$. Тогда распределение статистики КОП $R_\pi(X^{(n)})$ проверки гипотезы H_0 против альтернативы $H(\pi)$ при гипотезе H_0 и $n \to \infty$ слабо сходится к распределению случайной величины*

$$f(\varkappa) = \int g_\gamma(\varkappa)\, d\pi(\gamma) = \int \exp\{-\gamma^2/2 + \gamma\varkappa\}\, d\pi(\gamma),$$

где $\varkappa$ — случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение.

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдем C такое, что $\mathbf{P}_0(|\varkappa_n| > C) < \varepsilon$ при $\geqslant n_0$. Исследуем асимптотическое поведение функции $q_{n\gamma}(x)$ при $n \to \infty$ в области $|x| \leqslant C$. Для этого разобьем область суммирования $|\gamma| \leqslant n^{1/2}$ на три подмножества

$$\begin{aligned} 0 \leqslant |\gamma| &\leqslant n^{1/7}, \\ n^{1/7} < |\gamma| &\leqslant \lambda n^{1/2}, \\ \lambda n^{1/2} < |\gamma| &\leqslant n^{1/2}, \end{aligned}$$

где λ — некоторая постоянная из интервала $1/2 < \lambda < 1$.

Для первой области справедливо разложение

$$\begin{aligned} \ln q_{n\gamma}(x) &= \frac{1}{2}(n + xn^{1/2})\ln(1+\gamma/n^{1/2}) - \frac{1}{2}(n - xn^{1/2})\ln(1-\gamma/n^{1/2}) \\ &= -\gamma^2/2 + \gamma x + o(\gamma) \end{aligned}$$

равномернго по x из отрезка $|x| \leqslant C$.

Во второй области, учитывая неравенства $-\ln(1-z) \leqslant z/(1-z)$ и $\ln(1+z) \leqslant z$, справедливые при $z > 0$, находим, что

$$\begin{aligned} \ln q_{n\gamma}(x) &= \frac{n}{2}\ln(1-\gamma^2/n) + \frac{xn^{1/2}}{2}(\ln(1+\gamma/n^{1/2}) - \ln(1-\gamma/n^{1/2})) \\ &\leqslant -\frac{\gamma^2}{2} + C\gamma + \frac{C\gamma}{1-\gamma} \end{aligned}$$

стремится к нулю при $n \to \infty$ равномерно по x из отрезка $|x| \leqslant C$.

В третьей области справедливы оценки

$$\begin{aligned} q_{n\gamma}(x) &= (1+\gamma n^{-1/2})^{n/2+xn^{1/2}/2}(1-\gamma n^{-1/2})^{n/2-xn^{1/2}/2} \\ &\leqslant 2^{n/2+xn^{1/2}/2}(1-\lambda)^{n/2-xn^{1/2}/2} \\ &\leqslant 2(1-\lambda)^{n/2}2^{Cn^{1/2}/2}(1-\lambda)^{-Cn^{1/2}/2}. \end{aligned}$$

Из последней оценки следует, что $q_{n\gamma}(x) \to 0$ равномерно на отрезке $|x| \leqslant C$ при $\lambda > 1/2$.

Таким образом, в области $|x| \leqslant C$, в которую попадает случайная величина $\varkappa_n$ с вероятностью, не меньшей, чем $1-\varepsilon$, функция $q_{n\gamma}(x)$ равномерно сходится к функции $g_\gamma(x)$, откуда следует утверждение теоремы.

Агалогичные оценки имеют место и в случае, когда справедлива гипотеза H_λ.

Исследуем вероятностные характеристики оптимального критерия проверки описанных выше гипотез H_0 и H_1.

Лемма 1. *Пусть $N \to \infty$, $n = a^2N^s$, $a > 0$, и функция $\psi(x)$ выбирается случайно и равновероятно из множества Ω_m всех булевых функций от m аргументов. Тогда для $s = 2k+1$, $k = 0, 1, \ldots$, и $s = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$, соответственно*

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\gamma^{1/s-1}\exp\{-\gamma^2a^2/2+\gamma\lambda a^2+\gamma a x-\gamma^{2/s}/2\}d\gamma,$$

$$f_\lambda(x) = \frac{2}{s\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}\gamma^{1/s-1}\exp\{-\gamma^2a^2/2+\gamma\lambda a^2+\gamma a x-\gamma^{2/s}/2\}d\gamma. \qquad (26)$$

Доказательство. Если $\varkappa$ имеет стандартное нормальное распределение, то плотность распределения случайной величины $\varkappa^s$ равна

$$p(\gamma) = \frac{\gamma^{1/s-1}}{s\sqrt{2\pi}}\exp\{-\gamma^{2/s}/2\}, \qquad -\infty < \gamma < \infty,$$

если $s = 2k+1$, и

$$p(\gamma) = \frac{2\gamma^{1/s-1}}{s\sqrt{2\pi}}\exp\{-\gamma^{2/s}/2\}, \qquad 0 < \gamma < \infty,$$

если $s = 2k$. Подставляя эти выражения в (21), получаем (26).

Следствие 2. *Пусть $s = 1$ и $a = 1$. Тогда*

$$f_\lambda(x) = 2^{-1/2}\exp\{(\lambda+x)^2/4\}. \qquad (27)$$

Доказательство. Подставляя в (26) значения $k = 0$, $s = 1$ и $a = 1$, получаем (27).

Теорема 7. *Если $s = 1$ и $a = 1$, то предельная мощность критерия отношения правдоподобия размера α равна*

$$\beta(\alpha) = 2 - \int(\Phi(u_{\alpha/2}+\lambda)+\Phi(u_{\alpha/2}-\lambda))\varphi(\lambda)d\lambda, \qquad (28)$$

где Φ и φ — соответственно функция распределения и плотность стандартного нормального распределения.

Доказательство. Найдем предельное значение константы, задающей критерий отношения правдоподобия проверки гипотез H_0 и $H(\pi)$ размера α из соотношений

$$\mathsf{P}_0(R_\pi(X^{(n)}) > C_n(\alpha)) \to \mathsf{P}(f(\varkappa) > c_\alpha) = \alpha, \tag{29}$$

где $\mathbf{L}\{\varkappa\} = \mathbf{N}(0,1)$.

Положим

$$l(\alpha) = (\ln(2^{1/2}c_\alpha))^{1/2}, \qquad c_\alpha > 0.$$

Из (27) и (29) получаем, что

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(f(\varkappa) > c_\alpha) &= \mathsf{P}((1/2^{1/2})\exp\{\varkappa^2/4\} > c_\alpha)\\ &= \mathsf{P}(|\varkappa| > 2l(\alpha)) = \alpha,\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$c_\alpha = 2^{-1/2}\exp\{u^2_{\alpha/2}/4\}.$$

Предельная мощность может быть определена с помощью следующих формул:

$$\begin{aligned}\beta(\alpha) &= \lim_{n\to\infty}\mathsf{P}_\pi(R_\pi(X^{(n)}) > C_n(\alpha)) = \lim_{n\to\infty}\sum_\lambda \pi(\lambda)\mathsf{P}_\lambda(R_\pi(X^{(n)}) > C_n(\alpha))\\ &= \int \mathsf{P}_\lambda(f_\lambda(\varkappa) > c_\alpha)\,d\pi(\lambda) = \int \mathsf{P}(f_\lambda(\varkappa) > 2^{-1/2}\exp\{u^2_{\alpha/2}/4\}\,d\pi(\lambda)\\ &= \int \mathsf{P}(\exp\{((\lambda+\varkappa)^2/4\} > \exp\{u^2_{\alpha/2}/4\})\,d\pi(\lambda),\end{aligned}$$

откуда следует (28).

В заключение заметим, что в условиях теоремы 7 легко находится вид критической области оптимального критерия для любого фиксированного n.

Список литературы

1. LeCam L. Locally asymptotically normal families of distributions. *Univ. Calif. Publ. Statist.* (1960) **3**, №2, 37–98.

2. Чибисов Д. М. Теорема о допустимых критериях и ее применения к одной асимптотической задаче проверки гипотез. *Теория вероятностей и ее применения* (1967) **12**, №1, 96–111.

3. Chibisov D. M. Transition to the limiting process for deriving asymptotically optimal tests. *Sankhyā, Ser. A* (1969) **31**, №3, 241–258.

4. Русас Дж. *Контигуальность вероятностных мер.* Мир, Москва, 1975.

5. Иванов В. А. Проверка статистических гипотез по случайно преобразованной реализации. *Дискретная математика* (1994) **6**, №2, 150–158.

Статья поступила 14.10.1997.