S. A. Gritsenko, M. V. Shevtsova, On the distribution of primes in an arithmetic progression whose difference is a power of a fixed prime, *Chebyshevskii Sb.*, 2011, Volume 12, Issue 1, 60–78

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Посвящается 65-ой годовщине со дня рождения
профессора Сергея Михайловича Воронина

Том 12 Выпуск 1 (2011)

УДК 511.35

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ В АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ, РАЗНОСТЬ КОТОРОЙ ЯВЛЯЕТСЯ СТЕПЕНЬЮ ФИКСИРОВАННОГО ПРОСТОГО ЧИСЛА

С.А. Гриценко, М.В. Шевцова (г. Белгород)

e-mail: gritsenko@bsu.edu.ru, shevtsova@bsu.edu.ru

Аннотация

Получена асимптотическая формула для числа простых чисел, не превосходящих X и лежащих в арифметической прогрессии с разностью $D = p_0^m$, где $p_0 \geqslant 3$ — фиксированное простое число и $D \leqslant X^{\frac{3}{8}} e^{-(\ln\ln X)^2}$.

Посвящается светлой памяти
Сергея Михайловича Воронина

1 Введение

В теории чисел важную роль играет распределение простых чисел в арифметических прогрессиях.

Пусть при $(l, D) = 1$ $\pi(X, D, l)$ означает число простых чисел, не превосходящих X и сравнимых с l по модулю D. Из расширенной гипотезы Римана следует, что:

$$\pi(X, D, l) = \frac{\operatorname{Li} X}{\varphi(D)} \left(1 + O\left(\ln^{-M} X\right)\right),$$

где $D \leqslant X^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число, $M > 0$ — константа.

Известная к настоящему времени граница изменения D гораздо меньше. Например, при $D \leqslant \ln^A X$, где $A > 0$ — константа, $c = c(A) > 0$, справедлива формула:

$$\pi(X, D, l) = \frac{\operatorname{Li} X}{\varphi(D)} + O\left(Xe^{-c\sqrt{\ln X}}\right),$$

которая известна в литературе как формула Зигеля-Вальфиша [1].

Но для разности $D = p_0^m$, $p_0 \geqslant 3$ — фиксированное простое число, можно улучшить этот результат. В 1955 году А. Г. Постников обнаружил [2], что сумма значений неглавного характера по модулю D, равному степени нечетного простого числа, представляет собой сумму Вейля специального вида. Это открытие замечательно тем, что суммы Вейля, даже очень короткие (а вместе с ними и очень короткие суммы значений характера), допускают нетривиальные оценки.

Идея А. Г. Постникова позволила решить некоторые проблемы теории чисел, к которым в общем случае не было никаких подходов.

В 1964 году Ю. В. Линник, М. Б. Барбан и Н. Г. Чудаков [3] доказали следующий асимптотический закон, справедливый при $D = p_0^m \leqslant X^{\frac{3}{8}-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$ — произвольно малое число, $M > 0$ — произвольно большое число):

$$\pi(X, D, l) = \frac{\operatorname{Li} X}{\varphi(D)}\left(1 + O\left(\ln^{-M} X\right)\right).$$

Доказательство этой теоремы основано на плотностной технике, и поэтому для него требуется информация о распределении нулей L-функции Дирихле в критической полосе.

В 1979 году М. М. Петечук [4] применил идею А. Г. Постникова к проблеме делителей Дирихле в коротких арифметических прогрессиях и получил асимптотическую формулу:

$$\sum_{\substack{n \leqslant X \\ n \equiv l \pmod D}} \tau_k(n) = \frac{XQ_{k-1}(\ln X)}{\varphi(D)} + O\left(\frac{X^{1-\varkappa}}{\varphi(D)}\right),$$

где $D = p_0^m \leqslant X^{\frac{3}{8}-\varepsilon}$, $(l, D) = 1$, $Q_{k-1}(\ln X)$ — многочлен степени $k-1$ с коэффициентами, зависящими от k и p_0, $\varkappa = \min\left\{\frac{\varepsilon}{16}, \frac{\beta}{k^3}\right\}$, $\beta > 0$ — константа, зависящая от p_0.

Доказательство этой формулы основано на идее работы А.А.Карацубы [5], позволяющей оценивать ее остаточный член по схеме решения тернарной аддитивной задачи. Доказательство Петечука «элементарно», то есть не использует средств комплексного анализа.

В настоящей статье предлагается новый способ вывода асимптотической формулы для $\pi(X, D, l)$ при $D = p_0^m$. По сравнению с теоремой М. Б. Барбана, Ю. В. Линника и Н. Г. Чудакова получено незначительное уточнение остаточного члена и верхней границы изменения D.

Наше доказательство существенно отличается тем, что не использует информации о распределении нулей L-функции Дирихле в критической полосе, а использует лишь теорему о границе нулей, принадлежащую В. Н. Чубарикову [6], доказательство которой элементарно.

В основном мы придерживаемся схемы доказательства теоремы Петечука, однако в некоторых местах приходится вносить в эту схему изменения, поскольку нам необходимо оценивать не только суммы значений характера, но и суммы значений характера по простым числам.

Сформулируем наш основной результат.

Теорема 1. *При* $(l, D) = 1, \quad D = p_0^m \leqslant X^{\frac{3}{8}} e^{-(\ln\ln X)^2}$ *справедлива формула*

$$\pi(X, D, l) = \frac{\operatorname{Li} X}{\varphi(D)} + O\left(\frac{X}{\varphi(D)} e^{-\varkappa(\ln\ln X)^2}\right), \tag{1}$$

где $\varkappa = \dfrac{b_6}{6}$, b_6 *— константа леммы 9.*

Нам потребуется несколько лемм.

2 Леммы

Лемма 1. *(тождество Хис-Брауна) Пусть* $K \geqslant 1$, $z \geqslant 1$. *Тогда для любого* $n < 2z^K$ *имеем*

$$\Lambda(n) = -\sum_{1\leqslant k\leqslant K} (-1)^k \binom{K}{k} \sum_{\substack{m_1\ldots m_k n_1\ldots n_k = n \\ m_1,\ldots,m_k\leqslant z}} \cdots \sum \mu(m_1)\ldots\mu(m_k)\ln n_k.$$

Доказательство. См. в [7, с. 344].

Лемма 2. *(Виноградова-Пойа) Пусть* χ *— примитивный характер по модулю* D. *Тогда справедлива оценка:*

$$\left|\sum_{1\leqslant\nu\leqslant a}\chi(\nu)\right| \ll \sqrt{D}\ln D\,.$$

Доказательство. См. в [8, с. 123].

Лемма 3. *Для любого неглавного характера* χ *по модулю* $D = p_0^m$ *справедлива оценка:*

$$\left|\sum_{1\leqslant\nu\leqslant a}\chi(\nu)\right| \ll a^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{6}}\ln D.$$

Доказательство. См. в [9, с. 161].

Лемма 4. *Пусть χ—произвольный неглавный характер по модулю $D = p_0^m$. Тогда выполняется оценка*

$$\left|\sum_{\nu\leqslant a}\chi(\nu)\right| \ll a^{1-\frac{\gamma}{\rho^2}},$$

где $\rho = \frac{\ln D}{\ln a}$, $1 \leqslant \rho \leqslant 0,5m$, $0 < \gamma < 1$ — константа.

Доказательство. См. в [8, с. 222].

Следующая лемма представляет собой вариант теоремы В. Н. Чубарикова [6] о границе нулей L-функции Дирихле в критической полосе.

Лемма 5. *Пусть χ — произвольный неглавный характер по модулю $D = p_0^m$. Тогда $L(s,\chi)$ не имеет нулей в области*

$$\sigma > 1 - \frac{b_1}{(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2}, \quad |t| < e^{b_2(\ln\ln D)^2},$$

b_1, b_2 — положительные константы.

Доказательство. Сначала покажем, что в области $\sigma \geqslant 1 - \dfrac{\gamma_1}{(\ln D)^{2/3}}$, $\gamma_1 = \gamma/2$, где γ — константа из леммы 4, имеет место оценка

$$L(s,\chi) = O((|t|+1)(\ln D)^{2/3}).$$

Справедливо тождество

$$L(s,\chi) = s\int_1^\infty S(x)x^{-s-1}dx, \quad S(x) = \sum_{\nu\leqslant x}\chi(\nu).$$

Разобьем интеграл на части:

$$L(s,\chi) = s\int_1^D S(x)x^{-s-1}dx + s\int_D^\infty S(x)x^{-s-1}dx. \tag{2}$$

Во втором интеграле для оценки суммы $S(x)$ будем пользоваться оценкой Виноградова-Пойа: $S(x) = O(\sqrt{D}\ln D)$. Имеем:

$$\left|s\int_D^\infty S(x)x^{-s-1}dx\right| \leqslant (|t|+1)\int_D^\infty |S(x)|x^{-\sigma-1}dx \ll (|t|+1)\sqrt{D}\ln D D^{-\sigma}.$$

Поскольку $\sigma > \dfrac{1}{2}$, то

$$L(s,\chi) = s\int_1^D S(x)x^{-s-1}dx + O\left((|t|+1)\frac{\ln D}{D^\varepsilon}\right),$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно мало.

Рассмотрим первый интеграл в (2). Разобьем его на части, полагая $N = \exp(\ln D)^{2/3}$:

$$\int_1^D S(x)x^{-s-1}dx = \int_1^N S(x)x^{-s-1}dx + \int_N^D S(x)x^{-s-1}dx.$$

В первом интеграле справа сумму $S(x)$ оценим тривиально, а во втором — согласно лемме 4. Получим:

$$\left|\int_1^N x^{-s}dx\right| \leqslant \left.\frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma}\right|_1^N = O((\ln D)^{2/3}),$$

$$\left|\int_N^D S(x)x^{-s-1}dx\right| \leqslant \int_N^D |S(x)|x^{-1-\sigma}dx = O\left(\int_N^D x^{\sigma}\exp\left\{-\frac{\gamma\ln^3 x}{\ln^2 D}\right\}dx\right) = \\ = [v = \ln x] = \\ = O\left(\int_{\ln N}^{\ln D}\exp\left\{v(1-\sigma) - \frac{\gamma v^3}{\ln^2 D}\right\}dv\right) = O\left(\int_{\ln N}^{\ln D}\exp\left\{-\frac{\gamma v^3}{2\ln^2 D}\right\}dv\right) = \\ = O((\ln D)^{2/3}).$$

Таким образом, мы доказали, что в области $\sigma \geqslant 1 - \dfrac{\gamma_1}{(\ln D)^{2/3}}$

$$L(s,\chi) = O((|t|+1)(\ln D)^{2/3}).$$

Теперь пусть $\rho = \sigma + it$ — нуль функции $L(s,\chi)$, положим

$$\sigma = 1 - \frac{d}{(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2}, \quad d \leqslant 1.$$

Надо показать, что $d \geqslant c_0 > 0$. Рассмотрим точку

$$s_0 = 1 + \frac{4d}{(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2} + it = \sigma_0 + it.$$

Из точки s_0 опишем круг радиуса $r = \dfrac{c_1}{(\ln D)^{2/3}}$. Точка ρ будет лежать внутри круга радиуса $r/2$, так как

$$\frac{c_1}{2(\ln D)^{2/3}} > \frac{5d}{(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2}.$$

В круге $|s - s_0| < r$

$$L(s,\chi) = O((|t|+1)(\ln D)^{2/3}).$$

Кроме того,

$$\left|\frac{1}{L(s_0,\chi)}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma_0}} \leqslant 1+\int_1^{\infty}\frac{du}{u^{\sigma_0}} = 1+\frac{(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2}{4d}.$$

Поэтому

$$\left|\frac{L(s,\chi)}{L(s_0,\chi)}\right| \leqslant M = (|t|+1)\frac{\ln^2 D}{d}.$$

Точно такая же оценка имеет место в круге $|s-s_1| \leqslant r$, $s_1=\sigma_0+2it$. Применим лемму 6 [8, с. 99].

$$Re\frac{L'(s_0)}{L(s_0)} \geqslant -\frac{4}{r}\ln M + Re\frac{1}{s_0-\rho} = -\frac{4(\ln D)^{2/3}}{c_1}\ln M + \frac{(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2}{5d},$$

$$Re\frac{L'(s_1)}{L(s_1)} \geqslant -\frac{4}{r}\ln M = -\frac{4(\ln D)^{2/3}}{c_1}\ln M,$$

$$-\frac{L'(\sigma_0)}{L(\sigma_0)} < \frac{1}{\sigma_0-1}+c_2.$$

Справедливо неравенство:

$$3\left\{-\frac{L'(\sigma_0,\chi)}{L(\sigma_0,\chi)}\right\} + 4\left\{-Re\frac{L'(\sigma_0+it)}{L(\sigma_0+it)}\right\} + \left\{-Re\frac{L'(\sigma_0+2it)}{L(\sigma_0+2it)}\right\} \geqslant 0.$$

Подставляя полученные оценки в это неравенство, получим:

$$3\left\{\frac{(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2}{4d}+c_2\right\} + 4\left\{\frac{4(\ln D)^{2/3}}{c_1}\ln M - \frac{(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2}{5d}\right\} + \\ + \frac{4(\ln D)^{2/3}}{c_1}\ln M \geqslant 0,$$

$$-\frac{(\ln\ln D)^2}{20d} + \frac{3c_2}{(\ln D)^{2/3}} + \frac{20}{c_1}(\ln\ln D)^2 + \frac{40}{c_1}\ln\ln D - \frac{20}{c_1}\ln d \geqslant 0,$$

$$-\frac{1}{d}\left(\frac{(\ln\ln D)^2}{20} - \frac{20d\ln d}{c_1}\right) + \frac{20}{c_1}\left(\frac{3c_2c_1}{20(\ln D)^{2/3}} + (\ln\ln D)^2 + 2\ln\ln D\right) \geqslant 0.$$

При $d\to 0$ имеем: $d\ln d \to 0$, $\dfrac{1}{d}\to\infty$, поэтому

$$-\frac{1}{d}\frac{(\ln\ln D)^2}{20} + \frac{20}{c_1}(\ln\ln D)^2 \geqslant 0, \quad d \geqslant \frac{c_1}{40}.$$

Тем самым лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть χ — произвольный неглавный характер по модулю $D = p_0^m$. Тогда в области*

$$\sigma > 1 - \frac{b_1}{2(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2}, \quad |t| < e^{b_2(\ln\ln D)^2},$$

где b_1, b_2 — положительные константы, справедлива оценка

$$\left|\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right| \ll (\ln D)^{5/3}(\ln\ln D)^2.$$

Доказательство. Применим формулу разложения логарифмической производной по нулям и границу нулей для функции $L(s,\chi)$ леммы 5. Пусть $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$ — нули $L(s,\chi)$ и

$$\beta_n \leqslant 1 - \frac{b_1}{(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2}, \quad \sigma \geqslant 1 - \frac{b_1}{2(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2}.$$

Имеем:

$$\frac{L'}{L}(s,\chi) = \sum_{|t-\gamma_n|\leqslant 1} \frac{1}{s-\rho_n} + O(\ln D|t|),$$

$$\left|\frac{L'}{L}(s,\chi)\right| \ll \frac{2}{b_1}(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2 \sum_{|t-\gamma_n|\leqslant 1} 1 + O(\ln D|t|) = O((\ln D)^{5/3}(\ln\ln D)^2).$$

Лемма 7. *Пусть χ—произвольный неглавный характер по модулю $D = p_0^m$, $a \gg D^\eta$, $\eta > 0$ — константа, p — простое число. Тогда справедлива оценка:*

$$\left|\sum_{a<p\leqslant 2a} \chi(p)\right| \ll a e^{-b_5(\ln\ln D)^2},$$

где $0 < b_5 < 1$ — константа.

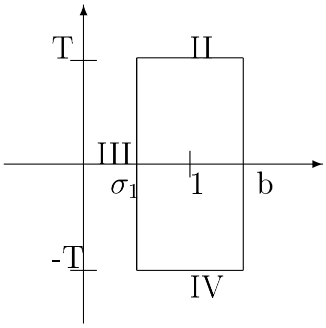
Доказательство. Для доказательства леммы достаточно оценить сумму

$$\sum_{a<n\leqslant 2a} \chi(n)\Lambda(n).$$

Применим для этой суммы формулу Перрона [10, с. 427]. Имеем:

$$\sum_{a<n\leqslant 2a} \chi(n)\Lambda(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right)\frac{(2^s-1)a^s}{s}ds + \\ + O\left(\frac{a^b}{T(b-1)} + \frac{a\ln^2 a}{T}\right). \tag{3}$$

Пусть Γ — контур, являющийся прямоугольником с вершинами σ_1+iT, $b+iT$, $b-iT$, σ_1-iT, где $b=1+\dfrac{1}{\ln a}$, $\sigma_1=1-\dfrac{b_3}{(\ln D)^{2/3}(\ln\ln D)^2}$, $T=e^{b_4(\ln\ln D)^2}$.



Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right)\frac{a^s}{s}ds=0.$$

Оценим интегралы по сторонам II и IV соответствующего контура:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-iT}^{b+iT}\left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right)\frac{a^s}{s}ds\right|\leqslant\int_{\sigma_1}^{b}(\ln D)^{5/3}(\ln\ln D)^2\frac{a^\sigma}{T}d\sigma\ll ae^{-b_5(\ln\ln D)^2}.$$

По стороне III интеграл оценим следующим образом:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-iT}^{\sigma_1+iT}\left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right)\frac{a^s}{s}ds\right|\leqslant\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-T}^{T}\left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right)\frac{a^{\sigma+it}}{t}dt\right|=$$

$$\ll a^{\sigma_1}\ln T(\ln D)^{5/3}(\ln\ln D)^2\ll ae^{-(\ln D)^{1/4}}.$$

Таким образом интеграл в формуле (3) не превосходит $ae^{-b_5(\ln\ln D)^2}$, откуда и следует утверждение леммы.

Лемма 8. *(А. И. Виноградова) Количество чисел, не превосходящих x, все простые делители которых не превосходят $z_0\leqslant\sqrt{x}$, имеет оценку*

$$Bx\exp\left(-\frac{1}{\alpha}\left(\ln\frac{1}{\alpha}+\ln\ln\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{1}{\alpha}+\frac{\theta}{\alpha\ln 1/\alpha}\right),$$

где $\alpha=\ln z_0/\ln x$, $|\theta|\leqslant 1$, B — положительная константа.

Доказательство. См. в [11].

Лемма 9. *Пусть χ—произвольный неглавный характер по модулю $D = p_0^m$, $a \gg D^\eta$, $\eta > 0$ — константа. Справедлива оценка:*

$$\sum_{n\leqslant a}\mu(n)\chi(n) \ll ae^{-b_6(\ln\ln D)^2},$$

где $0 < b_6 < \dfrac{1}{10}$ — константа.

Доказательство. Очевидно, что

$$\sum_{n\leqslant a}\mu(n)\chi(n) = 1 + \sum_{r=1}^{R_0}(-1)^r\sum_{\delta_r\leqslant a}\chi(\delta_r),$$

где δ_r — бесквадратное число, имеющее ровно r простых делителей, $R_0 \leqslant [\log_2 a]$.

Пусть $1 \leqslant r \leqslant R_0$. Обозначим $S_r = \sum_{\delta_r\leqslant a}\chi(\delta_r)$.

Если $r = 1$, то S_r — сумма по простым числам, ее оценка получена в лемме 7.

Пусть $r > 1$. Разобьем числа δ_r на $r+1$ непересекающихся классов $A_0, A_1, \ldots, A_r$ следующим образом: при $0 \leqslant j \leqslant r$ $\delta_r \in A_j$, если среди простых делителей δ_r ровно j простых делителей, больших $e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}$, и ровно $r-j$ простых делителей, не превосходящих $e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}$, где $0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{100}$.

Рассмотрим сначала числа δ_r из класса A_0. Все простые делители этих чисел не превосходят $e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}$. Поэтому

$$\left|\sum_{\substack{\delta_r\leqslant a\\ \delta_r\in A_0}}\chi(\delta_r)\right| \leqslant {\sum_{n\leqslant a}}' 1,$$

где штрих означает, что все простые делители n не превосходят $e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}$. Оценим эту сумму по лемме А. И. Виноградова (лемма 8), получим:

$${\sum_{n\leqslant a}}' 1 \ll a\exp\left(-(\ln D)^{1/3-\varepsilon_1}\right),$$

следовательно,

$$\left|\sum_{\substack{\delta_r\leqslant a\\ \delta_r\in A_0}}\chi(\delta_r)\right| \ll a\exp\left(-(\ln D)^{1/3-\varepsilon_1}\right).$$

Рассмотрим числа δ_r, принадлежащие остальным классам A_j, $1 \leqslant j \leqslant r$. Любое такое число можно однозначно представить в виде

$$\delta_r = \delta'_{r-j}\delta''_j,$$

где δ'_{r-j} — бесквадратное число, имеющее $r-j$ простых делителей, каждый из которых не превосходит $e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}$, а δ''_j — бесквадратное число, имеющее j простых делителей, каждый из которых больше $e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}$. Имеем:

$$\sum_{\substack{\delta_r\leqslant a\\ \delta_r\in A_j}}\chi(\delta_r)=\sum_{\delta'_{r-j}\delta''_j\leqslant a}\chi(\delta'_{r-j}\delta''_j)=$$
$$=\sum_{\substack{\delta'_{r-j}\delta''_j\leqslant a\\ \delta'_{r-j}\leqslant a^{0,1}}}\chi(\delta'_{r-j}\delta''_j)+\sum_{\substack{\delta'_{r-j}\delta''_j\leqslant a\\ \delta'_{r-j}>a^{0,1}}}\chi(\delta'_{r-j}\delta''_j)=$$
$$=S'_r+S''_r.$$

Оценим сумму S''_r. Так как $\delta'_{r-j}\delta''_j\leqslant a$, $\delta'_{r-j}>a^{0,1}$, то число δ''_j удовлетворяет неравенству $\delta''_j\leqslant a^{0,9}$, поэтому

$$|S''_r|\leqslant\sum_{\delta''_j\leqslant a^{0,9}}\sum_{\delta'_{r-j}<z_1}1,$$

где $z_1=\dfrac{a}{\delta''_j}$, $z_1>a^{0,1}$.

В силу леммы А. И. Виноградова,

$$\sum_{\delta'_{r-j}<z_1}1\ll\frac{a}{\delta''_j}\exp\left(-0,1(\ln D)^{1/3-\varepsilon_1}\right),$$

следовательно,

$$|S''_r|\ll a\exp\left(-0,05(\ln D)^{1/3-\varepsilon_1}\right).$$

Оценим теперь сумму S'_r. Имеем:

$$|S'_r|\leqslant\sum_{\delta'_{r-j}\leqslant a^{0,1}}\left|\sum_{\delta''_j\leqslant z_2}\chi(\delta''_j)\right|,$$

где $z_2=\dfrac{a}{\delta'_{r-j}}$, $z_2>a^{0,9}$.

Сравним внутреннюю сумму с суммой

$$\sum_{\substack{\delta''_{j-1}p\leqslant z_2\\ p>e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}}}\chi(\delta''_{j-1})\chi(p),$$

где δ''_{j-1} пробегает множество бесквадратных чисел, имеющих ровно $j-1$ простых делителей, каждый из которых больше $e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}$.

Числа $\delta''_{j-1}p$ могут не быть бесквадратными; если число $\delta''_{j-1}p$ не бесквадратное, то оно делится на p^2. Вклад таких чисел в сумму не превосходит

$$\sum_{p>e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}} \frac{z_2}{p^2} \ll z_2 e^{-(\ln D)^{2/3-\varepsilon_1}}.$$

Если же числа $\delta''_{j-1}p$ бесквадратные, то каждое заданное число $\delta''_j \leqslant z_2$ встречается среди чисел $\delta''_{j-1}p$ ровно j раз, поэтому

$$\sum_{\delta''_j \leqslant z_2} \chi(\delta''_j) = \frac{1}{j} \sum_{\delta''_{j-1}p \leqslant z_2} \chi(\delta''_{j-1}p) + O\left(z_2 e^{-(\ln D)^{2/3-\varepsilon_1}}\right),$$

где

$$\left|\sum_{\delta''_j \leqslant z_2} \chi(\delta''_j)\right| \leqslant \sum_{\delta''_{j-1} \leqslant z_2 e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}} \left|\sum_{e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}} < p \leqslant \frac{z_2}{\delta''_{j-1}}} \chi(p)\right|.$$

Таким образом, для оценки суммы $\sum\limits_{n \leqslant a} \mu(n)\chi(n)$ требуется оценить сумму по простым числам $\sum_{p \leqslant z_3} \chi(p)$, где $z_3 > e^{(\ln D)^{2/3+\varepsilon_1}}$. Применим лемму 7, получим:

$$\sum_{p \leqslant z_3} \chi(p) = O\left(z_3 e^{-\frac{1}{2} b_5 (\ln\ln D)^2}\right).$$

Объединяя оценки всех рассмотренных случаев, имеем:

$$\sum_{n \leqslant a} \mu(n)\chi(n) \ll a e^{-b_6 (\ln\ln D)^2}.$$

Тем самым лемма доказана.

3 Доказательство теоремы 1

Рассмотрим сумму

$$\psi(X, D, l) = \sum_{\substack{n \leqslant X \\ n \equiv l \pmod D}} \Lambda(n).$$

Из ортогональности характеров имеем:

$$\sum_{\substack{n \leqslant X \\ n \equiv l \pmod D}} \Lambda(n) = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \pmod D} \overline{\chi}(l) \sum_{n \leqslant X} \Lambda(n)\chi(n).$$

Выделим слагаемое с χ_0:

$$\sum_{\substack{n\leqslant X\\ n\equiv l \pmod D}} \Lambda(n) = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\substack{n\leqslant X\\ (n,D)=1}} \Lambda(n) + \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi\neq\chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{n\leqslant X} \Lambda(n)\chi(n).$$

Первая сумма справа даст нам главный член формулы, а вторая — остаток R. Ко второй сумме применим тождество Хис-Брауна (лемма 1):

$$R = -\sum_{1\leqslant k\leqslant K} (-1)^k \binom{K}{k} \frac{1}{\varphi(D)} \times$$
$$\times \sum_{\chi\neq\chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{n_1\ldots n_k n_{k+1}\ldots n_{2k}\leqslant X} \cdots \sum c_1(n_1)\ldots c_{2k}(n_{2k})\chi(n_1\ldots n_{2k}),$$

где $c_j(n_j)$ — либо 1, либо $\ln n_j$, либо $\mu(n_j)$, $j = 1,\ldots,2k$. Если $c_j = \mu(n_j)$, то $n_j \leqslant X^{1/K}$.

Пусть $K = 100$. Зафиксируем k и разобьем соответствующую сумму R_k на $O(\ln^{2k} X)$ слагаемых вида

$$S = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi\neq\chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{\substack{N_1<n_1\leqslant 2N_1\\ n_1\ldots n_{2k}\leqslant X}} \cdots \sum_{N_{2k}<n_{2k}\leqslant 2N_{2k}} c_1(n_1)\ldots c_{2k}(n_{2k})\chi(n_1\ldots n_{2k}).$$

Без ограничения общности, будем считать, что $N_1 \geqslant N_2 \geqslant \ldots \geqslant N_{2k}$.

Рассмотрим случай: $D > X^{1-\varepsilon}N_1^{-1}$, ε — произвольно малое число. Тогда $N_2\ldots N_{2k} \leqslant DX^{\varepsilon}$. Кроме того, $N_1 > \dfrac{X}{D}X^{-\varepsilon}$, следовательно, $c_1(n_1)$ равно либо 1, либо $\ln n_1$. Оценим $\sum\limits_{\substack{N_1<n_1\leqslant 2N_1\\ n_1\leqslant X(n_2\ldots n_{2k})^{-1}}} c_1(n_1)\chi(n_1)$ согласно лемме 2. Тогда:

$$S \ll \sqrt{D}N_2\ldots N_{2k}\ln^2 D \ll D^{3/2}X^{2\varepsilon} \leqslant \frac{X^{1-\varepsilon}}{D}$$

при $D \leqslant X^{\frac{2}{5}-\frac{6}{5}\varepsilon}$. Следовательно, для этого случая утверждение теоремы выполняется.

В дальнейшем будем считать, что $D \leqslant X^{1-\varepsilon}N_1^{-1}$.

Пусть

$$\tau'_{2k-1}(y) = \sum_{\substack{N_2<n_2\leqslant 2N_2\\ n_2\cdots n_{2k}=y}} \cdots \sum_{N_{2k}<n_{2k}\leqslant 2N_{2k}} c_2(n_2)\ldots c_{2k}(n_{2k}).$$

Разобьем промежуток суммирования $(N_1, 2N_1]$ на промежутки $(H, H+H']$, где $H' = \dfrac{N_1}{e^{\delta(\ln\ln X)^2}}$, $0<\delta<1$ — действительное число. Получим:

$$S \ll$$

$$\ll \sum_{H}^{\exp\{\delta(\ln\ln X)^2\}} \frac{1}{\varphi(D)} \left| \sum_{\chi\neq\chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{H<n_1\leqslant H+H'} c_1(n_1)\chi(n_1) \sum_{\substack{X(H+H')^{-1}<y\leqslant XH^{-1}\\ y\leqslant Xn_1^{-1}}} \chi(y)\tau'_{2k-1}(y) \right|.$$

Заменим условие $y\leqslant Xn_1^{-1}$ на условие $y\leqslant XH^{-1}$ и оценим получившуюся при этом ошибку R_1:

$$R_1 \leqslant \sum_{H}^{\exp\{\delta(\ln\ln X)^2\}} (\sum_{H<n_1\leqslant H+H'} \sum_{\substack{X(H+H')^{-1}<y\leqslant XH^{-1}\\ y\equiv ln_1^{-1} \pmod D}} \tau'_{2k-1}(y) +$$

$$+\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{H<n_1\leqslant H+H'} \sum_{X(H+H')^{-1}<y\leqslant XH^{-1}} \tau'_{2k-1}(y)).$$

Для оценки внутренней суммы первого слагаемого в скобках применим лемму 1.1.5 [1, с. 30], а для оценки внутренней суммы второго слагаемого — ту же лемму, положив в ней $D=1$:

$$R_1 \ll \frac{X}{D}\left(\frac{H'^2}{H^2}\right)\left(\frac{N_1}{H'}\right) \ll \frac{X}{D}e^{-\delta(\ln\ln X)^2}.$$

Получим:

$$S \ll e^{\delta(\ln\ln X)^2} \max_{\chi\neq\chi_0}\{|S_1|\} + O\left(\frac{X}{D}\exp\{-\delta(\ln\ln X)^2\}\right), \tag{4}$$

где

$$S_1 = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi\neq\chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{H<n_1\leqslant H+H'} c_1(n_1)\chi(n_1)\times$$

$$\times \sum_{\substack{N_2<n_2\leqslant 2N_2\\ n_2\dots n_{2k}\leqslant XH^{-1}}} c_2(n_2)\dots \sum_{N_{2k}<n_{2k}\leqslant 2N_{2k}} c_{2k}(n_{2k})\chi(n_2\dots n_{2k}).$$

Введем обозначения:

$$U = N_2N_4\dots N_{2k}, \quad V = N_3N_5\dots N_{2k-1},$$

$$\tau'_k(u) = \sum_{N_2<n_2\leqslant 2N_2} \sum_{\substack{N_4<n_4\leqslant 2N_4\\ n_2n_4\cdots n_{2k}=u}} \cdots \sum_{N_{2k}<n_{2k}\leqslant 2N_{2k}} c_2(n_2)c_4(n_4)\ldots c_{2k}(n_{2k}),$$

$$\tau'_{k-1}(v) = \sum_{N_3<n_3\leqslant 2N_3} \sum_{\substack{N_5<n_5\leqslant 2N_5\\ n_3n_5\cdots n_{2k-1}=v}} \cdots \sum_{N_{2k-1}<n_{2k-1}\leqslant 2N_{2k-1}} c_3(n_3)c_5(n_5)\ldots c_{2k-1}(n_{2k-1}).$$

Заметим, что $V \leqslant U \leqslant N_1V$.

Тогда

$$S_1 = \frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(l) \sum_{H<n_1\leqslant H+H'} c_1(n_1)\chi(n_1) \sum_{\substack{V<v\leqslant 2^{k-1}V\\ uv\leqslant XH^{-1}}} \tau'_{k-1}(v)\chi(v) \sum_{U<u\leqslant 2^kU}\tau'_k(u)\chi(u).$$

Рассмотрим случай $V \leqslant X^{\varepsilon}$. Если $N_1 \leqslant X^{\frac{1}{200}}$, то $U \leqslant VN_1 \leqslant X^{\frac{1}{200}+\varepsilon}$, следовательно, $S_1 \ll X^{\frac{1}{100}+2\varepsilon}$ и, очевидно, утверждение теоремы выполняется.

Если же $N_1 > X^{\frac{1}{200}}$, то $c_1(n_1) = 1$, или $c_1(n_1) = \ln n_1$, поэтому:

$$S_1 \ll \sqrt{D}\ln D \sum_{V<v\leqslant 2^{k-1}V} \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \pmod D} \left| \sum_{U<u\leqslant U_v} \tau'_k(u)\chi(u)\right|,$$

где $U_v = \min\left\{2^kU, \dfrac{X}{Hv}\right\}$.

Применив неравенство Коши, получим:

$$\sigma = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \pmod D} \left| \sum_{U<u\leqslant U_v} \tau'_k(u)\chi(u)\right| \leqslant (\sigma_1)^{1/2},$$

где

$$\sigma_1 = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \pmod D} \left| \sum_{U<u\leqslant U_v} \tau'_k(u)\chi(u)\right|^2.$$

Заметим, что σ_1 равняется числу решений сравнения

$$n_2n_4\ldots n_{2k} \equiv n'_2n'_4\ldots n'_{2k} \pmod D;$$
$$N_2 < n_2,\, n'_2 \leqslant 2\,N_2,\ \ldots,\ N_{2k} < n_{2k},\, n'_{2k} \leqslant 2\,N_{2k}.$$

Число решений этого сравнения не превосходит величины

$$\sum_{U<u\leqslant U_v} \tau_k(u) \sum_{\frac{U-u}{D}<d\leqslant \frac{U_v-u}{D}} \tau_k(u+dD) \ll \sum_{U<u\leqslant U_v} u^{\varepsilon/10} \sum_{\frac{U-u}{D}<d\leqslant \frac{U_v-u}{D}} (u+dD)^{\varepsilon/10} \ll$$
$$\ll X^{\varepsilon/5} \sum_{U<u\leqslant U_v} \left(\frac{U}{D}+1\right) \ll X^{\varepsilon/5}\left(\frac{U^2}{D}+U\right).$$

Отсюда

$$\sigma \ll X^{\varepsilon/10}\left(\frac{U}{\sqrt{D}}+\sqrt{U}\right).$$

Следовательно,

$$S_1 \ll X^{1,2\varepsilon}\left(\frac{U}{\sqrt{D}}+\sqrt{U}\right)\sqrt{D}\ln D.$$

Так как $U^2V \leqslant UVN_1 \leqslant X$, $V \leqslant X^{\varepsilon}$, то $U \ll \sqrt{X^{1+\varepsilon}}$, $\sqrt{UD} \ll X^{1/4}\sqrt{D}$, то $S_1 < \dfrac{X^{1-\varepsilon}}{D}$ при $D \leqslant X^{\frac{1}{2}-2,2\varepsilon}$. Учитывая (4) получаем, что $S < \dfrac{X^{1-\varepsilon}}{D}$ при $D \leqslant X^{\frac{1}{2}-4\varepsilon}$, и для этого случая утверждение теоремы выполняется.

Рассмотрим следующий случай: $V > X^{\varepsilon}$.

Пусть сначала $U \leqslant DX^{\varepsilon}$. Разобьем промежуток суммирования $(V, 2^{k-1}V]$ на промежутки $(W, W+W']$, где $W' = \dfrac{V}{X^{2\varepsilon}}$. Тогда:

$$S_1 \ll$$

$$\ll \sum_{W}^{X^{2\varepsilon}}\left|\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{H<n_1\leqslant H+H'}c_1(n_1)\chi(n_1)\sum_{W<v\leqslant W+W'}\tau'_{k-1}(v)\chi(v)\sum_{\substack{U<u\leqslant 2^kU\\ u\leqslant X(Hv)^{-1}}}\tau'_k(u)\chi(u)\right|.$$

Заменим условие $u \leqslant X(Hv)^{-1}$ на условие $u \leqslant X(HW)^{-1}$ и оценим получившуюся при этом ошибку R_2:

$$R_2 \leqslant \sum_{W}^{X^{2\varepsilon}}\sum_{H<n_1\leqslant H+H'}\sum_{W<v\leqslant W+W'}\tau'_{k-1}(v)\sum_{\substack{X(H(W+W'))^{-1}<u\leqslant X(HW)^{-1}\\ u\equiv ln_1^{-1}v^{-1} \pmod D}}\tau'_k(u)+$$

$$+\sum_{W}^{X^{2\varepsilon}}\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{H<n_1\leqslant H+H'}\sum_{W<v\leqslant W+W'}\tau'_{k-1}(v)\sum_{X(H(W+W'))^{-1}<u\leqslant X(HW)^{-1}}\tau'_k(u) \ll$$

$$\ll \frac{X^{1+3\varepsilon}}{D}\left(\frac{H'}{H}\right)\left(\frac{W'}{W}\right)^2 \ll \frac{X^{1-\varepsilon}}{D}\left(\frac{H'}{H}\right).$$

Получим:

$$S_1 \ll X^{2\varepsilon}\max_{\chi\neq\chi_0}\{|S_2|\} + O\left(\frac{X^{1-\varepsilon}}{D}e^{-\delta(\ln\ln X)^2}\right),$$

$$S \ll X^{3\varepsilon}\max_{\chi\neq\chi_0}\{|S_2|\} + O\left(\frac{X^{1-\varepsilon}}{D}\right),$$

где

$$S_2 = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{H < n_1 \leqslant H+H'} c_1(n_1)\chi(n_1) \sum_{W < v \leqslant W+W'} \tau'_{k-1}(v)\chi(v) \sum_{\substack{U < u \leqslant 2^k U \\ u \leqslant X(HW)^{-1}}} \tau'_k(u)\chi(u).$$

В этом случае $c_1(n_1) = 1$, либо $\ln n_1$, поэтому, применяя неравенство Коши, имеем:

$$S_2 \ll \max_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{H < n_1 \leqslant H+H'} \chi(n_1) \right| \left(\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \pmod D} \left| \sum_{W < v \leqslant W+W'} \tau'_{k-1}(v)\chi(v) \right|^2 \right)^{1/2} \times$$
$$\times \left(\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \pmod D} \left| \sum_{U < u \leqslant 2^k U} \tau'_k(u)\chi(u) \right|^2 \right)^{1/2}.$$

Таким образом,

$$S_2 \ll X^{\varepsilon/5} \sqrt{D} \ln D \left(\frac{U}{\sqrt{D}} + \sqrt{U} \right) \left(\frac{V}{\sqrt{D}} + \sqrt{V} \right) \ll X^{\varepsilon} \sqrt{UVD} \ll X^{2\varepsilon} D^{3/2}.$$

Таким образом, $S < \dfrac{X^{1-\varepsilon}}{D}$ при $D \leqslant X^{\frac{2}{5} - 3\varepsilon}$. Следовательно, утвеждение теоремы выполняется.

Рассмотрим случай $U > DX^{\varepsilon}$.
Разобьем промежуток суммирования $(V, 2^{k-1}V]$ на промежутки $(W, W+W']$, где $W' = \dfrac{V}{e^{\delta(\ln\ln X)^2}}$. Получим:

$$S_1 \ll \sum_{W}^{\exp\{\delta(\ln\ln X)^2\}} \frac{1}{\varphi(D)} \times$$
$$\times \left| \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{H < n_1 \leqslant H+H'} c_1(n_1)\chi(n_1) \sum_{W < v \leqslant W+W'} \tau'_{k-1}(v)\chi(v) \sum_{\substack{U < u \leqslant 2^k U \\ u \leqslant X(Hv)^{-1}}} \tau'_k(u)\chi(u) \right|.$$

Заменим условие $u \leqslant X(Hv)^{-1}$ на условие $u \leqslant X(HW)^{-1}$ и оценим получившуюся при этом ошибку R_2:

$$R_2 \leqslant \sum_{W}^{\exp\{\delta(\ln\ln X)^2\}} \sum_{H<n_1\leqslant H+H'} \sum_{W<v\leqslant W+W'} \tau'_{k-1}(v) \sum_{\substack{X(H(W+W'))^{-1}<u\leqslant X(HW)^{-1} \\ u\equiv ln_1^{-1}v^{-1} \pmod D}} \tau'_k(u)+$$

$$+\sum_{W}^{\exp\{\delta(\ln\ln X)^2\}} \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{H<n_1\leqslant H+H'} \sum_{W<v\leqslant W+W'} \tau'_{k-1}(v) \sum_{X(H(W+W'))^{-1}<u\leqslant X(HW)^{-1}} \tau'_k(u).$$

Применим лемму 1.1.5 [1, с. 30]:

$$R_2 \ll \frac{X}{D}\left(\frac{H'}{H}\right)\left(\frac{W'}{W}\right)^2 \ll \frac{X}{D}e^{-2\delta(\ln\ln X)^2}.$$

Получим:

$$S \ll e^{2\delta(\ln\ln X)^2} \max_{\chi\neq\chi_0}\{|S_2|\} + O\left(\frac{X}{D}e^{-\delta(\ln\ln X)^2}\right), \tag{5}$$

где

$$S_2 = \frac{1}{\varphi(D)}\times$$
$$\times \sum_{\chi\neq\chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{H<n_1\leqslant H+H'} c_1(n_1)\chi(n_1) \sum_{W<v\leqslant W+W'} \tau'_{k-1}(v)\chi(v) \sum_{\substack{U<u\leqslant 2^kU \\ u\leqslant X(HW)^{-1}}} \tau'_k(u)\chi(u).$$

Применяя неравенство Коши, имеем:

$$S_2 \ll \max_{\chi\neq\chi_0}\left|\sum_{H<n_1\leqslant H+H'} c_1(n_1)\chi(n_1)\right| \left(\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi \pmod D}\left|\sum_{W<v\leqslant W+W'}\tau'_{k-1}(v)\chi(v)\right|^2\right)^{1/2}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi \pmod D}\left|\sum_{U<u\leqslant 2^kU}\tau'_k(u)\chi(u)\right|^2\right)^{1/2}.$$

Заметим, что $\sigma_1 = \dfrac{1}{\varphi(D)}\displaystyle\sum_{\chi \pmod D}\left|\sum_{U<u\leqslant 2^kU}\tau'_k(u)\chi(u)\right|^2$ равняется числу решений сравнения

$$n_2n_4\dots n_{2k} \equiv n'_2n'_4\dots n'_{2k} \pmod D;$$
$$N_2 < n_2, n'_2 \leqslant 2\,N_2,\ \dots,\ N_{2k} < n_{2k}, n'_{2k} \leqslant 2\,N_{2k}.$$

Число решений этого сравнения не превосходит величины

$$\sum_{U<u\leqslant 2^kU}\tau_k(u)\sum_{\substack{U<u'\leqslant 2^kU\\ u'\equiv u \pmod D}}\tau_k(u').$$

Для оценки внутренней суммы применим лемму 1.1.5 [1, с. 30], а для оценки внешней суммы — ту же лемму, положив в ней $D=1$. Получим:

$$\sigma_1 \ll \left(\frac{U^2}{D}+U\right)(\ln U)^{2A(k)},$$

$A(k)$ — положительная константа, зависящая от k.

Аналогично оценивается сумма $\dfrac{1}{\varphi(D)}\sum\limits_{\chi(\mathrm{mod}\ D)}\left|\sum\limits_{W<v\leqslant W+W'}\tau'_{k-1}(v)\chi(v)\right|^2$.

Таким образом:

$$S_2 \ll \max_{\chi\neq\chi_0}\left|\sum_{H<n_1\leqslant H+H'}c_1(n_1)\chi(n_1)\right|\left(\frac{U}{\sqrt{D}}+\sqrt{U}\right)\left(\frac{V}{\sqrt{D}}+\sqrt{V}\right).$$

Если $c_1(n_1)=1$ или $c_1(n_1)=\ln n_1$, тогда, оценивая соответствующую сумму согласно леммам 3 или 4, получим:

$$\max_{\chi\neq\chi_0}\left|\sum_{H<n_1\leqslant H+H'}\chi(n_1)\right|\left(\frac{U\sqrt{V}+\sqrt{U}V}{\sqrt{D}}+\sqrt{UV}\right)\ll$$
$$\ll \sqrt{N_1}D^{1/6}\ln D\left(\frac{U\sqrt{V}}{\sqrt{D}}+\sqrt{UV}\right)\ll$$
$$\ll \ln X\left(X^{3/4}D^{-1/3}+X^{1/2}D^{1/6}\right)\ll X^{3/4}D^{-1/3}\ln X,$$
$$\max_{\chi\neq\chi_0}\left|\sum_{H<n_1\leqslant H+H'}\chi(n_1)\right|\frac{UV}{D}\ll\frac{X^{1-\frac{\gamma}{8K^3}}}{D}.$$

Если же $c_1(n_1)=\mu(n_1)$, то, оценивая соответствующую сумму согласно лемме 9, получим:

$$\max_{\chi\neq\chi_0}\left|\sum_{H<n_1\leqslant H+H'}\mu(n_1)\chi(n_1)\right|\left(\frac{U\sqrt{V}}{\sqrt{D}}+\sqrt{UV}+\frac{UV}{D}\right)\ll$$
$$\ll N_1e^{-b_6(\ln\ln D)^2}\left(\frac{U\sqrt{V}}{\sqrt{D}}+\sqrt{UV}+\frac{UV}{D}\right).$$

Выберем $\delta=\dfrac{2}{5}b_6<\dfrac{1}{25}$. Так как, по условию теоремы $D\leqslant X^{\frac{3}{8}}e^{-(\ln\ln X)^2}$, то, учитывая (5) и $(\ln X)^{2k}$, получаем: $R\ll\dfrac{X}{\varphi(D)}e^{-\varkappa(\ln\ln X)^2}$, $\varkappa=\dfrac{1}{6}b_6$.

Из полученной асимптотической формулы преобразованием Абеля приходим к утверждению теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Линник Ю. В. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах. — Издательство ЛГУ, 1961. — 208 с.

[2] Постников А. Г. О сумме характеров по модулю, равному степени простого числа // Изв. АН СССР, Серия математическая. — 1955. — *19*, № 1. — С. 11-16.

[3] Линник Ю. В., Барбан М. Б., Чудаков Н. Г. О простых числах в арифметической прогрессии с разностью, равной степени простого числа //Acta arithm. J. — 1964. — vol.9, № 4. — С. 375-390.

[4] Петечук М. М. Сумма значений функции делителей в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени простого нечетного числа // Изв. АН СССР, Серия математическая. — 1979. — *43*, № 4. — С. 892-908.

[5] Карацуба А. А. Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях // Докл. АН СССР. —1970. — *192*, № 4. — С. 724-727.

[6] Чубариков В. Н. Уточнение границы нулей L-рядов Дирихле по модулю, равному степени простого числа // Вестник Московского университета. — 1973. № 2. — С. 46-52.

[7] Iwaniec H., Kowalsky E. Analytic number theory. — American Mathematical Society, Colloquium Publications, Volume 53, 2004. —615 с.

[8] Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. 2-е изд. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983. — 239 с.

[9] Линник Ю. В. Теория чисел. L-функции и дисперсионный метод. — Ленинград: Наука, 1980. — 373 с.

[10] Прахар К. Распределение простых чисел. — М.: Мир, 1967. — 511 с.

[11] Виноградов А. И. О числах с малыми простыми делителями//Докл. АН СССР, Серия математическая. — 1956. — *19*, № 4. — С. 683-686.

Белгородский государственный университет
Поступило 6.07.2011