Б. В. Годун, О точках гладкости выпуклых тел сепарабельного банахова пространства, *Матем. заметки*, 1985, том 38, выпуск 5, 713–716

https://www.mathnet.ru/mzm5583

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ
т. 38, № 5 (1985)

О ТОЧКАХ ГЛАДКОСТИ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ СЕПАРАБЕЛЬНОГО БАНАХОВА ПРОСТРАНСТВА

Б. В. Годун

Точку x единичной сферы S банахова пространства X называют точкой гладкости, если норма в этой точке дифференцируема по Гато, т. е. для любого $y \in X$ существует предел

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}. \tag{1}$$

Это эквивалентно тому, что в точке x существует единственный опорный функционал $f(x) = \|f\| = 1$ $(f \in X^*)$. Согласно теореме Мазура, точки гладкости сферы всякого сепарабельного банахова пространства образуют плотное подмножество S типа G_δ (см. [1, с. 52]). Кроме того, каждое сепарабельное банахового пространство допускает эквивалентную норму, в которой каждая точка новой единичной сферы будет точкой гладкости [2, с. 25]. Точку $x \in S$ будем называть сохраняющейся точкой гладкости S, если она является точкой гладкости единичной сферы $S_{X^{**}}$ второго сопряженного пространства X^{**} при каноническом вложении X в X^{**}. При этом также говорят, что норма является очень гладкой в точке $x \in S$ (см. [3], [2, с. 30]). Ясно, что если пространство рефлексивно, то каждая точка гладкости его единичной сферы является сохраняющейся. Если норма дифференцируема по Фреше в точке $x \in S$ (т. е. предел в (1) существует равномерно по всем $y \in X$), то x — сохраняющаяся точка гладкости (см. [3], [2, с. 30]). Каждое банахово пространство с сепарабельным сопряженным допускает эквивалентную дифференцируемую по Фреше норму [4], т. е. в такой норме каждая точка новой единичной сферы является сохраняющейся точкой гладкости. Спрашивается, как много сохраняющихся точек гладкости имеют выпуклые, ограниченные, центрально симметричные тела (единичные шары в эквивалентных нормах) сепарабельного банахового пространства? Дословное повторение рассуждений Мазура (см. [1, с. 52]) применительно к пространству X^{**} показывает, что если пространство имеет сепарабельное второе сопряженное, то сохраняющиеся точки гладкости его единичной сферы образуют плотное подмножество S типа G_δ. Однако справедлива следующая

ТЕОРЕМА. *Сепарабельное банахово пространство рефлексивно тогда и только тогда, когда в любой эквивалентной норме каждая точка гладкости его единичной сферы является сохраняющейся.*

Доказательство. Ясно, что в доказательстве нуждается лишь достаточность условия. Допустим, что пространство X не рефлексивно. Само пространство X и его сопряженное будем считать канонически вложенными в свои вторые сопряженные: $X \subset X^{**}$, $X^* \subset X^{(3)}$; при этом $X^{(3)} = X^* \oplus X^\perp$, где $X^\perp$ — аннулятор подпространства $X \subset X^{**}$ в $X^{(3)}$. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — плотное подмножество единичной сферы X. Рассмотрим отображение T: $X^* \to l_2$, определенное правилом $T(f) = \{2^{-n} \cdot f(x_n)\}_{n=1}^\infty$, $f \in X^*$, и пусть $\varphi(f) = \| T(f) \|_{l_2}$. Рассмотрим расширяющуюся последовательность множеств $A_k = \{f \in X^* : \| f \| \leqslant k \cdot \varphi(f)\}$, $k = 1, 2, \ldots$ Поскольку последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ плотна в единичной сфере X, то $\varphi(f) > 0$ для любого $f \in X^*$. Следовательно, $X^* = \bigcup_k A_k$ и для некоторого k множество A_k не пусто. Возьмем $\varepsilon = 1/(2(k+1))$ и определим на пространстве X^* эквивалентную норму

$$||| f ||| = \max \{\varepsilon \cdot \| f \|, \varphi(f)\} + \varphi(f), \qquad f \in X^*. \qquad (2)$$

Поскольку функционал $\varphi(f)$, очевидно, слабо* полунепрерывен снизу, то в этой норме единичный шар пространства X^* слабо* замкнут и, значит, эта норма является двойственной к некоторой эквивалентной норме $||| \cdot |||$ на X (см. [2, с. 83]). Покажем, что единичный шар пространства $(X, |||\cdot|||)$ имеет несохраняющуюся точку гладкости.

Пусть $g \in A_k$, $|||g||| = 1$. Так как по теореме Бишопа — Фелиса [2] функционалы, достигающие нормы, плотны в единичной сфере X^*, то мы можем выбрать функционал $f \in X^*$, достигающий своей нормы и столь близкий к g, чтобы $f \in A_{k+1}$. Пусть f достигает своей нормы на элементе $x \in X$:

$$f(x) = |||f||| = |||x||| = 1.$$

Заметим, что за счет второго слагаемого в (2) единичный шар пространства $(X^*, |||\cdot|||)$ не содержит прямолинейных отрезков (строго выпуклый). Отсюда следует, что каждая точка единичной сферы пространства $(X, |||\cdot|||)$, и, в частности, элемент x, является точкой гладкости. Покажем, что элемент x не является точкой гладкости сферы пространства $(X^{**}, |||\cdot|||)$. Докажем вспомогательное утверждение.

ЛЕММА. *Третья сопряженная к норме $|||\cdot|||$ на X имеет вид*

$$|||\Phi||| = \max\{\varepsilon\|\Phi\|, \varphi(\Phi)\} + \varphi(\Phi), \Phi \in X^{(3)},$$

где

$$\varphi(\Phi) = \left(\sum_n 2^{-n}|\Phi(x_n)|^2\right)^{1/2},$$

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X \subset X^{**}.$$

Доказательство. Рассмотрим пространство $E = ((E_1 \oplus l_2)_{c_0} \oplus l_2)_{l_1}$, где $E_1 = (X^*, \varepsilon\|\cdot\|)$, и пусть $Y = \{(f, T(f), T(f)) \colon f \in X^*\} \subset E$. Ввиду непрерывности оператора T Y — замкнутое подпространство в E, изометричное пространству $(X^*, |||\cdot|||)$. Следовательно,

$$(X^{(3)}, |||\cdot|||) \equiv Y^{**} = \{(\Phi, T^{**}(\Phi), T^{**}(\Phi)) \colon \Phi \in X^{(3)}\} \subset$$
$$\subset E^{**} = ((E_1^{**} \oplus l_2)_{c_0} \oplus l_2)_{l_1},$$

т. е.

$$|||\Phi||| = |||(\Phi, T^{**}(\Phi), T^{**}(\Phi))|||_{E^{**}} =$$
$$= \max\{\varepsilon\|\Phi\|, \|T^{**}(\Phi)\|_{l_2}\} + \|T^{**}(\Phi)\|_{l_2}.$$

Вернемся к доказательству теоремы. Зафиксируем функционал $\Phi \in X^{\perp} \subset X^{(3)}$ и выберем $\delta > 0$ столь малым, чтобы $\|\delta\Phi + f\| \leqslant 2\|f\|$. Поскольку $f \in A_{k+1}$, то $\|\delta\Phi + f\| \leqslant 2(k+1)\cdot\varphi(f)$. Так как $\Phi \in X^{\perp}$, то $\Phi(x_n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, и, значит, $\varphi(\delta\Phi + f) =$

$= \varphi(f)$. В силу леммы имеем

$$|||\,\delta\Phi + f\,||| = \max\,\{\varepsilon\,\|\,\delta\Phi + f\,\|\,, \varphi(\delta\Phi + f)\} + \varphi(\delta\Phi + f) \leqslant \max\,\{\varepsilon\cdot 2\,(k+1)\,\varphi(f),\ \ \varphi(f)\} + \varphi(f) \leqslant \leqslant \varphi(f) + \varphi(f) \leqslant |||\,f\,||| = 1.$$

С другой стороны, так как $\Phi(x) = 0$, то $\delta\Phi + f$ — опорный функционал к точке $x \in X^{**}$:

$$\langle \delta\Phi + f, x\rangle = f(x) = 1 = |||\,x\,|||\,.$$

Таким образом, в точке $x \in X^{**}$ имеется два опорных функционала $f \in X^{*} \subset X^{(3)}$ и $\delta\Phi + f \in X^{(3)}$, т. е. x не является точкой гладкости единичной сферы пространства $(X^{**},\ |||\cdot|||)$.

Харьковский институт
инженеров коммунального строительства

Поступило
16.05.84

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Фелпс Р. Лекции о теоремах Шоке. —М.: Мир, 1968.
[2] Дистель Д. Геометрия банаховых пространств.— Киев: Высшая школа, 1980.
[3] Giles J. On smottheness on the Banach space imbeding.— Bull. Austral. Math. Soc., 1975, v. 13, № 1, p. 69—74.
[4] Кадец М. И. Условия дифференцируемости нормы банахова пространства.— Успехи мат. наук, 1965, т. 20, № 3, с. 183—186.