

где мы использовали тот факт, что $|M| > 0$ в силу (21).

Теперь докажем неравенство $dV/d\Delta I < 0$. Дифференцируя $V(x, x_2^{**}, \delta_2^{**}; I_2 + \phi\Delta I)$ по ΔI , получаем, что

$$\frac{dV(x, x_2^{**}, \delta_2^{**}; I_2 + \phi\Delta I)}{d\Delta I} = \frac{\partial V}{\partial x_2^{**}} \frac{dx_2^{**}}{d\Delta I} + \frac{\partial V}{\partial \delta_2^{**}} \frac{d\delta_2^{**}}{d\Delta I} + \frac{\partial V}{\partial \Delta I} = \frac{\partial V}{\partial \Delta I} = - \left(\frac{x}{x_2^{**}} \right)^\beta \phi < 0,$$

где при выводе второго равенства использована так называемая охватывающая теорема.

Мы выражаем признательность анонимному рецензенту за полезные комментарии и советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dixit A. K., Pindyck R. S.* Investment under Uncertainty. Princeton: Princeton Univ. Press, 1994, 488 p.
2. *Grenadier S. R., Wang N.* Investment timing, agency, and information. — J. Financial Economics, 2005, v. 75, № 3, p. 493–533.
3. *Laffont J. J., Martimort D.* The Theory of Incentives: The Principal-Agent Model. Princeton: Princeton Univ. Press, 2002, 440 p.
4. *Nishihara M., Shibata T.* The agency problem between the owner and the manager in real investment: The bonus-audit relationship. — Oper. Res. Lett., 2008, v. 36, № 3, p. 291–296.
5. *Shibata T.* Investment timing, asymmetric information, and audit structure: A real options framework. — J. Econom. Dynam. Control, 2009, v. 33, № 4, p. 903–921.
6. *Shibata T., Nishihara M.* Interaction between investment timing and management effort under asymmetric information: Costs and benefits of privatized firms. — European J. Oper. Res., 2011, v. 215, № 3, p. 688–696.

Поступила в редакцию
7.XII.2014

Исправленный вариант
8.IX.2015

© 2016 г.

ПАВЛОВ И. В.*, ШАМРАЕВА В. В.*,
ЦВЕТКОВА И. В.*

О СУЩЕСТВОВАНИИ МАРТИНГАЛЬНЫХ МЕР, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ОСЛАБЛЕННОМУ УСЛОВИЮ НЕСОВПАДАНИЯ БАРИЦЕНТРОВ, В СЛУЧАЕ СЧЕТНОГО ВЕРОЯТНОСТНОГО ПРОСТРАНСТВА¹⁾

Для статических (B, S) -рынков со счетным числом состояний изучается специальное интерполяционное свойство мартингалных мер, дающее возможность преобразовать неполные безарбитражные рынки в полные. Получены достаточные условия на параметры рынка, обеспечивающие существование таких мартингалных мер.

Ключевые слова и фразы: специальная хааровская фильтрация, (B, S) -рынок, безарбитражность, полнота, мартингалная мера, хааровская интерполяция мартингала, ослабленное условие несовпадения барицентров.

* Кафедра высшей математики, Ростовский государственный строительный университет, Ростов-на-Дону, Россия; e-mail: pavloviv2005@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 16-01-00184а и 16-07-00888а).

1. Введение. Рассмотрим статический (B, S) -рынок, заданный на $\{\Omega, \mathbf{F}\}$, где $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ — одношаговая фильтрация, причем $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$, а \mathcal{F}_1 порождена разбиением Ω на счетное число атомов B_i , $i \in \mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$. Обозначим $Z = (Z_k, \mathcal{F}_k)_{k=0}^1$ \mathbf{F} -адаптированный случайный процесс, который мы мыслим как дисконтированную стоимость акции ($Z_0 = a$, $Z_1(B_i) = b_i$, $i \in \mathbf{N}$).

Далее будем отождествлять P с вектором (p_1, p_2, \dots) , где $p_i = P(B_i)$, и рассматривать только вероятностные меры $P = (p_1, p_2, \dots)$ со строго положительными компонентами (т.е. невырожденные вероятностные меры). Обозначим $\mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$ множество невырожденных мартигальных мер P рассматриваемого (B, S) -рынка, совпадающее с множеством решений системы

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1, \\ \sum_{i=1}^{\infty} b_i p_i = a, \\ p_i > 0, \quad i \in \mathbf{N}. \end{cases} \quad (1)$$

Будем предполагать, что $\inf_i b_i < a < \sup_i b_i$. Это условие гарантирует разрешимость системы (1) и, следовательно, безарбитражность данного финансового рынка. Неполнота этого рынка очевидна.

Для перехода от неполных рынков к полным используют специальное интерполяционное свойство меры $P \in \mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$ (см. [1], где оно названо ОСУХЕ — ослабленным свойством универсальной хааровской единственности). Пусть $\{k_1, \dots, k_n, \dots\}$ — некоторая перестановка последовательности $N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$. Рассмотрим следующую фильтрацию с бесконечным горизонтом:

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{F}_0, \quad \mathcal{H}_1 = \sigma\{B_{k_1}\}, \dots, \quad \mathcal{H}_n = \sigma\{B_{k_1}, B_{k_2}, \dots, B_{k_n}\}, \dots, \quad \mathcal{H}_\infty = \mathcal{F}_1.$$

Она называется специальной хааровской фильтрацией, интерполирующей фильтрацию \mathbf{F} . Для $P \in \mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$ рассмотрим мартигал Дирихле $Y_n := \mathbf{E}^P[Z_1 | \mathcal{H}_n]$. Очевидно, что $Y_0 = Z_0$, $Y_\infty = Z_1$. Процесс $\mathbf{Y} = (Y_n, \mathcal{H}_n)_{n=0}^\infty$ называется специальной хааровской интерполяцией процесса \mathbf{Z} .

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $P \in \mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$. Если для любой перестановки $\{k_1, \dots, k_n, \dots\}$ последовательности $\{1, 2, \dots, n, \dots\}$ процесс $\mathbf{Y} = (Y_n, \mathcal{H}_n)_{n=0}^\infty$ допускает единственную мартигальную меру (этой мерой будет исходная мера P), то будем говорить, что P удовлетворяет специальному интерполяционному свойству.

В [2] показано, что специальное интерполяционное свойство равносильно следующему аналитическому условию — ослабленному условию несовпадения барицентров (ОУНБ).

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что мартигальная мера $P = (p_1, p_2, \dots)$ удовлетворяет ОУНБ, если для любого $i \in \mathbf{N}$ и для любого набора индексов $J \subset \mathbf{N}$, не содержащего i и такого, что дополнение $\bar{J} = N \setminus J$ конечно, выполняется неравенство

$$b_i \neq \frac{\sum_{j \in J} b_j p_j}{\sum_{j \in J} p_j}. \quad (2)$$

Множество мартигальных мер процесса Z , удовлетворяющих ОУНБ, обозначим $\text{ОУНБ}(Z)$.

З а м е ч а н и е 1. Пусть $a \neq 0$ и b — произвольные действительные числа. Тогда $\mathcal{P}(aZ + b, \mathbf{F}) = \mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$ и $\text{ОУНБ}(aZ + b) = \text{ОУНБ}(Z)$.

Положим в неравенстве (2) $J = N \setminus \{i\}$. Тогда это неравенство будет равносильно следующему:

$$b_i \neq \frac{a - b_i p_i}{1 - p_i} \Leftrightarrow b_i \neq a.$$

2) компоненты x_l, x_n и x_s иррациональны (s — произвольный фиксированный индекс, $s \neq l, n$), остальные компоненты решения рациональны, числа x_k ($k \neq l, n$) сколь угодно малы.

Преобразуем неравенства (2) к более удобному виду. Обозначим для любого k ($1 \leq k \leq r$) конечные множества

$$J_k = \bar{J} \cap \{r(j-1) + k, 1 \leq j < m_k + 1\}. \quad (6)$$

Тогда (2) равносильно неравенствам

$$b_i \neq \frac{a - \sum_{k=1}^r b_k \sum_{j \in J_k} p_j}{1 - \sum_{k=1}^r \sum_{j \in J_k} p_j} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^r (b_i - b_k) \sum_{j \in J_k} p_j \neq b_i - a. \quad (7)$$

Легко видеть, что при $i = 1$ и $i = r$ последнее неравенство выполняется автоматически. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Мартигальная мера P удовлетворяет ОУНБ тогда и только тогда, когда для любого i ($2 \leq i \leq r-1$) выполняются неравенства (7), где J_k — произвольные конечные множества, удовлетворяющие (6) (множества J_k могут быть пустыми).*

Непустота ОУНБ(Z) в случае $r = 3$. При $r = 3$ общее решение системы (5) имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_3 - a}{b_3 - b_1} - \frac{b_3 - b_2}{b_3 - b_1} x_2, \\ x_3 = \frac{a - b_1}{b_3 - b_1} - \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1} x_2, \end{cases} \quad (8)$$

где $0 < x_2 < (a - b_1)/(b_2 - b_1)$, если $b_1 < a < b_2$, и $0 < x_2 < (b_3 - a)/(b_3 - b_2)$, если $b_2 < a < b_3$. Записав представления $x_1 = \sum_{j=1}^{m_1} p_{3j-2}$, $x_2 = \sum_{j=1}^{m_2} p_{3j-1}$, $x_3 = \sum_{j=1}^{m_3} p_{3j}$ (положительные числа p_{3j-2} , p_{3j-1} , p_{3j} произвольны) для любого фиксированного решения (x_1, x_2, x_3) из (8), получаем описание общего решения системы (3).

Применяя лемму 2, получаем, что $P \in \text{ОУНБ}(Z)$ тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$(b_2 - b_1) \sum_{J_1} p_j - (b_3 - b_2) \sum_{J_3} p_j \neq b_2 - a, \quad (9)$$

где $J_1 \subset \{3j - 2, j < m_1 + 1\}$ и $J_3 \subset \{3j, j < m_3 + 1\}$ — произвольные конечные множества.

Теорема А. *Пусть $b_1 < a < b_2 < b_3$ или $b_1 < b_2 < a < b_3$. Тогда $\text{ОУНБ}(Z) \neq \emptyset$.*

Доказательство. Сначала построим некоторую невырожденную мартигальную меру P , а затем докажем, что она удовлетворяет ОУНБ.

Шаг 1. Докажем, что существует решение (8) такое, что

$$x_1 > \frac{b_2 - a}{b_2 - b_1} \quad (10)$$

и

$$x_3 > \frac{a - b_2}{b_3 - b_2}. \quad (11)$$

Если $b_1 < a < b_2 < b_3$, то непосредственно проверяется, что $(b_3 - a)/(b_3 - b_1) > (b_2 - a)/(b_2 - b_1)$. Из первого неравенства системы (8) вытекает, что при достаточно малых x_2 выполняется неравенство (10), а неравенство (11) выполняется тривиально. Точно так же, если $b_1 < b_2 < a < b_3$, то легко видеть, что $(a - b_1)/(b_3 - b_1) > (a - b_2)/(b_3 - b_2)$. Из второго неравенства системы (8) вытекает, что при достаточно малых x_2 выполняется неравенство (11), а неравенство (10) выполняется тривиально. Таким образом, решение (8) с нужными свойствами существует. Обозначим (x_1, x_2, x_3) одно из таких решений и зафиксируем его.

Шаг 2. Фиксируем константы $C_1 > 0$ и $C_3 > 0$ такие, что

$$x_1 > \frac{C_1}{b_2 - b_1} > \frac{b_2 - a}{b_2 - b_1}, \quad x_3 > \frac{C_3}{b_3 - b_2} > \frac{a - b_2}{b_3 - b_2}.$$

Шаг 3. Находим такие $\delta_1 > 0$ и $\delta_3 > 0$, что выполняются неравенства

$$x_1 - \delta_1 > \frac{C_1}{b_2 - b_1} > \frac{b_2 - a}{b_2 - b_1}, \quad (12)$$

$$\delta_1 < \frac{|b_2 - a|}{b_2 - b_1}, \quad (13)$$

$$x_3 - \delta_3 > \frac{C_3}{b_3 - b_2} > \frac{a - b_2}{b_3 - b_2}, \quad (14)$$

$$\delta_3 < \frac{|a - b_2|}{b_3 - b_2}, \quad (15)$$

$$(b_2 - b_1)\delta_1 + (b_3 - b_2)\delta_3 < |b_2 - a|, \quad (16)$$

$$\delta_1 < \frac{C_3 - (a - b_2)}{b_2 - b_1}, \quad (17)$$

$$\delta_3 < \frac{C_1 - (b_2 - a)}{b_3 - b_2}. \quad (18)$$

Шаг 4. Если $(b_2 - b_1)/(b_3 - b_2)$ иррационально, то выбираем δ_1 и δ_3 рациональными. Если $(b_2 - b_1)/(b_3 - b_2)$ рационально, то выбираем δ_1 рациональным, а δ_3 — иррациональным.

Шаг 5. Полагаем $p_1 = x_1 - \delta_1$, а (при $j \geq 2$) $p_{3j-2} = \delta_1 r_j^{(1)}$, где $r_j^{(1)}$ — произвольные положительные рациональные числа такие, что $\sum_{j=1}^{m_1} r_j^{(1)} = 1$. Точно так же полагаем $p_3 = x_3 - \delta_3$, а (при $j \geq 2$) $p_{3j} = \delta_3 r_j^{(3)}$, где $r_j^{(3)}$ — произвольные положительные рациональные числа такие, что $\sum_{j=1}^{m_3} r_j^{(3)} = 1$. Наконец, пусть при $j \geq 1$ положительные числа p_{3j-1} удовлетворяют условию $\sum_{j=1}^{m_2} p_{3j-1} = 1$.

Итак, мы получили невырожденную вероятностную меру P . Покажем, что она удовлетворяет неравенствам (9).

Случай 1: $J_1 = \emptyset, J_3 = \emptyset$. Неравенство (9) очевидно.

Случай 2: $J_1 \neq \emptyset, J_3 = \emptyset$. Неравенство (9) перепишем в виде

$$(b_2 - b_1) \sum_{J_1} p_j \neq b_2 - a \iff \sum_{J_1} p_j \neq \frac{b_2 - a}{b_2 - b_1}. \quad (19)$$

Если $b_2 < a < b_3$, то неравенство (19) очевидно. Пусть $b_1 < a < b_2$. Если $1 \in J_1$, то из (12) следует

$$\sum_{J_1} p_j \geq x_1 - \delta_1 > \frac{b_2 - a}{b_2 - b_1},$$

а если $1 \notin J_1$, то из (13) вытекает

$$\sum_{J_1} p_j \leq \delta_1 < \frac{b_2 - a}{b_2 - b_1}.$$

Случай 3: $J_1 = \emptyset, J_3 \neq \emptyset$. Рассуждения проводятся, как в случае 2, но с использованием неравенств (14) и (15).

Случай 4: $J_1 \neq \emptyset, J_3 \neq \emptyset$. Если $1 \notin J_1, 3 \notin J_3$, то

$$\left| (b_2 - b_1) \sum_{J_1} p_j - (b_3 - b_2) \sum_{J_3} p_j \right| \leq (b_2 - b_1)\delta_1 + (b_3 - b_2)\delta_3 < |b_2 - a|,$$

что следует из неравенства (16). Если $1 \in J_1$, $3 \notin J_3$, то, используя неравенства (12) и (18), получаем

$$\begin{aligned} (b_2 - b_1) \sum_{J_1} p_j - (b_3 - b_2) \sum_{J_3} p_j &= (b_2 - b_1) \left(x_1 - \delta_1 + \sum_{J_1 \setminus \{1\}} p_j \right) - (b_3 - b_2) \sum_{J_3} p_j \\ &\geq (b_2 - b_1)(x_1 - \delta_1) - (b_3 - b_2)\delta_3 > (b_2 - b_1) \frac{C_1}{b_2 - b_1} - (b_3 - b_2) \frac{C_1 - (b_2 - a)}{b_3 - b_2} \\ &= C_1 - C_1 + (b_2 - a) = b_2 - a. \end{aligned}$$

Если $1 \notin J_1$, $3 \in J_3$, то

$$\begin{aligned} (b_2 - b_1) \sum_{J_1} p_j - (b_3 - b_2) \sum_{J_3} p_j &= (b_2 - b_1) \sum_{J_1} p_j - (b_3 - b_2) \left(x_3 - \delta_3 + \sum_{J_3 \setminus \{3\}} p_j \right) \\ &\leq \delta_1 - (b_3 - b_2)(x_3 - \delta_3) < (b_2 - b_1) \frac{C_3 - (a - b_2)}{b_2 - b_1} - (b_3 - b_2) \frac{C_3}{b_3 - b_2} \\ &= C_3 - (a - b_2) - C_3 = b_2 - a \end{aligned}$$

(здесь использовались неравенства (14) и (17)).

Пусть, наконец, $1 \in J_1$, $3 \in J_3$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} (b_2 - b_1) \sum_{J_1} p_j - (b_3 - b_2) \sum_{J_3} p_j &= b_2 - a \\ &\iff (b_2 - b_1)(x_1 - \delta'_1) - (b_3 - b_2)(x_3 - \delta'_3) \neq b_2 - a \\ &\iff -(b_2 - b_1)\delta'_1 + (b_3 - b_2)\delta'_3 \neq 0, \end{aligned}$$

где $\delta'_1 \geq 0$ и $\delta'_3 \geq 0$. Одновременное равенство нулю δ'_1 и δ'_3 невозможно: это бы означало, что $m_1 < \infty$ и $m_3 < \infty$, что, в свою очередь, противоречит предположению о наличии среди чисел m_1 , m_2 и m_3 по крайней мере двух бесконечностей. Если одно из чисел δ'_1 и δ'_3 равно нулю, а другое строго больше нуля, то (9) выполняется тривиально. Остается рассмотреть ситуацию, когда $\delta'_1 > 0$ и $\delta'_3 > 0$. В этом случае (9) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\frac{\delta'_3}{\delta'_1} \neq \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_2}. \quad (20)$$

Итак, имеем

$$\begin{aligned} (b_2 - b_1) \sum_{J_1} p_j - (b_3 - b_2) \sum_{J_3} p_j &= (b_2 - b_1) \left(x_1 - \delta_1 + \sum_{J_1 \setminus \{1\}} p_j \right) - (b_3 - b_2) \left(x_3 - \delta_3 + \sum_{J_3 \setminus \{3\}} p_j \right) \\ &= (b_2 - b_1) \left(x_1 - \delta_1 \left(1 - \sum_{J_1 \setminus \{1\}} r_j^{(1)} \right) \right) - (b_3 - b_2) \left(x_3 - \delta_3 \left(1 - \sum_{J_3 \setminus \{3\}} r_j^{(3)} \right) \right). \end{aligned}$$

Обозначим $\delta'_1 = \delta_1 (1 - \sum_{J_1 \setminus \{1\}} r_j^{(1)})$, $\delta'_3 = \delta_3 (1 - \sum_{J_3 \setminus \{3\}} r_j^{(3)})$. Имеем

$$\frac{\delta'_3}{\delta'_1} = \frac{\delta_3 (1 - \sum_{J_3 \setminus \{3\}} r_j^{(3)})}{\delta_1 (1 - \sum_{J_1 \setminus \{1\}} r_j^{(1)})}.$$

Так как выражения в скобках в числителе и знаменателе рациональны, то, принимая во внимание выбор чисел δ_1 и δ_3 , описанный в шаге 4, получаем неравенство $\delta'_3/\delta'_1 \neq (b_2 - b_1)/(b_3 - b_2)$, что доказывает выполнение (9) и в этом случае.

Теорема 1 полностью доказана.

З а м е ч а н и е 2. В [3] доказано, что в случае $b_1 < a < b_2 < b_3$ при $m_1 = 1$, $m_2 = m_3 = \infty$, и в случае $b_1 < b_2 < a < b_3$ при $m_1 = m_2 = \infty$, $m_3 = 1$ справедливо равенство $\text{ОУНБ}(Z) = \mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$. В то же время из результатов работы [2] вытекает, что в остальных случаях $\text{ОУНБ}(Z)$ строго вложено в $\mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$.

Достаточные условия непустоты $\text{ОУНБ}(Z)$ в случае $3 < r < \infty$. Прежде всего сделаем следующее замечание, которое мы будем использовать в процессе доказательства теоремы В.

З а м е ч а н и е 3. Пусть $0 < x_k < 1$ ($m_k = \infty$) и $d > 1$ — натуральное число. В доказательстве двух следующих предложений мы будем использовать d -адическое представление вида: $x_k = \sum_{i=1}^{\infty} (t_i^{(k)}/d^i)$, где натуральные числа $t_i^{(k)}$ могут принимать значение $0, 1, 2, \dots, d - 1$. Хорошо известно, что для любого такого x_k существует представление указанного вида, в котором ряд $\sum_{i=1}^{\infty} (t_i^{(k)}/d^i)$ содержит бесконечное число строго положительных членов. Именно такие представления мы будем рассматривать. В качестве компонент $p_{(j-1)r+k}$ ($1 \leq j < \infty$) мы выберем j -й ненулевой член ряда $\sum_{i=1}^{\infty} (t_i^{(k)}/d^i)$.

Теорема В. Пусть числа $b_1 < b_2 < \dots < b_r$ рациональны, a — действительное число, $b_1 < a < b_r$, $a \neq b_k$ ($k = 2, 3, \dots, r - 1$). Тогда $\text{ОУНБ}(Z) \neq \emptyset$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала рассмотрим случай, когда число a иррационально. Ясно, что существуют такие индексы l, n ($1 \leq l < n \leq r$), что $m_l = m_n = \infty$. Зафиксируем решение (x_1, x_2, \dots, x_r) системы (5) из первой части леммы 1 (координаты x_k ($k \neq l, n$) рациональны).

Если k таково, что $m_k = \infty$, то представим x_k в виде $x_k = \sum_{i=1}^{\infty} t_i^{(k)}/2^i$, где $t_i^{(k)} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$. Определяем $p_{(j-1)r+k}$ ($1 \leq j < \infty$), как это описано в замечании 3 (таким образом, все эти числа рациональны). Если k таково, что $m_k < \infty$ (в этом случае $k \neq l, n$), то полагаем $p_{(j-1)r+k} = x_k/m_k$ ($1 \leq j \leq m_k$). Так как координаты x_k рациональны при $m_k < \infty$, то и соответствующие числа $p_{(j-1)r+k}$ рациональны.

Итак, мы построили невырожденную мартингалльную меру P . Покажем, что $P \in \text{ОУНБ}(Z)$.

Так как в (7) все множества J_k ($1 \leq k \leq r$) конечны, то ясно, что левые части этих соотношений рациональны, в то время как правые — иррациональны. Таким образом, неравенства (7) выполняются, т.е. построенная мера P удовлетворяет ОУНБ и теорема В в случае иррационального a доказана.

Теперь рассмотрим случай, когда число a рационально. Принимая во внимание замечание 1, можно считать, что числа b_k , $k = 1, 2, \dots, r$, и a — целые.

1) Предположим, что существуют такие индексы l и n ($1 \leq l < n \leq r$), что $m_l = m_n = \infty$ и $b_l < a < b_n$. Зафиксируем решение (x_1, x_2, \dots, x_r) системы (5), являющееся решением 1-го типа. Так как

$$\sum_{\substack{k=1, \\ k \neq l, n}}^r |b_i - b_k| \sum_{J_k} p_j \leq \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq l, n}}^r |b_i - b_k| x_k,$$

будем считать компоненты x_k ($k \neq l, n$) настолько малыми, что для всех i ($1 \leq i \leq r$) выполняются неравенства

$$\left| \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq l, n}}^r (b_i - b_k) \sum_{J_k} p_j \right| < |b_i - a|. \tag{21}$$

Для индексов k ($k \neq l, n$) поступим так же, как в предыдущей части доказательства. Следовательно, для индексов k таких, что $m_k = \infty$, $\sum_{J_k} p_j = C_k/2^{\gamma_k}$, где C_k, γ_k — некоторые неотрицательные целые числа ($k \neq l, n$, $0 \leq C_k < 2^{\gamma_k}$, C_k и γ_k зависят от J_k). Для индексов k таких, что $m_k < \infty$, положим $x_k = C'_k/C''_k$, где C'_k, C''_k —

положительные целые числа. Тогда $\sum_{J_k} p_j = |J_k| C'_k / (C''_k \cdot m_k)$, где $|J_k|$ — число элементов множества J_k . Зададим простое число $d_l > b_r - b_1$ настолько большим, что

$$d_l > \max_{\substack{1 \leq k \leq r \\ m_k < \infty}} \{C''_k + m_k\},$$

и простое число $d_n > d_l$. Теперь представим $x_l = \sum_{i=1}^{\infty} t_i^{(l)} / d_l^i$, $x_n = \sum_{i=1}^{\infty} t_i^{(n)} / d_n^i$ и зададим $p_{(j-1)r+l}$, $p_{(j-1)r+n}$ ($1 \leq j < \infty$), как описано в замечании 3. Ясно, что

$$\sum_{J_l} p_j = \frac{C_l}{d_l^{\gamma_l}} \quad (0 \leq C_l < d_l^{\gamma_l}, C_l \text{ и } \gamma_l \text{ зависят от } J_l),$$

$$\sum_{J_n} p_j = \frac{C_n}{d_n^{\gamma_n}} \quad (0 \leq C_n < d_n^{\gamma_n}, C_n \text{ и } \gamma_n \text{ зависят от } J_n).$$

Итак, мы построили невырожденную мартингальную меру P . Проверим выполнение для нее неравенств (7).

Если $J_l = \emptyset$, $J_n = \emptyset$, то неравенства (7) вытекают из неравенств (21).

Если $J_l \neq \emptyset$, $J_n = \emptyset$, то неравенства (7) равносильны неравенствам

$$\frac{(b_i - b_l) \cdot C_l}{d_l^{\gamma_l}} \neq b_i - a - \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq l, n}}^r (b_i - b_k) \sum_{J_k} p_j. \quad (22)$$

Пусть $i \neq l$. Из условий на d_l вытекает, что в левой части стоит несократимая рациональная дробь. Если в правой части произвести алгебраические действия и полученную рациональную дробь сократить, то в несократимой дроби в знаменателе не может содержаться сомножитель d_l . Поэтому неравенства (22), а следовательно, и (7) выполняются. Если $i = l$, то (22) следует из (21).

Случай $J_l = \emptyset$, $J_n \neq \emptyset$ рассматриваются аналогично предыдущему.

Пусть $J_l \neq \emptyset$, $J_n \neq \emptyset$. Неравенства (7) равносильны неравенствам

$$\frac{(b_i - b_n) C_n}{d_n^{\gamma_n}} \neq b_i - a - \frac{(b_i - b_l) C_l}{d_l^{\gamma_l}} - \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq l, n}}^r (b_i - b_k) \sum_{J_k} p_j. \quad (23)$$

Рассуждая так же, как и в случае $J_l \neq \emptyset$, $J_n = \emptyset$, получаем, что неравенство (23) выполнено.

Таким образом, построенная мартингальная мера P удовлетворяет ОУНБ.

2) Если не выполняется предположение 1) в предыдущей части доказательства, то существуют такие индексы l и n , что $b_l < a < b_n$ и среди чисел m_l и m_n одно бесконечно, а другое конечно. Не нарушая общности, можно считать, что $m_l = \infty$, а $m_n < \infty$.

Зафиксируем решение 2-го типа системы (5) из второй части леммы 1, такое, что выполняется неравенство (21). Для индексов k ($k \neq l, n$) поступим так же, как в предыдущей части доказательства. Так же, как и ранее, выбираем простое число d_l , представляем $x_l = \sum_{i=1}^{\infty} t_i^{(l)} / d_l^i$ и задаем $p_{(j-1)r+l}$. Наконец, полагаем $p_{(j-1)r+n} = x_n / m_n$, $1 \leq j \leq m_n$. Покажем, что полученная невырожденная мартингальная мера P удовлетворяет неравенствам (7).

Случай $J_l = \emptyset$, $J_n = \emptyset$ и $J_l \neq \emptyset$, $J_n = \emptyset$ рассматриваются так же, как и в предыдущей части доказательства. Пусть $J_l = \emptyset$, $J_n \neq \emptyset$. Тогда (7) равносильно неравенствам

$$\frac{(b_i - b_n) \cdot |J_n| \cdot x_n}{m_n} \neq b_i - a - \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq l, n}}^r (b_i - b_k) \sum_{J_k} p_j. \quad (24)$$

При $i \neq n$ это неравенство выполняется, так как число, стоящее в левой части, иррационально, а в правой рационально. При $i = n$ неравенство (24) вытекает из (21).

Пусть $J_l \neq \emptyset$, $J_n \neq \emptyset$. Неравенства (7) равносильны неравенствам

$$\frac{(b_i - b_n) \cdot |J_n| \cdot x_n}{m_n} \neq b_i - a - \frac{(b_i - b_l)C_l}{d_l^{\gamma_l}} - \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq l, n}}^r (b_i - b_k) \sum_{J_k} p_j. \quad (25)$$

Рассуждая, как и ранее, показываем, что неравенства (25) справедливы. Таким образом, построенная мартингальная мера P удовлетворяет ОУНБ.

Теорема В полностью доказана.

З а м е ч а н и е 4. Теорема В является далеко не окончательным результатом в описании (В,S)-рынков, на которых существуют мартингальные меры, удовлетворяющие ОУНБ. По мнению авторов настоящей работы, если $4 \leq r < \infty$, $b_1 < b_2 < \dots < b_r$, $b_1 < a < b_r$ и a не совпадает ни с одним b_k , то мартингальные меры, удовлетворяющие ОУНБ, всегда существуют. Однако в настоящее время даже для случая $r = 4$ авторы не имеют доказательства этого факта.

Авторы выражают глубокую благодарность академику РАН А.Н.Ширяеву за важные замечания, которые были использованы в данной статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данежянц А. Г., Павлов И. В. Об ослабленном свойстве универсальной хааровской единственности. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2004, т. 11, в. 3, с. 506–508.
2. Данежянц А. Г. О специальных хааровских интерполяциях мартингалов. — Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки, приложение, 2005, № 3, с. 3–20.
3. Павлов И. В., Цветкова И. В., Шамраева В. В. Некоторые результаты о мартингальных мерах одношаговых моделей финансовых рынков, связанные с условием несовпадения барисентров. — Вестник РГУПС, 2012, № 3, с. 177–181.

Поступила в редакцию
17.I.2015

© 2016 г.

BAYRAKTAR E.*, ZHOU Zh.**

ON AN OPTIMAL STOPPING PROBLEM OF AN INSIDER¹⁾

В работе рассматривается задача оптимальной остановки $v^{(\varepsilon)} := \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbf{E} B_{(\tau-\varepsilon)^+}$, сформулированная А.Н.Ширяевым в докладе, сделанном на Международной конференции «Stochastic Optimization and Optimal Stopping», организованной Математическим институтом им. В.А.Стеклова в Москве в сентябре 2012 года. Пусть $T > 0$ — фиксированный временной горизонт, $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ — броуновское движение, $\varepsilon \in [0, T]$ — некоторая константа и $\mathcal{T}_{\varepsilon, T}$ — множество моментов остановки со значениями на $[\varepsilon, T]$. Решение

* Department of Mathematics, University of Michigan; e-mail: erhan@umich.edu

** Institute for Mathematics and Its Applications, University of Minnesota; e-mail: zhoux528@umn.edu

¹⁾ This research was supported in part by the National Science Foundation under grants DMS 0955463.